ワインバーグの Cosmology 宇宙論

ゆらぎの形成と進化

S.ワインバーグ Steven Weinberg

小松英一郎 Eiichiro Komatsu 訳

下

日本評論社

ワインバーグの宇宙論

Cosmology

ゆらぎの形成と進化

S.ワインバーグ Steven Weinberg

小松英一郎 Eiichiro Komatsu 訳

下

日本評論社

Cosmology by Steven Weinberg
©Steven Weinberg 2008

"Cosmology" was originally published
in England in 2008.
This translation is published
by arrangement with
Oxford University Press.

はじめに

過去四半世紀に渡り，宇宙論研究は活気にあふれていた．80 年代初頭，インフレーション理論の登場によって宇宙論のいくつかの未解決問題に解法が見いだされ，宇宙の大規模構造の起源を説明するしくみを与えた．とりわけ大規模構造の起源に関する予言は，宇宙マイクロ波背景放射の異方性を観測することで確認できるものであった．

1989 年 11 月，宇宙背景放射探査機（COBE, COsmic Background Explorer）が打ち上げられた．まもなく，衛星に搭載された分光器による測定で宇宙マイクロ波背景放射の熱的性質が明らかとなり，その温度が小数点以下 3 桁の精度で決定された．これは，宇宙論において先例を見ない高精度なものである．それから少し後，長い間探し求められてきたマイクロ波背景放射の異方性が，同衛星に搭載された放射計のデータから発見された．

この発見に続き，地上に設置された検出器や気球に載せた検出器による観測，そして決定的にはウィルキンソンマイクロ波異方性探査機（WMAP, Wilkinson Microwave Anisotropy Probe）により，これらの異方性が，インフレーション理論をもとにした予想とよく一致することが示された．

90 年代後半には，Ia 型超新星[訳注 1]を標準光源に用いて，宇宙が加速的に膨張していることが発見された．これは，宇宙のエネルギーの大部分がある種の，圧力とエネルギー密度の比が $-1/3$ より小さい暗黒エネルギーで占められていることを示唆している[訳注 2]．この発見はマイクロ波背景放射の異方性の精密観測，および大規模な銀河のサーベイ（掃天）観測によって確認された．これらの観測データを総合することにより，宇宙論パラメータの値は確かなものになっていった．

一方，天文学における従来の手法も徐々に，しかし独立的に，宇宙論パラメータの決定精度を向上させていった．恒星大気の分光観測によるトリウム，続いてウランの発見，それに加えて球状星団の主系列からの折れ曲がり（上巻 65 ページ参照）の継続的な研究は，宇宙年齢の推定値を絞り込んできた．銀河間ガスに

訳注 1　I 型超新星は，そのスペクトルに水素の吸収線が見られないものの呼称だが，Ia 型超新星はその中でもケイ素の吸収線が見られるものを指す．

訳注 2　暗黒エネルギーを完全流体とみなしたとき，その圧力はエネルギー密度の $-1/3$ 倍よりも小さい．

凡例

ラテン文字の添字 i, j, k 等は一般に 3 次元空間座標のラベルとし，たいていの場合 1, 2, 3 をとる．

ギリシャ文字の添字 μ, ν 等は一般に 4 次元時空座標のラベル 1, 2, 3, 0 とし，x^0 を時間座標とする．

特に明記のない限り，反復する添字に関しては和をとる．

平坦な時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ は対角行列で，その成分は $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{00} = -1$ とする．

空間的な 3 元ベクトルは太字で表す．

ベクトルの上に付与される記号 (ˆ) は，それぞれに対応する単位ベクトルを表す．すなわち，$\hat{v} \equiv \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ とする．

量の上に付与される点（˙）は，その量に関する時間微分を表す．

∇^2 はラプラシアン，$\dfrac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}$ である．

ベクトルとテンソルに対するものを除き，下付きの添字 0 は現在の時刻を表す．

密度，圧力，速度に付与する下付きの添字 B，D，γ，ν は，それぞれバリオンのプラズマ（核子と電子），冷たい暗黒物質，光子，ニュートリノを表すが，下付きの添字 M と R は，それぞれ非相対論的物質（バリオンのプラズマと冷たい暗黒物質）と放射（光子とニュートリノ）を表す．

行列またはベクトル A の複素共役，転置，およびエルミート共役は，それぞれ A^*，A^t，および $A^\dagger = A^{*t}$ と表す．方程式の最後尾の $+H.c.$ および $+c.c.$ は，それぞれ前の項のエルミート共役および複素共役を表す．

5 章より，記号の上に付与される横棒（¯）は，その記号の平均値を表す．

波数を参照する際，q はロバートソン–ウォーカー計量のスケール因子 $a(t)$ で任意に規格化された共動的な波数[訳注 1]とし，k は物理的な波数 $q/a(t)$ の現在の値 q/a_0 とする（補足：これは，k を共動的な波数として用いる慣習とは異なっている．文献では様々に異なる $a(t)$ の規格化が用いられている）．

特に明記のない限り，$\hbar$ と光速度を 1 とする自然単位系を用いる．全体を通し

訳注 1　物理的な波数に $a(t)$ をかけたもので，宇宙膨張とともにその値が変わらない波数のこと．

代わっていた．私は，関連する理論を自分の手で組み立てるのがもっとも手っ取り早いことであるのに気づいたのだった．

本書がその集大成である．本書の目的は，現代の宇宙論研究において実際に使われ，テストされている考えや式を包括的に説明することである．本書は大きくわけて 2 つのパートに分かれている．私の授業での経験からいえば，両パートとも大学院の一学期分の授業に十分足る内容である．最初のパート（1 章から 4 章）は，主に等方で一様な，平均化された宇宙を扱うが，マイクロ波背景放射の異方性の短い紹介も 2.6 節に与えておく．これらの章の順序は，宇宙の歴史の流れにほぼ逆行する形となっている．1 章は銀河が形成された時期以降の宇宙に特化しており，赤方偏移でいえばほぼ $z<10$（約 4.6 億年以降）に相当する．2 章では $z\simeq 1000$（約 42 万年頃）に発せられたマイクロ波背景放射を扱う．3 章では初期宇宙を扱う．時期としては宇宙膨張が放射の寄与に支配され始めた時期から赤方偏移にして $z\approx 10^4$（約 6800 年頃），すなわち放射の密度が物質の密度を下回る時期までである．4 章ではインフレーションの時期を取り上げる．インフレーションは放射優勢の時期より以前に起こったと考えられている．

二つ目のパート（5 章から 10 章）では，平均化された一様等方宇宙からのずれに集中する．5 章でいくつかの一般的な定式化を与え，6 章でそれを非一様性の進化に適用する．7 章ではマイクロ波背景放射の異方性にもどり，8 章では物質の大規模構造を取り上げる．重力レンズは後のほう，9 章において議論する．なぜなら，重力レンズのもっとも重要な応用は，弱い重力レンズ効果を用いた大規模構造の研究だと思うからである．4 章におけるインフレーションの議論ではインフレーション期における宇宙の平均的な性質のみを扱うが，10 章においてインフレーションに再びもどり，インフレーション期に生成された量子ゆらぎからの非一様性の成長を議論する．

私は本書を通じて，数値計算によって他所で得られた結果をたんに掲載したりせず，可能な限り，宇宙論的な現象の解析的な計算を与えようと試みた．過去の文献において，観測と理論を比較するのに使われている計算はどうしてもいくつかの細かい点を考慮する必要があり，それは解析的な取り扱いを不可能にするか，計算の主たる物理的な特徴をうやむやにしてしまう．私は，そのような場合には躊躇なく，計算の精度をある程度犠牲にして見通しの良さを選んだ．これは，6.2 節から 6.5 節における宇宙論的ゆらぎの流体力学的な扱いと，8 章における大規

ほしい．私はそれらを以下のウエブサイト：http://zippy.ph.utexas.edu/~weinberg/corrections.html に掲載しよう.

テキサス州オースティンにて
2007 年 6 月

[編集部より]
原著は一冊ですが，日本版では，上，下巻に分けています．上巻は，第 1 章～第 4 章，下巻は，第 5 章～第 10 章を収録しています．なお，巻末の付録などはそれぞれの巻で参照しているものになっていますが，上，下巻の双方から同一の付録を参照している場合，重なった収録となっています．この点ご理解下さい．

知り得る範囲で，コーネル大学のアーカイブ（http://arxiv.org）に投稿された論文への参照，および出版された文献への参照を含めておいた．いくつかの例ではコーネル大学のアーカイブ番号だけになったが，それはその論文がまだ出版されていなかったか，出版社に一度も投稿されなかったためである．本書では，私が知る限りの最新の宇宙論パラメータの測定結果を引用しているが，それは一つには読者に，現在観測的に何が可能であるかを感じてもらいたいからである．しかし，様々な異なる測定結果を組み合わせはしなかった．なぜなら，それが物理的理解の助けになるとは思わなかったし，それが良い一致を見たとしても，すぐに古い情報になると思ったからである．

テキサス大学の同僚たちにはずいぶんと助けてもらった．トーマス・バーンズ，フリッツ・ベネディクト，ウイリー・フィシュラー，カール・ゲブハート，パトリック・グリーン，リチャード・マツナー，ポール・シャピロ，クレイグ・ホイーラー，そして特にデュエイン・ダイカスはいくつかの数値計算を行ってくれ，多くの間違いを訂正してくれた．またここにあげた同僚に対する以上に，私は小松英一郎に感謝する．彼は原稿のすべてを読んでくれ，そして宇宙論研究に関して，けっして間違うことのない理解と情報の源であった．

作図と計算に関しては，私の研究補佐の学生ラファエル・フラウガーから多くの助けを得た．そして，莫大な量の誤りに関して，フラウガーと他の学生諸君，インユー・リー・ボレツ，カノクワン・チャイチェルダスクル，ボー・リー，イアン・レーダラー，渡邉悠貴に注意してもらった．マシュー・アンダーソンは，宇宙論的元素合成に関する数値計算で助けてくれた．

また，特定のトピックに関しては，以下の諸氏，エド・バーチンガー，ディック・ボンド，レイサン・ボイル，ロバート・カーン，アラン・グース，ロバート・カーシュナー，アンドレイ・リンデ，エリック・リンダー，スラヴァ・ムカノフ，ソール・パールマター，ジョナサン・プリッチャード，アダム・リース，ウーロス・セルジェック，ポール・スタインハート，エドウィン・ターナー，マティアス・ザルダリアーガとのやりとりから多くを得た．さらに，ジャン・ダフィーとテリー・ライリーにも多くを助けてもらった．

もちろん，本書に残ったどんな誤りについても，私個人が責任を負う．もし読者が誤りに気づいたなら，どんなものでも良いから是非知らせて

模構造の扱いにおいてとりわけ顕著である．しかし，6.1 節と付録 H において，より正確な運動学理論の記述も与えておく．現代の宇宙論研究で用いられるコンピュータプログラムはこの運動学理論に基づいている．7 章では，両方の手法を宇宙マイクロ波背景放射に適用する．

60 年代から見ると，非常に多くのことが宇宙論に起こってきた．したがって，必然的に本書は，私の 1972 年の著作『重力と宇宙論』（Gravitational and Cosmology）とはまったく違うものになっている．本書で繰り返す必要がないと思われる部分では，場合に応じて以前の著作（以降 “G&C” と呼ぶ）を参照することとする．古典的な一般相対論に関していえば，それが実験的に確認され，より強固なものとなったことを別にすれば，1972 年から特に大きな変化がなかったため，本書で宇宙論に加えて重力も扱う必要性はないと思われた．しかしながら，一般相対論の知識をリフレッシュしたい読者に便利なように，そして私の記号の使い方を明らかにするために，一般相対論の手短かな紹介を付録 B に与えておく．その他の付録は，本書のあちこちで必要となる技術的事項について扱っている．また，本書の終わりに，いくつかの節にまたがって使われている記号の用語集，および例題集を挙げておく．

この本の分量を取り扱いに困らない程度に抑えるため，高度に思索的な事項は除外することにした．したがって，本書では高次元宇宙理論，人間原理的な考え方，ホログラフィー宇宙論，インフレーションの詳細に関する推論，その他の多くの新しいアイデアには立ち入らない．ひょっとするとこれらのうちのいくつかに関しては，今後の追加の巻に含むかもしれない．本書は，その大部分において，宇宙論の主流となったものに特化している．すなわち，一つか，あるいはそれ以上のスカラー場によって引き起こされたインフレーションがあり，その後放射，冷たい暗黒物質，バリオン物質，そして暗黒エネルギーに支配されたビッグバン宇宙となった，というシナリオである．

私は，本書で扱うトピックに関する議論は，200n 年（n は 1 から 7 までの整数で，この本の箇所に応じて変化する）までの最新情報だと考えている．これらの年までに書かれた天体物理学の関連する文献は完全に参照することを心がけたが，いくつかの論文を参照し忘れてしまったであろうことは疑うべくもない．たんに文献への参照がないからといって，私がその仕事を最初にしたと主張しているとは取らないでほしいが，いくつかの仕事に関してはおそらく最初であろう．私の

日本版によせて

Cosmology が日本の物理学者，天文学者，そして学生たちの手元に届いたことをとても嬉しく思います．本書で引用している論文の著者の名前を見れば，日本人科学者が宇宙論の発展に重要な役割を果たしてきたことがわかるでしょう．なかでも，最もすぐれた，生産的な科学者の一人である小松英一郎が本書の執筆を助けてくれ，また本書を日本語に翻訳してくれたことはとても幸運なことでした．

読者が本書を日本語で楽しむとともに，読者にとって有益であることを願っています．

テキサス州オースティンにて

スティーブン・ワインバーグ

2013 年 3 月 22 日

よる吸収線の観測から得られた重水素と水素の存在比率は，宇宙論的元素合成の計算と突き合わせることで，宇宙に存在する通常のバリオン物質の質量密度を与えた．その密度の値はある種ミステリアスなもので，バリオン物質でない冷たい暗黒物質の密度のたかだか 5 分の 1 程度であった．ハッブル宇宙望遠鏡，および地上望遠鏡の観測からは，より正確なハッブル定数の値が得られてきた．これらの手法で得られたパラメータの値のいくつかが，宇宙マイクロ波背景放射や大規模構造の研究で得られた値と整合することは，大いに心強い．

さらに進歩は続く．近い将来において，我々は暗黒エネルギーの密度が時間に関して一定であるか，あるいは変化するかの絶対的な情報を得るだろうし，インフレーションの時期の直接観測への道を拓く重力波の兆候が見つかるだろうと期待している．暗黒物質の正体は，大型加速器において人工的に暗黒物質を生成するか，あるいは自然に存在して地球に降り注いでいる暗黒物質を直接観測することで明らかになるだろう．一方で，どれほどの時間をかければ，基礎となる物理理論から出発して具体的なインフレーション理論を導いたり，暗黒物質や暗黒エネルギーを説明できるようになるかについては，まだはっきりとしない．

この宇宙論における新展開は，まるで素粒子物理学のそれを見るようである．素粒子と場の理論の標準モデルは 80 年代までには完成されていた．その後も重要な理論的，および実験的な仕事は続いたものの，現在では，実験と新しい理論的アイデアとのあいだにはほとんど関連性が見られない．このため，素粒子物理学はその生気のほとんどを失ってしまった．一方，宇宙論は，素粒子物理学の研究者が 60 年代や 70 年代に経験したような興奮を提供しているのだ．

1999 年，全三巻にわたる場の量子論の本（以下 “QTF” と呼ぶ）を書き終えた私は，（慣れないほど）たくさんの時間ができたこともあり，過去 20 年間における宇宙論の素晴らしい進展の礎となった理論をくわしく学ぼう，と思いたった．昔いくつか宇宙論の研究をしたとはいえ，現在の宇宙論に追いつくのは大変時間を要する仕事となった．宇宙論に関するレビュー論文は，観測データの良いまとめにはなったが，往々にして導出抜きで式を引用し，もととなる式への参照すら与えないことがあった．ときとして式は誤っており，そのため自分で導き出すのは困難を極めた．もととなる導出を見つけることができても，論文は論理に穴があったり，隠れた仮定に基づいていたり，説明のない記号を使ったりしていた．しばしば，大規模なコンピュータプログラムによる計算が解析的な研究に取って

て $-e$ は電子の有理化単位系[訳注 2]における電荷とする．したがって，微細構造定数は $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$ となる．

引用する数値データの最後の括弧中に含まれる数字は，引用された数値の最後の桁における不定性を与える．

複数の節にまたがって使用される他の記号に関しては，357 ページの用語集を参照のこと．

訳注 2 距離 r だけ離れた 2 つの電荷間にはたらくクーロン力が $e^2/4\pi r^2$ となる単位系．

ワインバーグの
宇宙論
ゆらぎの形成と進化
下

contents

ワインバーグの
宇宙論 上
ビッグバン宇宙の進化
contents

第5章 小さなゆらぎの一般論

4章までは宇宙は一様かつ等方であるとし，重力場としてロバートソン–ウォーカー計量を用いてきた．これはもちろん近似で，宇宙で最も興味深い現象のほとんど——つまり銀河団，銀河，星，そして我々自身の存在——を無視している．したがって，ここからは一様性と等方性からのずれを解析していく．

本章ではこの解析に必要な基礎を得るため，小さなゆらぎの進化を記述する一般相対論的方程式を導いた後，ゆらぎに関する一般的な性質を学ぶ．6章では本章で導く式を用いて放射優勢期から現在近くまでのゆらぎの進化を調べる．6章で得られる結果を用い，7章と8章で宇宙マイクロ波背景放射で観測されるゆらぎと宇宙の大規模構造の進化を追う．9章では重力レンズを扱う．重力レンズは将来的に暗黒物質の大規模構造を解析するのに最も有力な道具となり得る．これらの章の議論は一般的なもので，放射優勢期以前のインフレーションについての仮定にはよらない．10章で，インフレーション理論が6章から9章の議論に与える影響を学ぶ．一般相対論的摂動論をかじったことのある読者は，本章は有用な公式集として用いるだけで跳ばして6章に進んでも良いが，それ以外の読者は本章から順番通りに読んだ方が良いだろう．

5.1 場の方程式

まず，宇宙の歴史の大部分では一様性と等方性からのずれは小さく，したがってゆらぎは1次の摂動として扱えると仮定する[*1]．これは本章で行う解析の大

[*1] 宇宙論における1次の摂動の研究は，E. Lifshitz, *J. Phys. U.S.S.R.* **10**, 116 (1946) に始まる．2次の摂動による補正の古典的文献は，K. Tomita, *Prog. Theor. Phys.* **37**, 831 (1967); **45**, 1747 (1970); **47**, 416 (1971) である．より最近の仕事は，K. Tomita, *Phys. Rev. D* **71**, 3504 (2005); N. Bartolo, S. Matarrese, A. Riotto, *J. Cosm. & Astropart. Phys.* **0606**, 024 (2006) [astro-ph/0604416] を見よ．

前提である．観測可能な宇宙はほぼ一様で，その空間曲率は現在の時刻近くになるまでゼロかあるいは無視しうるほど小さいので，摂動を含まない計量は式 (1.1.9) [訳注 1]のロバートソン–ウォーカー計量で与えられ，曲率定数は $K=0$ とする（現在に近い時刻における有限な曲率の効果は，7 章から 9 章で議論する）．すると，摂動を含む全計量は，

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{5.1.1}$$

と書ける．ここで $\bar{g}_{\mu\nu}$ は摂動を含まない計量，すなわち $K=0$ を持つロバートソン–ウォーカー計量，

$$\bar{g}_{00} = -1\,, \quad \bar{g}_{i0} = \bar{g}_{0i} = 0\,, \quad \bar{g}_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}\,, \tag{5.1.2}$$

そして $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ は小さな摂動である（これより，上に横棒のついた量は摂動を含まない量を表す）．一般の行列 M の逆行列 M^{-1} に対する摂動は，$\delta M^{-1} = -M^{-1}(\delta M)M^{-1}$ で与えられるから，計量の逆行列に対する摂動は，

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\nu} = -\bar{g}^{\mu\rho}\bar{g}^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma} \tag{5.1.3}$$

で与えられ，その成分は，

$$h^{ij} = -a^{-4}h_{ij}, \quad h^{i0} = a^{-2}h_{i0}, \quad h^{00} = -h_{00} \tag{5.1.4}$$

である．ここで，式 (5.1.3) の最後の表記における負符号に注意しよう．我々の記号の定義では，$g^{\mu\nu}$ に対する摂動 $\delta g^{\mu\nu}$ は $\delta g_{\mu\nu}$ の下付き添字をロバートソン–ウォーカー計量で上付き添字に変換したものでは**ない**．

　計量の摂動を用いてアフィン接続の摂動を計算する．

$$\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\rho}\left[-2h_{\rho\sigma}\bar{\Gamma}^{\sigma}_{\nu\lambda} + \partial_\lambda h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\lambda} - \partial_\rho h_{\lambda\nu}\right]. \tag{5.1.5}$$

摂動を含まないアフィン接続のうち，ゼロでない成分は式 (1.1.17)–(1.1.19) [訳注 2]から以下のように与えられる．

訳注 1　$d\tau^2 \equiv -g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t)\left[d\boldsymbol{x}^2 + K\dfrac{(\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x})^2}{1-K\boldsymbol{x}^2}\right].$

訳注 2

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{ij} &= -\frac{1}{2}\Big(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}\Big) = a\dot{a}\left(\delta_{ij} + K\frac{x^i x^j}{1-K\boldsymbol{x}^2}\right)\\
&= a\dot{a}\tilde{g}_{ij}\,,\\
\Gamma^i_{0j} &= \frac{1}{2}g^{il}\Big(g_{l0,j} + g_{lj,0} - g_{0j,l}\Big) = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}\,,\\
\Gamma^i_{jl} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{im}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{jm}}{\partial x^l} + \frac{\partial\tilde{g}_{lm}}{\partial x^j} - \frac{\partial\tilde{g}_{jl}}{\partial x^m}\right) \equiv \tilde{\Gamma}^i_{jl}.
\end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}^i_{j0} = \bar{\Gamma}^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \; , \qquad \bar{\Gamma}^0_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \; .$$

ただし $K=0$ とした．式（5.1.5）よりアフィン接続の摂動成分は，

$$\delta\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2a^2}\left(-2a\dot{a}\,h_{i0}\,\delta_{jk} + \partial_k h_{ij} + \partial_j h_{ik} - \partial_i h_{jk}\right), \tag{5.1.6}$$

$$\delta\Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2a^2}\left(-\frac{2\dot{a}}{a}h_{ij} + \dot{h}_{ij} + \partial_j h_{i0} - \partial_i h_{j0}\right), \tag{5.1.7}$$

$$\delta\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\left(2a\dot{a}\,\delta_{ij}\,h_{00} - \partial_j h_{i0} - \partial_i h_{j0} + \dot{h}_{ij}\right), \tag{5.1.8}$$

$$\delta\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2a^2}\left(2\dot{h}_{i0} - \partial_i h_{00}\right), \tag{5.1.9}$$

$$\delta\Gamma^0_{i0} = \frac{\dot{a}}{a}h_{i0} - \frac{1}{2}\partial_i h_{00}, \tag{5.1.10}$$

$$\delta\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{00} \tag{5.1.11}$$

で与えられ，とりわけ後で以下の式が必要となる．

$$\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu} = \partial_\mu\left[\frac{1}{2a^2}h_{ii} - \frac{1}{2}h_{00}\right] \; .$$

アインシュタイン方程式を書き下すには，リッチテンソルの摂動，

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\kappa} = &\frac{\partial\,\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial\,\delta\Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda} \\ &+ \delta\Gamma^\eta_{\mu\nu}\,\bar{\Gamma}^\nu_{\kappa\eta} + \delta\Gamma^\nu_{\kappa\eta}\,\bar{\Gamma}^\eta_{\mu\nu} - \delta\Gamma^\eta_{\mu\kappa}\,\bar{\Gamma}^\nu_{\nu\eta} - \delta\Gamma^\nu_{\nu\eta}\,\bar{\Gamma}^\eta_{\mu\kappa}\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

が必要で，それぞれの成分は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\delta R_{jk} = &-\frac{1}{2}\partial_j\partial_k h_{00} - \left(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right)\delta_{jk}h_{00} - \frac{1}{2}a\dot{a}\,\delta_{jk}\,\dot{h}_{00} \\ &+ \frac{1}{2a^2}\left(\nabla^2 h_{jk} - \partial_i\partial_j h_{ik} - \partial_i\partial_k h_{ij} + \partial_j\partial_k h_{ii}\right) \\ &- \frac{1}{2}\ddot{h}_{jk} + \frac{\dot{a}}{2a}\left(\dot{h}_{jk} - \delta_{jk}\dot{h}_{ii}\right) + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\left(-2h_{jk} + \delta_{jk}h_{ii}\right) + \frac{\dot{a}}{a}\delta_{jk}\partial_i h_{i0} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\partial_j\dot{h}_{k0} + \partial_k\dot{h}_{j0}\right) + \frac{\dot{a}}{2a}\left(\partial_j h_{k0} + \partial_k h_{j0}\right) \; ,\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

$$\begin{aligned}\delta R_{0j} = \delta R_{j0} = &\frac{\dot{a}}{a}\partial_j h_{00} + \frac{1}{2a^2}\left(\nabla^2 h_{j0} - \partial_j\partial_i h_{i0}\right) - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2}\right)h_{j0} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{a^2}\left(\partial_j h_{kk} - \partial_k h_{kj}\right)\right] \; ,\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

$$\begin{aligned}\delta R_{00} = &\frac{1}{2a^2}\nabla^2 h_{00} + \frac{3\dot{a}}{2a}\dot{h}_{00} - \frac{1}{a^2}\partial_i\dot{h}_{i0} \\ &+ \frac{1}{2a^2}\left[\ddot{h}_{ii} - \frac{2\dot{a}}{a}\dot{h}_{ii} + 2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}\right)h_{ii}\right] \; .\end{aligned} \tag{5.1.15}$$

式 (B.71) で与えられるアインシュタインの場の方程式は，一般的に以下の形に書ける．

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu} \,, \tag{5.1.16}$$

ここで，

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\, g^{\rho\sigma}\, T_{\rho\sigma} \,. \tag{5.1.17}$$

（宇宙定数を含めるには，$g_{\mu\nu}$ に比例し，その比例係数が定数であるような項を $T_{\mu\nu}$ に加えれば良い．）エネルギー–運動量テンソルと計量の摂動により，テンソル $S_{\mu\nu}$ も摂動を受ける．

$$\delta S_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\delta T^{\lambda}{}_{\lambda} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\bar{T}^{\lambda}{}_{\lambda} \,. \tag{5.1.18}$$

ここでは宇宙のエネルギー要素が完全流体であるとは仮定しないが，**摂動を含まない**エネルギー–運動量テンソル $\bar{T}^{\mu\nu}$ が回転変換および並進変換に対して不変であることから，$\bar{T}^{\mu\nu}$ は式 (B.42) で与えられる完全流体の形，

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \bar{p}\,\bar{g}_{\mu\nu} + \left(\bar{p} + \bar{\rho}\right)\bar{u}_\mu \bar{u}_\nu \tag{5.1.19}$$

になることが要請される．ここで，$\bar{\rho}(t)$，$\bar{p}(t)$，$\bar{u}^\mu$ はそれぞれ摂動を含まないエネルギー密度，圧力，四元速度ベクトルで，その成分は $\bar{u}^0 = 1$ および $\bar{u}^i = 0$ である．さらに，摂動を含まないアインシュタインの方程式（1.5.17）[訳注 3]と（1.5.18）[訳注 4]を用いて $\bar{\rho}$ と $\bar{p}$ をロバートソン–ウォーカースケール因子 a とその微分で書くことができる．

$$\bar{\rho} = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \,, \quad \bar{p} = -\frac{1}{8\pi G}\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \,. \tag{5.1.20}$$

これらより，摂動を含まないエネルギー–運動量テンソルは以下のトレースを持つことが導ける．

$$\bar{T}^{\lambda}{}_{\lambda} = 3\bar{p} - \bar{\rho} = -\frac{3}{4\pi G}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \,.$$

したがって，式（5.1.18）より以下の結果を得る．

訳注 3　$-\dfrac{2K}{a^2} - \dfrac{2\dot{a}^2}{a^2} - \dfrac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho - p)$.

訳注 4　$\dfrac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G(3p + \rho)$.

$$\delta S_{jk} = \delta T_{jk} - \frac{a^2}{2}\delta_{jk}\delta T^\lambda{}_\lambda + \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) h_{jk} \ , \tag{5.1.21}$$

$$\delta S_{j0} = \delta T_{j0} + \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) h_{j0} \ , \tag{5.1.22}$$

$$\delta S_{00} = \delta T_{00} + \frac{1}{2}\delta T^\lambda{}_\lambda + \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) h_{00} \ . \tag{5.1.23}$$

以上より，アインシュタイン方程式（5.1.16）は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
-8\pi G\left(\delta T_{jk} - \frac{a^2}{2}\delta_{jk}\delta T^\lambda{}_\lambda\right) &= -\frac{1}{2}\partial_j\partial_k h_{00} - \left(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right)\delta_{jk}h_{00} \\
&- \frac{1}{2}a\dot{a}\,\delta_{jk}\,\dot{h}_{00} + \frac{1}{2a^2}\left(\nabla^2 h_{jk} - \partial_i\partial_j h_{ik} - \partial_i\partial_k h_{ij} + \partial_j\partial_k h_{ii}\right) \\
&- \frac{1}{2}\ddot{h}_{jk} + \frac{\dot{a}}{2a}\left(\dot{h}_{jk} - \delta_{jk}\dot{h}_{ii}\right) + \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3\ddot{a}}{a}\right)h_{jk} + \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\delta_{jk}h_{ii} \\
&+ \frac{\dot{a}}{a}\delta_{jk}\partial_i h_{i0} + \frac{1}{2}\left(\partial_j\dot{h}_{k0} + \partial_k\dot{h}_{j0}\right) + \frac{\dot{a}}{2a}\left(\partial_j h_{k0} + \partial_k h_{j0}\right) \ ,
\end{aligned} \tag{5.1.24}$$

$$\begin{aligned}
-8\pi G\delta T_{j0} &= \frac{\dot{a}}{a}\partial_j h_{00} + \frac{1}{2a^2}\left(\nabla^2 h_{j0} - \partial_j\partial_i h_{i0}\right) + \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{a}\right)h_{j0} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{a^2}\Big(\partial_j h_{kk} - \partial_k h_{kj}\Big)\right] \ ,
\end{aligned} \tag{5.1.25}$$

$$\begin{aligned}
-8\pi G\left(\delta T_{00} + \frac{1}{2}\delta T^\lambda{}_\lambda\right) &= \frac{1}{2a^2}\nabla^2 h_{00} + \frac{3\dot{a}}{2a}\dot{h}_{00} - \frac{1}{a^2}\partial_i\dot{h}_{i0} \\
&+ \frac{1}{2a^2}\left[\ddot{h}_{ii} - \frac{2\dot{a}}{a}\dot{h}_{ii} + 2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}\right)h_{ii}\right] + 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right)h_{00}.
\end{aligned} \tag{5.1.26}$$

エネルギー–運動量テンソルの成分は保存則 $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$ に従う．この保存則の 1 次の摂動は，

$$\partial_\mu\delta T^\mu{}_\nu + \bar{\Gamma}^\mu_{\mu\lambda}\delta T^\lambda{}_\nu - \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}\delta T^\mu{}_\lambda + \delta\Gamma^\mu_{\mu\lambda}\bar{T}^\lambda{}_\nu - \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\bar{T}^\mu{}_\lambda = 0 \tag{5.1.27}$$

で，上付き添字と下付き添字の混ざったエネルギー–運動量テンソルの摂動 $\delta T^\mu{}_\nu$ は以下で定義される．

$$\delta T^\mu{}_\nu = \bar{g}^{\mu\lambda}\left[\delta T_{\lambda\nu} - h_{\lambda\kappa}\bar{T}^\kappa{}_\nu\right] \ . \tag{5.1.28}$$

添字 ν を空間成分の添字 j に取れば運動量保存則，

$$\partial_0\delta T^0{}_j + \partial_i\delta T^i{}_j + \frac{2\dot{a}}{a}\delta T^0{}_j - a\dot{a}\delta T^j{}_0 - (\bar{\rho}+\bar{p})\left(\frac{1}{2}\partial_j h_{00} - \frac{\dot{a}}{a}h_{j0}\right) = 0 \tag{5.1.29}$$

が得られ，ν を時間成分の添字 0 に取ればエネルギー保存則，

$$\partial_0\delta T^0{}_0 + \partial_i\delta T^i{}_0 + \frac{3\dot{a}}{a}\delta T^0{}_0 - \frac{\dot{a}}{a}\delta T^i{}_i - \left(\frac{\bar{\rho}+\bar{p}}{2a^2}\right)\left(-\frac{2\dot{a}}{a}h_{ii} + \dot{h}_{ii}\right) = 0 \tag{5.1.30}$$

が得られる．付録 B で述べるように，これらの保存則は独立な条件ではなく，アインシュタインの場の方程式から導くことができる．しかし，1 本（ないし 2 本）のアインシュタインの場の方程式を使う代わりに，運動量あるいはエネルギー保存則のどちらか一つ（あるいは両方）の保存則を使う方が便利な場合がある．また，よくあるケースとして，宇宙の組成が相互作用をしない流体（冷たい暗黒物質からなる流体と，通常の物質と放射からなる流体）からなる場合，これらの保存則は各流体に対して**それぞれ**成り立っている．しかし，この情報は場の方程式から導くことができない．

さて，これまでに得られた結果はいやになるほど複雑に見えるが，うまいことに，これらの結果を簡素化する方法がある．摂動を含まない計量およびエネルギー–運動量テンソルが空間的に一様等方であるおかげで，摂動をスカラー，発散がゼロのベクトル，および発散もトレースもゼロの対称テンソルに分解できる．すると 1 次の摂動レベルでは，場の方程式でも保存則の式でも，それぞれの種類の摂動は互いに結合せずに独立に進化する．計量の摂動は，常に以下の形に表すことができる[*2]．

$$h_{00} = -E \,, \tag{5.1.31}$$

$$h_{i0} = a\left[\frac{\partial F}{\partial x^i} + G_i\right] \,, \tag{5.1.32}$$

$$h_{ij} = a^2\left[A\delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial C_i}{\partial x^j} + \frac{\partial C_j}{\partial x^i} + D_{ij}\right] \,, \tag{5.1.33}$$

ここで摂動 A，B，C_i，$D_{ij} = D_{ji}$，E，F，G_i は $\boldsymbol{x}$ と t の関数で，以下の条件を満たす．

$$\frac{\partial C_i}{\partial x^i} = \frac{\partial G_i}{\partial x^i} = 0\,, \quad \frac{\partial D_{ij}}{\partial x^i} = 0\,, \quad D_{ii} = 0\,. \tag{5.1.34}$$

エネルギー–運動量テンソルを同じように分解しよう．まず完全流体を考える．

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (\rho + p) u_\mu u_\nu \,, \tag{5.1.35}$$

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1\,. \tag{5.1.36}$$

ここで $\bar{u}_i = 0$ および $\bar{u}_0 = -1$ であることを思い出せば，式（5.1.36）で与えられ

[*2] F，A，B をそれぞれ $\nabla^2 F = a^{-1}\partial_i h_{i0}$，$\nabla^2 A + \nabla^4 B = a^{-2}\partial_i\partial_j h_{ij}$，$3A + \nabla^2 B = a^{-2} h_{ii}$ の解として定義した後，C_i を $\nabla^2 C_i = a^{-2}\partial_j h_{ij} - \partial_i[A + \nabla^2 B]$ の解として定義する．そして式（5.1.32）と（5.1.33）を用いて G_i と D_{jk} を定義する．

る規格化条件より，

$$\delta u^0 = \delta u_0 = h_{00}/2 \tag{5.1.37}$$

が得られる．δu_i は独立な力学変数である（$\delta u^\mu \equiv \delta(g^{\mu\nu}u_\nu)$ は $\bar{g}^{\mu\nu}\delta u_\nu$ でないことに注意しよう）．すると，完全流体のエネルギー–運動量テンソルの 1 次の摂動は以下で与えられる．

$$\delta T_{ij} = \bar{p}\, h_{ij} + a^2\delta_{ij}\delta p, \quad \delta T_{i0} = \bar{p}h_{i0} - (\bar{\rho}+\bar{p})\delta u_i, \quad \delta T_{00} = -\bar{\rho}\, h_{00} + \delta\rho. \tag{5.1.38}$$

一般的に，エネルギー–運動量テンソルの摂動も計量の摂動のような形に書くことができる．まず，完全流体の場合のように $\delta\rho$ を δT_{00} と $-\bar{\rho}h_{00}$ の差として定義する．しかし，$\delta\rho$ は必ずしも通常の意味での密度ゆらぎを意味するとは限ら**ない**．すなわち，熱平衡時には ρ は温度や化学ポテンシャルの関数として書けるが，$\delta\rho$ は温度や化学ポテンシャルを変化させたときに生じる ρ の変化量であるとは限らない．次に，速度場の摂動 δu_i と $\bar{\rho}+\bar{p}$ の積も完全流体の場合のように $-\delta T_{i0}$ と $\bar{p}h_{i0}$ の差として定義し，δu_i をスカラー速度ポテンシャルの勾配 δu と発散がゼロのベクトル δu_i^V に分解する．最後に，$a^2\delta p$ を δT_{ij} と $\bar{p}h_{ij}$ の差に現れる δ_{ij} の係数として定義する．ここで再び，δp は通常の意味での圧力ゆらぎ，つまり熱平衡時の p が温度や化学ポテンシャルの変化によって変化する量，であるとは限らない．δT_{ij} における他の項（$\partial_i\partial_j\pi^S$，$\partial_i\pi_j^V + \partial_j\pi_i^V$，$\pi_{ij}^T$ と書こう）は，エネルギー–運動量テンソルの散逸的な補正項を表す．δT_{ij} を，

$$\delta T_{ij} = \bar{p}\, h_{ij} + a^2\left[\delta_{ij}\delta p + \partial_i\partial_j\pi^S + \partial_i\pi_j^V + \partial_j\pi_i^V + \pi_{ij}^T\right], \tag{5.1.39}$$

$$\delta T_{i0} = \bar{p}\, h_{i0} - (\bar{\rho}+\bar{p})\Big(\partial_i\delta u + \delta u_i^V\Big), \tag{5.1.40}$$

$$\delta T_{00} = -\bar{\rho}\, h_{00} + \delta\rho \tag{5.1.41}$$

と書けば，π_i^V，π_{ij}^T，δu_i^V は計量テンソルの摂動 C_i，D_{ij}，G_i が満たす式 (5.1.34) と似たような以下の条件を満たす．

$$\partial_i\pi_i^V = \partial_i\delta u_i^V = 0\,, \quad \partial_i\pi_{ij}^T = 0\,, \quad \pi_{ii}^T = 0\,. \tag{5.1.42}$$

繰り返すが，これらの公式は $\delta\rho$，δp，$\delta u_i \equiv \partial_i\delta u + \delta u_i^V$ の定義，および**非等方ストレス**項 π^S，π^V，π^T の定義としてみなせる．後者はエネルギー–運動量テンソルの完全流体からのずれを表す．式 (5.1.28) で与えられる上付き添字と下付き

添字の混ざったエネルギー–運動量テンソルの摂動成分（これは保存則の式で必要となる）は，以下のように書ける．

$$\begin{aligned}\delta T^i{}_j &= \delta_{ij}\delta p + \partial_i\partial_j\pi^S + \partial_i\pi_j^V + \partial_j\pi_i^V + \pi_{ij}^T\ ,\\ \delta T^i{}_0 &= a^{-2}(\bar\rho+\bar p)(a\partial_i F + aG_i - \partial_i\delta u - \delta u_i^V)\ ,\\ \delta T^0{}_i &= (\bar\rho+\bar p)(\partial_i\delta u + \delta u_i^V)\ ,\qquad \delta T^0{}_0 = -\delta\rho\ ,\\ \delta T^\lambda{}_\lambda &= 3\delta p - \delta\rho + \nabla^2\pi^S\ .\end{aligned} \tag{5.1.43}$$

これらの分解，および式（5.1.20）を用いることで，アインシュタインの場の方程式（5.1.24）–（5.1.26）と保存則の式（5.1.29），（5.1.30）は以下に示す 3 種類の連立微分方程式系に帰着する．

スカラー（圧縮性）モード

スカラーモードは最も複雑な場合で，8 つのスカラー量 E，F，A，B，$\delta\rho$，δp，π^S，δu からなる．式（5.1.24）のうち δ_{jk} に比例する項は，

$$\begin{aligned}-4\pi G a^2\left[\delta\rho - \delta p - \nabla^2\pi^S\right] &= \frac{1}{2}a\dot a\dot E + (2\dot a^2 + a\ddot a)E + \frac{1}{2}\nabla^2 A - \frac{1}{2}a^2\ddot A\\ &\quad - 3a\dot a\dot A - \frac{1}{2}a\dot a\nabla^2\dot B + \dot a\nabla^2 F\ .\end{aligned} \tag{5.1.44}$$

式（5.1.24）のうち（S を任意のスカラーとして）$\partial_j\partial_k S$ の形で書ける項は，

$$\partial_j\partial_k\Big[16\pi G a^2\pi^S + E + A - a^2\ddot B - 3a\dot a\dot B + 2a\dot F + 4\dot a F\Big] = 0\ . \tag{5.1.45}$$

式（5.1.25）のうち（再び S を任意のスカラーとして）$\partial_j S$ の形で書ける項は，

$$8\pi G\,a\,(\bar\rho+\bar p)\partial_j\delta u = -\dot a\partial_j E + a\partial_j\dot A\ . \tag{5.1.46}$$

式（5.1.26）は，

$$\begin{aligned}-4\pi G\left(\delta\rho + 3\delta p + \nabla^2\pi^S\right) &= -\frac{1}{2a^2}\nabla^2 E - \frac{3\dot a}{2a}\dot E - \frac{1}{a}\nabla^2\dot F - \frac{\dot a}{a^2}\nabla^2 F\\ &\quad + \frac{3}{2}\ddot A + \frac{3\dot a}{a}\dot A - \frac{3\ddot a}{a}E + \frac{1}{2}\nabla^2\ddot B + \frac{\dot a}{a}\nabla^2\dot B\ .\end{aligned} \tag{5.1.47}$$

式（5.1.29）で与えられる運動量保存則のうち微分 ∂_j で書ける項は，

$$\partial_j\Big[\delta p + \nabla^2\pi^S + \partial_0[(\bar\rho+\bar p)\delta u] + \frac{3\dot a}{a}(\bar\rho+\bar p)\delta u + \frac{1}{2}(\bar\rho+\bar p)E\Big] = 0\ , \tag{5.1.48}$$

そしてエネルギー保存則の式（5.1.30）は，

$$\delta\dot{\rho}+\frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho+\delta p)+\nabla^2\left[-a^{-1}(\bar{\rho}+\bar{p})F+a^{-2}(\bar{\rho}+\bar{p})\delta u+\frac{\dot{a}}{a}\pi^S\right]$$
$$+\frac{1}{2}(\bar{\rho}+\bar{p})\partial_0\Big[3A+\nabla^2 B\Big]=0 \qquad (5.1.49)$$

で与えられる．式（5.1.48）と（5.1.49）において $\delta\rho$，δp，π^S は全エネルギー–運動量テンソルの摂動成分であるが，エネルギーと運動量を互いにやり取りしない宇宙の要素には個別に同じ式が成り立つ．

ベクトル（渦）モード

ベクトルモードは発散がゼロの 4 つのベクトル量 G_i，C_i，δu_i^V，π_i^V からなる．式（5.1.24）のうち（V_j を $\partial_j V_j=0$ を満足する任意のベクトルとして）$\partial_k V_j$ の形で書ける項は，

$$\partial_k\Big[16\pi Ga^2\pi_j^V-a^2\ddot{C}_j-3a\dot{a}\dot{C}_j+a\dot{G}_j+2\dot{a}G_j\Big]=0 \qquad (5.1.50)$$

で，式（5.1.25）のうち（再び V_j を $\partial_j V_j=0$ を満足する任意のベクトルとして）V_j で書ける項は，

$$8\pi G(\bar{\rho}+\bar{p})a\delta u_j^V=\frac{1}{2}\nabla^2 G_j-\frac{a}{2}\nabla^2\dot{C}_j \qquad (5.1.51)$$

である．式（5.1.29）で与えられる運動量保存則のうち発散がゼロのベクトルで書ける項は，

$$\nabla^2\pi_j^V+\partial_0[(\bar{\rho}+\bar{p})\delta u_j^V]+\frac{3\dot{a}}{a}(\bar{\rho}+\bar{p})\delta u_j^V=0\,. \qquad (5.1.52)$$

特に，完全流体の場合は $\pi_i^V=0$ で，式（5.1.52）より $(\bar{\rho}+\bar{p})\delta u_j^V$ は $1/a^3$ に比例して減少することがわかる．この場合，式（5.1.50）と（5.1.51）から $G_j-a\dot{C}_j$ は $1/a^2$ に比例して減少することが導かれる．（5.3 節で見るように，$G_j-a\dot{C}_j$ は計量のベクトル型摂動において唯一物理的に意味のある組み合わせである.）

テンソル（波動）モード

テンソルモードはトレースも発散もゼロの 2 つの対称テンソル D_{ij}，π_{ij}^T からなる．場の方程式は 1 つしかない．式（5.1.24）のうち発散もトレースもゼロのテンソルで書ける項は重力波の波動方程式で，

$$-16\pi Ga^2\pi_{ij}^T=\nabla^2 D_{ij}-a^2\ddot{D}_{ij}-3a\dot{a}\dot{D}_{ij} \qquad (5.1.53)$$

である．

以上のスカラー型，ベクトル型，テンソル型摂動の方程式系は，それぞれまだ完全に閉じてはいない．それは，座標系の選び方の自由度（座標系を摂動と同程度の微小量だけ変化させる自由度）が残っているためである．5.3 節において，「ゲージ」を選ぶことでこの自由度を除去する方法を学ぶ．

座標系が固定された後でも，圧力 p と非等方ストレス π^S がエネルギー密度 ρ と関係づけられない限り，スカラーモードの方程式系は閉じない．しかし，冷たい暗黒物質のような性質を持つ宇宙のエネルギー要素の場合には方程式系は閉じる．なぜなら，冷たい暗黒物質の粒子は光速に比べて無視できるほどの小さな速度しか持たず，宇宙の他の要素とも相互作用しないからである．そのような要素に対しては p と π^S をゼロとして良い．粒子の速度が光速に比べて無視できない場合はより複雑となるが，その場合でも，粒子が十分頻繁に衝突して局所熱平衡状態となる場合はそれほど複雑でない．その場合は π^S が無視でき，粒子が十分相対論的であれば p は単に $\rho/3$ となる．粒子があまり相対論的でなくても，熱平衡状態における圧力はたいてい ρ，および 1 つあるいは複数の数密度 n の関数で書ける．この数密度は以下のカレント保存の式を満たす．

$$(n\,u^{\mu})_{;\mu} = 0\ . \qquad (5.1.54)$$

この条件より，摂動を含まない数密度は $\bar{n} \propto a^{-3}$ を満たし，摂動は以下の式を満たす．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta n}{\bar{n}}\right) + \frac{1}{a^2}\nabla^2 \delta u + \frac{1}{2}\Big(3\dot{A} + \nabla^2 \dot{B}\Big) - \frac{1}{a}\nabla^2 F = 0\ . \qquad (5.1.55)$$

p が ρ と n の関数で与えられ，さらに座標系が固定されれば，場の方程式と保存則の式（5.1.48），(5.1.49)，(5.1.55）はスカラーモードを記述する閉じた方程式系（完全系）を構成する．

同様に，座標系を固定してもベクトルモードとテンソルモードの方程式系は閉じない．これらの方程式系を閉じさせるにはそれぞれ π^V_i と π^T_{ij} に対する式が必要となるが，完全流体の場合は $\pi^V_i = \pi^T_{ij} = 0$ であるから問題にならない．

局所的熱平衡が成り立たない一般の場合には，個々の粒子の位置と運動量の分布の変化をボルツマン方程式を解くことで追い，その分布関数から $\delta\rho$，δp，π^S，π^V_i，π^T_{ij} を求めなくてはならない．光子とニュートリノのボルツマン方程式は付録 H で導き，その結果を 6 章と 7 章で用いる．

5.2　フーリエ分解と確率的初期条件

問題をできるだけ簡素化するため，問題に存在する対称性を大いに活用しよう．場と保存則の式の回転不変性から摂動をスカラー，ベクトル，テンソルモードに分けたが，回転不変性は本節の後の方で再び用いる．さらに，これらの方程式は空間の並進変換における対称性も持ち合わせている．並進対称性を最も効率良く利用するには，摂動をフーリエ分解すれば良い．摂動が微小である限り，異なる波数を持つフーリエ成分は互いに結合せず，独立に進化する．さらには，初期条件のみが共動波数ベクトル $\boldsymbol{q}$ の方向に依存し，方程式そのものは波数の大きさにしか依存しない．

まず，スカラーモードを例にとって見てみよう．摂動を含まない計量，エネルギー密度等は位置によらないので，対応する摂動量の一般解は平面波の重ね合わせで書ける．つまり，摂動の位置依存性は $\exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})$ で書ける．ここで $\boldsymbol{q}$ は実数の波数ベクトルで，最終的に積分されるべき量である．それぞれのスカラー型摂動（$A(\boldsymbol{x},t)$，$B(\boldsymbol{x},t)$ 等）の $\exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})$ の係数は，5.1 節で導いた方程式の $\partial/\partial x^j$ をすべて iq_j に置き換えた連立常微分方程式の解で，時間を独立変数とする．このようにして得られた微分方程式は $q\equiv|\boldsymbol{q}|$ に依存するが，$\boldsymbol{q}$ の方向には依存しない．したがって解は q でラベル付けされた独立な固有モードの重ね合わせで書ける．それぞれのスカラー型摂動の解を $A_{nq}(t)$，$B_{nq}(t)$ 等と書き，すべての解全体にかかる共通の因子として $\alpha_n(\boldsymbol{q})$ を定義しよう．離散的な添字 n は様々な独立解を区別する添字とする．共通因子 $\alpha_n(\boldsymbol{q})$ は初期条件を表し，回転不変ではない（もし初期条件が回転不変なら，銀河も星も生成されない）．したがって，$\alpha_n(\boldsymbol{q})$ は $\boldsymbol{q}$ の方向に依存するが，$A_{nq}(t)$，$B_{nq}(t)$ 等は $q\equiv|\boldsymbol{q}|$ のみに依存するように選べる．つまり解は，

$$
\begin{aligned}
A(\boldsymbol{x},t) &= \sum_n \int d^3q\ \alpha_n(\boldsymbol{q}) A_{nq}(t) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}, \\
B(\boldsymbol{x},t) &= \sum_n \int d^3q\ \alpha_n(\boldsymbol{q}) B_{nq}(t) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}
\end{aligned}
\tag{5.2.1}
$$

のように書け，同様な表式が E，F，$\delta\rho$，δp，δu，π^S，あるいはあらゆる他のスカラー型摂動に対して成り立つ（ただしそれらはすべて**同じ**因子 $\alpha_n(\boldsymbol{q})$ を持つ）．

さて，2.6 節で議論したように，スカラー型摂動 $A(\boldsymbol{x},t)$，$B(\boldsymbol{x},t)$ は確率変数と考えられ，その性質は摂動の積の平均値で記述される．解 $\{A_{nq}(t), B_{nq}(t),\cdots\}$

は確率的でなくある決まった関数であるから，スカラー型摂動が確率的であるのは初期条件，つまり $\alpha_n(\boldsymbol{q})$，が確率的であることに起因する．スカラー型摂動が付録 E で定義されるガウス分布に従うと仮定すれば，スカラー型摂動のすべての積の平均値は $\langle A(\boldsymbol{x},t)\,A(\boldsymbol{y},t)\rangle$，$\langle A(\boldsymbol{x},t)\,B(\boldsymbol{y},t)\rangle$ 等のような摂動のペアの積の平均値で表される．任意の 2 つの実スカラー量 $X(\boldsymbol{x},t)$，$Y(\boldsymbol{y},t)$ の積の平均を考えよう．式（5.2.1）を用いて X を，式（5.2.1）の複素共役を用いて Y を展開するのが便利で，以下の結果を得る．

$$\langle X(\boldsymbol{x},t)\,Y(\boldsymbol{y},t)\rangle = \sum_{nm}\int d^3q\int d^3q'\,X_{nq}(t)\,Y^*_{mq}(t)\langle\alpha_n(\boldsymbol{q})\alpha^*_m(\boldsymbol{q}')\rangle\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\,e^{-i\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{y}}.$$

初期条件は並進変換に対して不変ではないが，その確率分布関数は並進変換に対して不変であると仮定しよう．すると $\langle X(\boldsymbol{x},t)\,Y(\boldsymbol{y},t)\rangle$ が $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ のみの関数となり，$\langle\alpha_n(\boldsymbol{q})\alpha^*_m(\boldsymbol{q}')\rangle$ がデルタ関数 $\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')$ に比例することが導かれる．さらに，初期条件は回転変換に対して不変ではないが，その確率分布関数は回転変換に対して不変であると仮定しよう．すると，デルタ関数の係数は波数ベクトル $\boldsymbol{q}$ の大きさ $q\equiv|\boldsymbol{q}|$ のみに依存し，その方向には依存しないことが導かれる．したがって，

$$\langle\alpha_n(\boldsymbol{q})\alpha^*_m(\boldsymbol{q}')\rangle = \mathcal{P}_{nm}(q)\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\,, \tag{5.2.2}$$

および，

$$\langle X(\boldsymbol{x},t)\,Y(\boldsymbol{y},t)\rangle = \sum_{nm}\int d^3q\;X_{nq}(t)\,Y^*_{mq}(t)\,\mathcal{P}_{nm}(q)\,\exp(i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{5.2.3}$$

が導かれる．以上より，宇宙論的摂動論の仕事として 2 つあることがわかる．1 つは，宇宙のエネルギー要素に関する適当な仮定のもと，微分方程式を解いて $A_{nq}(t)$，$B_{nq}(t)$ 等の解を求めること．もう 1 つは，初期宇宙におけるゆらぎの起源の理論を用いて関数 $\mathcal{P}_{nm}(q)$ を計算することである．

式（5.2.2）より，$\mathcal{P}_{mn}(q)$ はエルミート行列，

$$\mathcal{P}^*_{nm}(q) = \mathcal{P}_{mn}(q) \tag{5.2.4}$$

で，かつ以下の意味で正である．

$$\sum_{nm}\mathcal{P}_{nm}(q)\xi_n\xi^*_m > 0. \tag{5.2.5}$$

ここで，ξ_n はゼロでない任意の複素数（あるいは q の任意関数）を表す．

一般に，任意の独立解の組み合わせに対して $\mathcal{P}_{nm}(q)$ が対角行列となる理由は

ないから，異なる独立解の間には干渉が生じる．しかし，$\mathcal{P}_{nm}(q)$ が δ_{nm} に比例するように解を**選ぶ**ことができる．それが常に可能であることを示すため，線形代数の定理を思い出そう．$\mathcal{P}_{nm}(q)$ は正のエルミート行列なので，常に以下の形に書ける．

$$\mathcal{P}_{nm}(q) = \sum_r Z_{nr}(q) Z^*_{mr}(q) \,, \tag{5.2.6}$$

ここで $Z_{nr}(q)$ はある正方行列で，r は n と同じ数だけ存在する添字とする（同じ式を行列の記号を用いて書けば $\mathcal{P} = ZZ^\dagger$ となる）．そこで，独立解を，

$$\tilde{A}_{rq}(t) \equiv \sum_n Z_{nr}(q) A_{nq}(t) \,, \quad \tilde{B}_{rq}(t) \equiv \sum_n Z_{nr}(q) B_{nq}(t), \quad \cdots$$

のように再定義する．同様に規格化因子も，

$$\alpha_n(q) \equiv \sum_r Z_{nr}(q)\, \tilde{\alpha}_r(q)$$

と再定義すると，

$$A(\boldsymbol{x}, t) = \sum_r \int d^3q\, \tilde{\alpha}_r(\boldsymbol{q}) \tilde{A}_{rq}(t) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}$$

を得る．他のスカラー型摂動 B，E，F，$\delta\rho$，δp，δu 等に関しても同様の作業を行う（ただし $\tilde{\alpha}_r(\boldsymbol{q})$ はすべてのスカラー型摂動に共通する）．再定義された確率変数のペアの平均値は以下で与えられる．

$$\langle \tilde{\alpha}_r(\boldsymbol{q}) \tilde{\alpha}^*_s(\boldsymbol{q}') \rangle = \delta_{rs} \delta^3(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}') \,. \tag{5.2.7}$$

これが証明したかった結果である．$\tilde{\alpha}_r(\boldsymbol{q})$ が式（5.2.7）を満たすように解 $\tilde{A}_{rq}(t)$ 等を選ぶことで，異なる独立解は無相関となる．つまり，あらゆる解のペアの平均値は，各々の独立解のペアの平均値の和で書ける．1 つ例を挙げれば，

$$\langle A(\boldsymbol{x}, t)\, A(\boldsymbol{y}, t) \rangle = \sum_r \int d^3q\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\, |\tilde{A}_{rq}(t)|^2 \tag{5.2.8}$$

と書ける．このように，関数 $\mathcal{P}_{nm}(q)$ を計算する問題が，式（5.2.7）を満足する解の線形結合を求める問題にすりかわったことになる．

余談であるが，α_n は「実数条件」を満たすから，$\langle \alpha_n \alpha^*_m \rangle$ がわかっていれば $\langle \alpha_n \alpha_m \rangle$ もすぐ計算できる．実数条件は以下のように導かれる．$A_{nq}(t)$，$B_{nq}(t)$ 等の従う微分方程式は実数しか含まないから，$A_{nq}(t)$，$B_{nq}(t)$ 等が解であれば，同じ n を持つ複素共役 $A^*_{nq}(t)$，$B^*_{nq}(t)$ 等もまた解である．したがって，複素共役

は線形結合 $\sum_m c_{nm}(q)A_{mq}(t)$，$\sum_m c_{nm}(q)B_{mq}(t)$ 等で表せる（もちろん，実数解は $c_{nm}(q)=\delta_{nm}$ に対応する）．関数 $A(\boldsymbol{x},t)$，$B(\boldsymbol{x},t)$ は実数なので，式（5.2.1）の複素共役をとって積分変数を $\boldsymbol{q}$ から $-\boldsymbol{q}$ に変えれば，次の実数条件が導かれる．

$$\sum_n \alpha_n^*(\boldsymbol{q})c_{nm}(q) = \alpha_m(-\boldsymbol{q})\,. \tag{5.2.9}$$

したがって以下の結果を得る．

$$\langle \alpha_n(\boldsymbol{q})\alpha_m(\boldsymbol{q}')\rangle = \sum_l \mathcal{P}_{nl}(q)c_{lm}(q)\delta^3(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}')\,.$$

次にテンソルモードを考えよう．テンソルモードはトレースも発散もゼロの対称テンソル $D_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ で完全に決まる（非等方ストレステンソル $\pi^T_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ は独立な自由度ではなく，6.6 節で見るように $\dot{D}_{ij}$ の線形汎関数，より詳しくいえば $\dot{D}_{ij}$ を非斉次項に持つ線形積分方程式の解である）．D_{ij} をフーリエ積分の形で書けば，

$$D_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \int d^3q\; e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathcal{D}_{ij}(\boldsymbol{q},t)\,, \tag{5.2.10}$$

そしてフーリエ変換の係数 $\mathcal{D}$ は以下の条件を満たさなくてはいけない．

$$\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}_{ji}\,,\quad \mathcal{D}_{ii}=0\,,\quad q_i\mathcal{D}_{ij}=0\,. \tag{5.2.11}$$

ある波数ベクトル $\boldsymbol{q}$ が与えられたとき，これらの条件をすべて満たす独立な行列は 2 つしかない．例として $\boldsymbol{q}$ を 3 軸方向に取れば，式（5.2.11）から，

$$\mathcal{D}_{11} = -\mathcal{D}_{22}\,,\quad \mathcal{D}_{12}=\mathcal{D}_{21}\,,\quad \mathcal{D}_{i3}=\mathcal{D}_{3i}=0 \tag{5.2.12}$$

が要請されるから，$\mathcal{D}_{ij}$ の全成分は 2 つの独立成分 $\mathcal{D}_{11}$，$\mathcal{D}_{12}$ で書ける（これらの独立成分はよく $h^+=\mathcal{D}_{11}$，$h^\times=\mathcal{D}_{12}$ として表される）．3 軸まわりに角度 θ だけ回転させたとき，$\mathcal{D}_{ij}$ がどのように変換されるかを調べることで可能な $\mathcal{D}_{ij}$ の取り方を分類するのが便利である[*1]．そのような回転変換に対して $\mathcal{D}_{ij}$ は，

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{11} &\longrightarrow \cos^2\theta\,\mathcal{D}_{11} + \cos\theta\,\sin\theta\,\mathcal{D}_{12} + \sin\theta\,\cos\theta\,\mathcal{D}_{21} + \sin^2\theta\,\mathcal{D}_{22}\\
&\quad = \cos 2\theta\,\mathcal{D}_{11} + \sin 2\theta\,\mathcal{D}_{12},\\
\mathcal{D}_{12} &\longrightarrow \cos^2\theta\,\mathcal{D}_{12} - \cos\theta\,\sin\theta\mathcal{D}_{11} + \sin\theta\,\cos\theta\,\mathcal{D}_{22} - \sin^2\theta\,\mathcal{D}_{21}\\
&\quad = -\sin 2\theta\,\mathcal{D}_{11} + \cos 2\theta\,\mathcal{D}_{12}
\end{aligned}$$

[*1] たとえば G&C の 10.2 節を見よ．

のように変換する．よりコンパクトな形に書けば，

$$\mathcal{D}_{11} \mp i\mathcal{D}_{12} \longrightarrow e^{\pm 2i\theta}\Big[\mathcal{D}_{11} \mp i\mathcal{D}_{12}\Big] . \tag{5.2.13}$$

この結果から，線形結合 $\mathcal{D}_{11} \mp i\mathcal{D}_{12}$ は**ヘリシティ** ± 2 を持つという（ヘリシティ λ を持つ波は，波の進行方向に平行で大きさが $\hbar\lambda$ に等しい角運動量ベクトルを持つ量子からなる）．$\mathcal{D}_{ij}(\boldsymbol{q},t)$ を 2 つのヘリシティ状態の和として書けば，

$$\mathcal{D}_{ij}(\boldsymbol{q},t) = \sum_{\lambda=\pm 2} e_{ij}(\hat{q},\lambda)\,\mathcal{D}(\boldsymbol{q},\lambda,t) \tag{5.2.14}$$

となる．$\boldsymbol{q}$ を 3 軸方向に取れば，テンソル e_{ij} の成分は以下のように書ける．

$$e_{11}(\hat{z},\pm 2) = -e_{22}(\hat{z},\pm 2) = \mp i e_{12}(\hat{z},\pm 2) = \mp i e_{21}(\hat{z},\pm 2) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$e_{i3} = e_{3i} = 0. \tag{5.2.15}$$

任意の方向の $\hat{q}$ に対する $e_{ij}(\hat{q},\pm 2)$ は，3 軸を $\hat{q}$ の方向に移す回転行列をそれぞれの添字 i，j に作用させることで得られる．

$\boldsymbol{q}$ を 3 軸方向に取ると，線形結合 $\mathcal{D}_{11}(\boldsymbol{q},t) \mp i\mathcal{D}_{12}(\boldsymbol{q},t)$ は $\mathcal{D}(\boldsymbol{q},\pm 2,t)$ に比例する．式（5.2.13）で与えられる変換則に従えば，$\boldsymbol{q}$ の方向まわりの角度 θ の回転によって $\mathcal{D}(\boldsymbol{q},\pm 2,t)$ は因子 $\exp(\pm 2i\theta)$ だけ変化する．しかし，3 軸は何の特別な意味を持たないから，同じことがあらゆる方向の $\boldsymbol{q}$ に対して成り立つ．

式（5.2.14）の $\mathcal{D}(\boldsymbol{q},\lambda,t)$ は，λ に依存しない 2 階の微分方程式（5.1.53）のラプラシアン ∇^2 を $-q^2 \equiv -\boldsymbol{q}^2$ に替えたものに従う．

$$\ddot{\mathcal{D}}(\boldsymbol{q},\lambda,t) + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathcal{D}}(\boldsymbol{q},\lambda,t) + \frac{q^2}{a^2}\mathcal{D}(\boldsymbol{q},\lambda,t) = 16\pi G\,\pi^T(\boldsymbol{q},\lambda,t)\ , \tag{5.2.16}$$

ここで，$\pi^T(\boldsymbol{q},\lambda,t)$ は非等方ストレステンソルのテンソル型摂動成分のフーリエ変換である．

$$\pi^T_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\lambda=\pm 2}\int d^3q\; e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} e_{ij}(\hat{q},\lambda)\,\pi^T(\boldsymbol{q},\lambda,t). \tag{5.2.17}$$

既に述べたように $\pi^T(\boldsymbol{q},\lambda,t)$ は $\dot{\mathcal{D}}(\boldsymbol{q},\lambda,t)$ の線形汎関数であるが，その汎関数形はヘリシティに依存しない．したがって，非等方ストレスがない場合と同様に，2 つの独立解は（共通の規格化因子 β を除けば）λ にも $\boldsymbol{q}$ の方向にもよらない．2 つの独立解を添字 N で区別すれば，

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{q},\lambda,t)=\sum_N \beta_N(\boldsymbol{q},\lambda)\mathcal{D}_{Nq}(t)\,, \tag{5.2.18}$$

$$\pi^T(\boldsymbol{q},\lambda,t)=\sum_N \beta_N(\boldsymbol{q},\lambda)\pi^T_{Nq}(t)\,, \tag{5.2.19}$$

のように書ける．それぞれの独立解 $\mathcal{D}_{Nq}(t)$ の従う場の方程式は以下で与えられる．

$$\ddot{\mathcal{D}}_{Nq}(t)+3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathcal{D}}_{Nq}(t)+\frac{q^2}{a^2}\mathcal{D}_{Nq}(t)=16\pi G\,\pi^T_{Nq}(t)\,. \tag{5.2.20}$$

式（5.2.10），(5.2.14)，(5.2.18）をまとめて書けば，

$$D_{ij}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{N,\lambda}\int d^3q\;e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\,e_{ij}(\hat{q},\lambda)\,\beta_N(\boldsymbol{q},\lambda)\,\mathcal{D}_{Nq}(t) \tag{5.2.21}$$

が得られる．

規格化因子 $\beta_N(\boldsymbol{q},\lambda)$ は前述の $\alpha_n(\boldsymbol{q})$ のような確率変数である．確率分布関数の並進不変性から $\langle\beta_N(\boldsymbol{q},\lambda)\,\beta^*_{N'}(\boldsymbol{q}',\lambda')\rangle$ が $\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')$ に比例することが導かれる．さらに，$\boldsymbol{q}$ の方向まわりの角度 θ の回転に対して積 $\beta_N(\boldsymbol{q},\lambda)$ $\beta^*_{N'}(\boldsymbol{q},\lambda')$ は因子 $\exp\Big(i\theta(\lambda-\lambda')\Big)$ だけ変化するから，確率分布関数の回転不変性より $\langle\beta_N(\boldsymbol{q},\lambda)\,\beta^*_{N'}(\boldsymbol{q}',\lambda')\rangle$ が $\delta_{\lambda\lambda'}$ に比例することが導かれる．これからの議論のほとんどの場合において，確率分布関数は空間反転のオペレータ P に対しても不変であると仮定する．このオペレータは運動量ベクトルの方向を反転させるが角運動量ベクトルの方向は変えないため，ヘリシティの符号を替える．したがって，この仮定のもとでは因子 $\delta_{\lambda\lambda'}$ を除けば $\langle\beta_N(\boldsymbol{q},\lambda)\,\beta^*_{N'}(\boldsymbol{q}',\lambda')\rangle$ の値はヘリシティによらない[*2]．以上より，

$$\langle\beta_N(\boldsymbol{q},\lambda)\,\beta^*_{N'}(\boldsymbol{q}',\lambda')\rangle=\mathcal{P}^{\text{重力波}}_{NN'}(q)\,\delta_{\lambda\lambda'}\,\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') \tag{5.2.22}$$

が得られる．回転不変性と並進不変性により，スカラーモードとテンソルモードの規格化因子には相関がないことが導かれる．

$$\langle\beta_N(\boldsymbol{q},\lambda)\,\alpha^*_n(\boldsymbol{q}')\rangle=0\,. \tag{5.2.23}$$

スカラーモードの場合と同様，$\mathcal{P}^{\text{重力波}}_{NN'}(q)$ が $\delta_{NN'}$ に比例するように 2 つの独立なテンソルモードを選ぶことができる．しかし，テンソルモードのどの線形結合がこ

---

*2　確率分布関数が CP（C は電荷を反転させるオペレータ）に対して不変であると仮定しても同じ結果が導かれる．自然界は P に対しても C に対しても不変ではないが，CP 不変性は P 不変性と比べて良い近似となっている．積 CPT（T は時間の方向を反転させるオペレータ）はあらゆる量子場の理論で成り立つ厳密な対称性であるが，T 不変性は宇宙膨張によって破られている．

の性質を持つかを判定するには，初期条件が従う確率分布関数を知る必要がある．

2 つのテンソル型摂動の積の平均値は式（5.2.21），(5.2.22）によって以下のように与えられる．

$$\langle D_{ij}(\boldsymbol{x},t)D_{kl}(\boldsymbol{y},t)\rangle = \sum_{NN'}\int d^3q\,\mathcal{P}^{\text{重力波}}_{NN'}(q)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \times \varPi_{ij,k\ell}(\hat{q})\mathcal{D}_{Nq}(t)\mathcal{D}^*_{N'q}(t), \tag{5.2.24}$$

ここで[*3]，

$$\begin{aligned}\varPi_{ij,k\ell}(\hat{q}) &\equiv \sum_\lambda e_{ij}(\hat{q},\lambda)\,e^*_{k\ell}(\hat{q},\lambda)\\ &= \delta_{ik}\delta_{j\ell}+\delta_{i\ell}\delta_{jk}-\delta_{ij}\delta_{k\ell}+\delta_{ij}\hat{q}_k\hat{q}_\ell+\delta_{k\ell}\hat{q}_i\hat{q}_j\\ &\quad -\delta_{ik}\hat{q}_j\hat{q}_\ell-\delta_{i\ell}\hat{q}_j\hat{q}_k-\delta_{jk}\hat{q}_i\hat{q}_\ell-\delta_{j\ell}\hat{q}_i\hat{q}_k+\hat{q}_i\hat{q}_j\hat{q}_k\hat{q}_\ell\end{aligned} \tag{5.2.25}$$

である．7.4 節で式（5.2.24）と（5.2.3）を宇宙マイクロ波背景放射に適用する．

5.4 節で，非等方ストレス π_{Nq} は（共動的でないという意味の）物理的波数 q/a が膨張率 $\dot{a}/a$ よりもずっと小さいときには無視できることを示す．この場合，1 つのテンソルモードだけが重要となる．非等方ストレスがなく，$q/a \ll H$ の極限での重力波の方程式（5.2.20）は以下で与えられる．

$$\ddot{\mathcal{D}}_{Nq}(t)+3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathcal{D}}_{Nq}(t)=0\ .$$

解は，

$$\mathcal{D}_{1q}(t)=1\ ,\quad \mathcal{D}_{2q}(t)=\int_t^\infty \frac{dt'}{a^3(t')}$$

で与えられる．(2 つ目の解の積分は収束する．放射優勢期には $a(t)\propto t^{1/2}$ で，物質優勢期と真空エネルギー優勢期には $a(t)$ はより速く増加するからである．）十分時間が経てば $\mathcal{D}_{2q}(t)\to 0$ であるから，一般的な初期条件に対して重力波は 1 つ目の解に支配されることになる．したがってこの場合，式（5.2.24）のような対の平均値を計算するには $\mathcal{P}^{\text{重力波}}_{11}(q)$ のみがわかれば良い．他のやり方として，$\mathcal{D}_{1q}(t)$ を 1 に規格化せずに $\mathcal{D}^o_q$ に規格化し（添字 o は「ホライズンの外（outside of horizon)」を表す），$\mathcal{P}^{\text{重力波}}_{11}(q)=1$ と選ぶこともできる．5.4 節で同様な議論がスカラーモードにも適用できることを学ぶ．

---

*3　この $\varPi_{ij,k\ell}(\hat{q})$ の公式を得るには，以下の条件を用いれば良い．$\varPi_{ij,k\ell}(\hat{q})$ は $\hat{q}$ から作ることのできる 4 階のテンソルで i，j および k，ℓ に関して対称であり，かつ $\varPi_{ij,k\ell}(\hat{q})=\varPi^*_{k\ell,ij}(\hat{q})$，$\hat{q}_i\varPi_{ij,k\ell}(\hat{q})=0$ を満たす．これらの条件より $\varPi_{ij,k\ell}(\hat{q})$ が式（5.2.25）の右辺の量に比例することが示される．比例定数を決めるには $\hat{q}$ を 3 軸方向に取って i，j，k，ℓ をすべて 1 にした後に式（5.2.15）を用いれば良い．

5.3 ゲージを選ぶ

5.1 節で導いた方程式系は，2 つの点においてまだ満足のいくものではない．1 つは，方程式をスカラー，ベクトル，テンソルモードに分解した後でさえ，スカラーモードの方程式が非常に複雑なことである．もう 1 つは，これらの方程式の解の中に，物理的でないスカラーモードやベクトルモードが含まれていることである．これらの非物理的な解は，摂動を含まないロバートソン–ウォーカー計量やエネルギー–運動量テンソルの単なる座標変換に対応している．摂動を含む全計量とエネルギー–運動量テンソルに適当な条件を課し，座標系を固定することで 2 つ目の問題は除去でき，1 つ目の問題も改善することができる．本節では座標に依存する摂動 $A(\boldsymbol{x},t)$，$B(\boldsymbol{x},t)$ 等を扱うが，ラプラシアンを $-q^2$ に置き換えれば，同じ議論がそのままフーリエ成分 $A_{nq}(t)$，$B_{nq}(t)$ 等にも適用できる．

次の時空座標変換を考えよう．

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)\,, \tag{5.3.1}$$

ここで，$\varepsilon^\mu(x)$ は小さい（$h_{\mu\nu}$ や $\delta\rho$ 等の摂動が小さいというのと同じ意味で小さい）．この座標変換によって計量テンソルは以下のように変換される．

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\lambda\kappa}(x)\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}\,. \tag{5.3.2}$$

この座標変換では，場の摂動のみならず摂動を含まない場も変換される．このような変換よりも，**ゲージ変換**と呼ばれるものを用い，場の摂動のみを変換した方が見通しが良くなる場合がある．この目的のため，式（5.3.1）で与えられる座標変換を行った後，座標のラベルを張り替えてプライム記号を外し，$g_{\mu\nu}(x)$ に生じたすべての変化を摂動 $h_{\mu\nu}(x)$ に生じた変化だとみなすことにする．このゲージ変換 $h_{\mu\nu}(x) \to h_{\mu\nu}(x) + \Delta h_{\mu\nu}(x)$，

$$\Delta h_{\mu\nu}(x) \equiv g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) \tag{5.3.3}$$

のもとで場の方程式は不変に保たれ，摂動を含まないロバートソン–ウォーカー計量 $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ も不変に保たれる．その他の摂動のゲージ変換に関しても同様となる．式（5.3.3）を $\varepsilon(x)$ と $h_{\mu\nu}(x)$ の 1 次までテイラー展開すれば，

$$\Delta h_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x') - \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}\varepsilon^\lambda(x) - g_{\mu\nu}(x)$$

$$= -\bar{g}_{\lambda\mu}(x)\frac{\partial\varepsilon^{\lambda}(x)}{\partial x^{\nu}} - \bar{g}_{\lambda\nu}(x)\frac{\partial\varepsilon^{\lambda}(x)}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\bar{g}_{\mu\nu}(x)}{\partial x^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda}(x) \tag{5.3.4}$$

を得る．成分ごとに詳しく書けば，

$$\Delta h_{ij} = -\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\varepsilon_j}{\partial x^i} + 2a\dot{a}\delta_{ij}\varepsilon_0, \tag{5.3.5}$$

$$\Delta h_{i0} = -\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial t} - \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x^i} + 2\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon_i, \tag{5.3.6}$$

$$\Delta h_{00} = -2\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} \tag{5.3.7}$$

を得る．すべての量は，時空上の同じ**座標点**で計算される．添字はロバートソン–ウォーカー計量を用いて上げ下げし，$\varepsilon_0 = -\varepsilon^0$，$\varepsilon_i = a^2\varepsilon^i$ となる．さて，ゲージ変換に対して場の方程式を不変に保つには，同じゲージ変換をすべてのテンソル量に施さなくてはならない．エネルギー–運動量テンソルは次のように変換される．$\delta T_{\mu\nu}(x) \to \delta T_{\mu\nu}(x) + \Delta\delta T_{\mu\nu}(x)$．ここで $\Delta\,\delta T_{\mu\nu}$ は式（5.3.4）に似た以下の式で与えられる[*1]．

$$\Delta\,\delta T_{\mu\nu} = -\bar{T}_{\lambda\mu}(x)\frac{\partial\varepsilon^{\lambda}(x)}{\partial x^{\nu}} - \bar{T}_{\lambda\nu}(x)\frac{\partial\varepsilon^{\lambda}(x)}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\bar{T}_{\mu\nu}(x)}{\partial x^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda}(x)\,. \tag{5.3.8}$$

成分ごとに詳しく書けば，

$$\Delta\,\delta T_{ij} = -\bar{p}\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial x^j} + \frac{\partial\varepsilon_j}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(a^2\bar{p}\right)\delta_{ij}\varepsilon_0\,, \tag{5.3.9}$$

$$\Delta\,\delta T_{i0} = -\bar{p}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial t} + \bar{\rho}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x^i} + 2\bar{p}\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon_i\,, \tag{5.3.10}$$

$$\Delta\,\delta T_{00} = 2\bar{\rho}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} + \dot{\bar{\rho}}\varepsilon_0 \tag{5.3.11}$$

である．ここで，（クロネッカーのデルタ記号 δ_{ij} を除く）δ は摂動量であることを示す記号，Δ はゲージ変換によって摂動に生じる変化量を示す記号として用いている．

5.1 節で導入したスカラー型，ベクトル型，テンソル型摂動を用いてゲージ変換を書き下すため，ε^{μ} の空間成分をスカラー量の空間微分，および発散がゼロのベクトル量に分解する．

$$\varepsilon_i = \partial_i\varepsilon^S + \varepsilon_i^V\,, \quad \partial_i\varepsilon_i^V = 0\,. \tag{5.3.12}$$

すると，式（5.3.5）–（5.3.7）と式（5.3.9）–（5.3.11）で与えられる変換則により，

[*1] 式（5.3.4）と（5.3.8）はそれぞれ計量とエネルギー–運動量テンソルの**リー微分**として知られている．リー微分に関しては G&C の 10.9 節と 12.3 節を見よ．

(5.1.31)–(5.1.33) で定義される計量の摂動は以下のようにゲージ変換される.

$$
\begin{aligned}
&\Delta A=\frac{2\dot{a}}{a}\varepsilon_0\,, \quad \Delta B=-\frac{2}{a^2}\varepsilon^S\,, \\
&\Delta C_i=-\frac{1}{a^2}\varepsilon_i^V\,, \quad \Delta D_{ij}=0\,, \quad \Delta E=2\dot{\varepsilon}_0\,, \\
&\Delta F=\frac{1}{a}\left(-\varepsilon_0-\dot{\varepsilon}^S+\frac{2\dot{a}}{a}\varepsilon^S\right)\,, \quad \Delta G_i=\frac{1}{a}\left(-\dot{\varepsilon}_i^V+\frac{2\dot{a}}{a}\varepsilon_i^V\right).
\end{aligned}
\tag{5.3.13}
$$

式 (5.1.39)–(5.1.41) で定義される圧力, エネルギー密度, 速度ポテンシャルの摂動は, ゲージ変換のもとで以下のように変換される.

$$
\Delta\delta p=\dot{\bar{p}}\varepsilon_0\,, \quad \Delta\delta\rho=\dot{\bar{\rho}}\varepsilon_0\,, \quad \Delta\delta u=-\varepsilon_0\,. \tag{5.3.14}
$$

エネルギー–運動量テンソルのその他の成分はゲージ不変量である.

$$
\Delta\pi^S=\Delta\pi_i^V=\Delta\pi_{ij}^T=\Delta\delta u_i^V=0\,. \tag{5.3.15}
$$

特に, 完全流体の条件 $\pi^S=\pi_i^V=\pi_{ij}^T=0$, および速度場がポテンシャル流 (渦のない流れ) である条件 $\delta u_i^V=0$ はそのままでゲージ不変である.

場の方程式がゲージ不変であるためには, 場の方程式に現れるあらゆる量が変換されなくてはならない. たとえば, すべての 4 元スカラー量 $s(x)$ は任意の 4 次元座標変換のもとで $s'(x')=s(x)$ のように値を変えないが, ゲージ変換のもとでは次のように変換される, $\Delta\,\delta s(x)\equiv s'(x)-s(x)=s'(x)-s'(x')$. 摂動の 1 次まで展開すれば,

$$
\Delta\,\delta s(x)=s(x)-s(x')=-\frac{\partial\bar{s}(t)}{\partial x^\mu}\varepsilon^\mu(x)=\dot{\bar{s}}(t)\varepsilon_0\,. \tag{5.3.16}
$$

この変換則は, たとえば数密度 n やスカラー場 φ に適用される. 完全流体の p と ρ はスカラー量として定義できるから, 式 (5.3.14) で与えられる δp と $\delta\rho$ のゲージ変換は式 (5.3.16) の特殊な場合である. 同様に, 式 (5.3.14) で与えられる完全流体の δu のゲージ変換は, ベクトル量 u_μ のゲージ変換則から導くことができる. $\delta\rho$, δp, δu のゲージ変換則は保存則によらないので, 式 (5.3.14) や (5.3.15) は宇宙のあらゆるエネルギー要素に個別に適用できる. つまり, エネルギー–運動量テンソルは宇宙の異なる要素の和で書けるが, ゲージ変換則は (たとえ個々の要素が単独では保存しない場合にも) 個々の要素に個別に適用できる.

ゲージを選ぶ自由度はゲージ不変量のみを扱うことで除去できる[*2]し, もちろんゲージを選ぶことでも除去できる. 式 (5.1.53) のテンソル型摂動 π_{ij}^T, D_{ij}

[*2] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980).

は既にそのままでゲージ不変なので，ゲージを選ぶ必要はないし，そもそもゲージを選ぶ自由度がない．ベクトル型摂動 π_i^V，δu_i^V，C_i，G_i に対しては，式 (5.1.50)–(5.1.52) をゲージ不変量 π_i^V，δu_i^V，$\tilde{G}_i \equiv G_i - a\dot{C}_i$ で書き表すか，ε_i^V を C_i や G_i がゼロになるように選んでゲージを固定すればよい．(5.1 節で，非等方ストレスがない場合，ベクトル量 $\tilde{G}_i$ は $1/a^2$ に比例して減少することを学んだ.）スカラー型摂動の場合，ゲージを固定してしまう方がゲージ不変量で方程式を書き換えるよりも便利である．よく使われるゲージには以下のものがある．

ニュートンゲージ

このゲージでは $B=0$ となるように ε^S を選び，その後 $F=0$ となるように ε_0 を選ぶ．どちらの量も唯一に決まるので，ニュートンゲージを選べばゲージ自由度は残らない．このゲージでは，E と A を以下のように書き表すのが慣例となっている．

$$E \equiv 2\Phi\,, \quad A \equiv -2\Psi\,. \tag{5.3.17}$$

すると（スカラー型摂動だけを考えれば）計量の成分は以下のように書ける．

$$g_{00} = -1 - 2\Phi\,, \quad g_{0i} = 0\,, \quad g_{ij} = a^2\delta_{ij}[1-2\Psi]\,. \tag{5.3.18}$$

重力場の方程式 (5.1.44)–(5.1.47) は，

$$-4\pi G a^2\left[\delta\rho - \delta p - \nabla^2\pi^S\right] = a\dot{a}\dot{\Phi} + (4\dot{a}^2 + 2a\ddot{a})\Phi - \nabla^2\Psi + a^2\ddot{\Psi} + 6a\dot{a}\dot{\Psi}\,, \tag{5.3.19}$$

$$-8\pi G a^2\partial_i\partial_j\pi^S = \partial_i\partial_j[\Phi - \Psi]\,, \tag{5.3.20}$$

$$4\pi G\, a\,(\bar{\rho}+\bar{p})\partial_i\delta u = -\dot{a}\partial_i\Phi - a\partial_i\dot{\Psi}\,, \tag{5.3.21}$$

$$4\pi G\left(\delta\rho + 3\delta p + \nabla^2\pi^S\right) = +\frac{1}{a^2}\nabla^2\Phi + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + 3\ddot{\Psi} + \frac{6\dot{a}}{a}\dot{\Psi} + \frac{6\ddot{a}}{a}\Phi \tag{5.3.22}$$

で与えられ，運動量保存則の式 (5.1.48) とエネルギー保存則の式 (5.1.49) は（波数がゼロのフーリエ成分を除けば），

$$\delta p + \nabla^2\pi^S + \partial_0[(\bar{\rho}+\bar{p})\delta u] + \frac{3\dot{a}}{a}(\bar{\rho}+\bar{p})\delta u + (\bar{\rho}+\bar{p})\Phi = 0\,, \tag{5.3.23}$$

$$\delta\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho + \delta p) + \nabla^2\left[a^{-2}(\bar{\rho}+\bar{p})\delta u + \frac{\dot{a}}{a}\pi^S\right] - 3(\bar{\rho}+\bar{p})\dot{\Psi} = 0 \tag{5.3.24}$$

で与えられる．特に，式（5.3.20）から，Φ と Ψ は物理的に独立な場ではないことがわかる．これらの量は非等方ストレスの分だけ異なり，完全流体 $\pi^S = 0$ の場合には厳密に等しくなる．粒子数が保存する粒子を考えると，その数密度の摂動は式（5.1.55）を満たす．この式はニュートンゲージでは以下のように書ける．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta n}{\bar{n}}\right) + \frac{1}{a^2}\nabla^2 \delta u - 3\dot{\Psi} = 0\,. \tag{5.3.25}$$

p と ρ を関係づける状態方程式（あるいは，p が n のような別の量にも依存するなら，それらを関係づける方程式）が与えられ，かつ π^S と他の摂動量を関係づける線形方程式（たとえば完全流体の場合の $\pi^S = 0$）が与えられれば，式（5.3.21），(5.3.23)，(5.3.24)（もし必要であれば式（5.3.25）も）をそれぞれ Ψ, δu, $\delta\rho$ の運動方程式とみなすことができる．Φ は式（5.3.20）を用いて Ψ で書くことができる．残りの方程式は，この連立微分方程式系の解に対する束縛条件を与える．式（5.3.19）の両辺に $3/a^2$ をかけて式（5.3.22）から引き，式（5.3.20）と（5.3.21）を用いて π^S と Φ を消去すれば以下の式を得る*2.

$$a^3\delta\rho - 3Ha^3(\bar{\rho}+\bar{p})\delta u - \left(\frac{a}{4\pi G}\right)\nabla^2\Psi = 0\,. \tag{5.3.26}$$

これは運動方程式ではなく束縛条件である．運動方程式（5.3.21），(5.3.23)，(5.3.24）から式（5.3.26）の左辺は時間によらないことが示せるから，式（5.3.26）は初期条件で満たされていれば良い．

同期ゲージ

このゲージでは $E = 0$ となるように ε_0 を選び，その後 $F = 0$ となるように ε^S を選ぶ．スカラー型摂動だけを考えれば，計量の成分は以下のように書ける．

$$g_{00} = -1\,, \quad g_{0i} = 0\,, \quad g_{ij} = a^2\left[(1+A)\delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j}\right]. \tag{5.3.27}$$

このゲージでは，アインシュタインの場の方程式（5.1.44）–(5.1.47）は，

$$-4\pi G a^2\left[\delta\rho - \delta p - \nabla^2\pi^S\right] = \frac{1}{2}\nabla^2 A - \frac{1}{2}a^2\ddot{A} - 3a\dot{a}\dot{A} - \frac{1}{2}a\dot{a}\nabla^2\dot{B}, \tag{5.3.28}$$

$$-16\pi G a^2 \pi^S = A - a^2\ddot{B} - 3a\dot{a}\dot{B} \tag{5.3.29}$$

$$8\pi G\, a\,(\bar{\rho}+\bar{p})\delta u = a\dot{A}\,, \tag{5.3.30}$$

$$-4\pi G\left(\delta\rho + 3\delta p + \nabla^2\pi^S\right) = \frac{3}{2}\ddot{A} + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{A} + \frac{1}{2}\nabla^2\ddot{B} + \frac{\dot{a}}{a}\nabla^2\dot{B} \tag{5.3.31}$$

で与えられ，運動量保存則の式（5.1.48）とエネルギー保存則の式（5.1.49）は，

$$\delta p + \nabla^2 \pi^S + \partial_0[(\bar{\rho} + \bar{p})\delta u] + \frac{3\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{p})\delta u = 0\,, \tag{5.3.32}$$

$$\delta\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho + \delta p) + \nabla^2\left[a^{-2}(\bar{\rho} + \bar{p})\delta u + \frac{\dot{a}}{a}\pi^S\right] + \frac{1}{2}(\bar{\rho} + \bar{p})\partial_0\left[3A + \nabla^2 B\right] = 0 \tag{5.3.33}$$

で与えられる．

このゲージでは，非完全流体の運動方程式（ナヴィエ–ストークス方程式）に対応する運動量保存則の式（5.3.32）が，計量の摂動に依存しないことに注目しよう．一方，エネルギー保存則の式（5.3.33）は以下のようにも書ける．

$$\delta\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho + \delta p) + \nabla^2\left[a^{-2}(\bar{\rho} + \bar{p})\delta u + \frac{\dot{a}}{a}\pi^S\right] + (\bar{\rho} + \bar{p})\psi = 0, \tag{5.3.34}$$

ここで，

$$\psi \equiv \frac{1}{2}[3\dot{A} + \nabla^2\dot{B}] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{ii}}{2a^2}\right) \tag{5.3.35}$$

とする．個々の粒子の運動を解くには A と B をそれぞれ個別に解く必要があるが，完全流体，あるいは非完全流体への重力場の影響を解くには ψ のみがわかれば良い．場の方程式（5.3.31）をよく見ると，実は ψ に関する微分方程式になっていることがわかる．

$$-4\pi G\, a^2\left(\delta\rho + 3\delta p + \nabla^2\pi^S\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(a^2\psi\right). \tag{5.3.36}$$

また，同期ゲージでは粒子数保存の式（5.1.55）は以下で与えられる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta n}{\bar{n}}\right) + a^{-2}\nabla^2\delta u + \psi = 0\,. \tag{5.3.37}$$

p と ρ（必要であれば n も）を関係づける状態方程式が与えられ，かつ π^S と他のスカラー型摂動量を関係づける線形方程式が与えられれば，式（5.3.32），(5.3.34)，(5.3.36)（もし必要であれば式（5.3.37）も）を用いて 3 つの独立な摂動量 δu, $\delta\rho$, ψ の解をそれぞれ求めることができる．残りの式（5.3.28）–(5.3.30）は，5.1 節で述べた理由——エネルギーと運動量保存則はアインシュタインの場の方程式から導けるので，式（5.3.28）–(5.3.33）は独立ではないこと——により必要ない．

もし A と B を別個に求める必要があれば，ψ と $\delta\rho$ から求めれば良い．式（5.3.28）の両辺に 3 をかけたもの，式（5.3.29）の両辺にラプラシアンを作用さ

せて 1/2 をかけたもの，および式（5.3.31）の両辺に a^2 をかけたものをすべて加えれば，以下の単純な関係式，

$$\nabla^2 A = -8\pi G a^2 \delta\rho + 2Ha^2\psi \tag{5.3.38}$$

が得られる．ここで，いつものように $H \equiv \dot{a}/a$ である．このようにして A を求めれば，式（5.3.35）を解くことで A と ψ から B が求まる．

同期ゲージは，早いうちから宇宙論的摂動の進化の研究で広く使われていた．それはリフシッツによる 1946 年の先駆的な仕事に始まる[*3]．しかし，1980 年代に入って同期ゲージは人気がなくなった．というのも，バーディーンが指摘したように[*2]，$E = F = 0$ という条件を課した後でもまだゲージ自由度が残ることがわかったためである．式（5.3.13）より，ゲージ変換，

$$\varepsilon_0(\boldsymbol{x}, t) = -\tau(\boldsymbol{x}) \ , \quad \varepsilon^S(\boldsymbol{x}, t) = a^2(t)\tau(\boldsymbol{x}) \int a^{-2}(t)\, dt \tag{5.3.39}$$

は E も F も変化させないことが示せる．ここで，$\tau(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の任意関数で，t には依存しない．しかし，この変換によって A と B は変化する．

$$\Delta A = -\frac{2\dot{a}\tau}{a} \ , \quad \Delta B = -2\tau \int a^{-2}(t)\, dt \ . \tag{5.3.40}$$

特に，式（5.3.35）で与えられる A と B の組み合わせは以下のように変化する．

$$\Delta\psi = -3\tau \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - a^{-2}\nabla^2\tau \ . \tag{5.3.41}$$

さらに，エネルギー密度，圧力，速度ポテンシャルの摂動に生じる変化は式（5.3.14）と（5.3.39）から，

$$\Delta\delta p = -\dot{\bar{p}}\tau \ , \quad \Delta\delta\rho = -\dot{\bar{\rho}}\tau \ , \quad \Delta\delta u = \tau \tag{5.3.42}$$

と与えられる．π^S はゲージ不変である．同じ変換則が，宇宙のすべてのエネルギー要素に個別に適用できる．数密度の摂動 δn やスカラー場の摂動 $\delta\varphi$ のようなスカラー型摂動は，圧力やエネルギー密度の摂動と同様に変換される．

$$\Delta\delta s = -\dot{\bar{s}}\tau \ . \tag{5.3.43}$$

このゲージ変換に対し，式（5.3.28）–（5.3.34）と式（5.3.37）のすべてが不変に保たれることをチェックしてみてほしい．このため，これらの方程式系に解 ψ，δp，$\delta\rho$，δu，δn 等が見つかれば，$\psi + \Delta\psi$，$\delta p + \Delta\delta p$，$\delta\rho + \Delta\delta\rho$，$\delta u + \Delta\delta u$，$n + \Delta\delta n$

[*3] E. Lifshitz, *J. Phys. USSR* **10**, 116 (1946). G&C の 15.10 節も見よ．

等もまた解となる．場の方程式は線形なので，これはつまり $\Delta\psi$，$\Delta\delta p$，$\Delta\delta\rho$，$\Delta\delta u$，$\Delta\delta n$ 等もそれ自身が解であることを意味する．(π^S はゲージ不変なので，これらの解には含まれない.）これは困る．なぜなら，場の方程式の解を見つける度に，その解がゲージによるまやかしではなく，物理的に意味のある解であることをチェックし続けなければならないからだ．

しかし，もし残ったゲージ自由度を何らかの自然な方法で取り除くことができれば，問題は解決する．もし宇宙が（冷たい暗黒物質のような）光速度よりもずっと小さな速度で運動する粒子からなる流体を含んでいれば，以下のようにしてこの問題を解決できる．この流体のエネルギー–運動量テンソルの空間成分 T_D^{ij} は無視できるので，この流体に対する運動量保存則の式（5.3.32）で $\bar{p}_D = 0$，$\bar{\rho}_D \propto a^{-3}$，$\delta p_D = \pi_D^S = 0$ とすることができる．すると δu_D が時間に依存しないことが示せる．式（5.3.42）（この式は宇宙の各要素に個別に適用できる）によれば，**時間に依存しない**速度ポテンシャル δu_D は，同期ゲージに残された自由度を用い，$\tau = -\delta u_D$ とすることで常に取り除くことができる．こうしてゲージが曖昧さなしに決まる．これらの性質により，同期ゲージは，冷たい暗黒物質が重要な役割を果たすようになる宇宙論的摂動の進化の後期を追うのにとても便利なゲージとなる．

ニュートンゲージと同期ゲージの間の変換

後に見るように，宇宙のある時期における摂動の進化の解析にはニュートンゲージが便利で，他の時期には同期ゲージが便利である．これら異なる時期の結果をつなぐには，一方のゲージからもう一方のゲージへ移る方法を学んでおく必要がある[*4]．

まずはニュートンゲージから出発しよう．無限小の座標変換 $x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu$ を施し，ベクトル型摂動が現れないように $\varepsilon_i = \partial_i \varepsilon^S$ とする．式（5.3.13）と（5.3.17）より，同期ゲージの条件 $E = 0$ を得るには，

$$\dot{\varepsilon}_0 = -\Phi \tag{5.3.44}$$

が必要となる．次に式（5.3.13）より，$F = 0$ を得るには次の式を解かなくてはならないことがわかる．

---

*4 たとえば，C.-P. Ma, E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995) を見よ．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon^S}{a^2}\right) = -\frac{\varepsilon_0}{a^2} \ . \tag{5.3.45}$$

同期ゲージにおける計量の空間成分 A, B は式（5.3.13）と（5.3.17）から次のように与えられる．

$$A = -2\Psi + 2H\varepsilon_0 \ , \quad B = -\frac{2}{a^2}\varepsilon^S \ , \tag{5.3.46}$$

もちろん $H \equiv \dot{a}/a$ である．特に，場 ψ は，

$$\psi = -3\dot{\Psi} + 3\frac{\partial}{\partial t}\Big(H\,\varepsilon_0\Big) + \frac{\nabla^2\varepsilon_0}{a^2} \tag{5.3.47}$$

で与えられる．さらに，式（5.3.14）を用いれば同期ゲージでの圧力の摂動 δp^s，エネルギー密度の摂動 $\delta\rho^s$，速度ポテンシャル δu^s がニュートンゲージの量 δp，$\delta\rho$，δu から求まり，以下の結果を得る．

$$\delta p^s = \delta p + \varepsilon_0\dot{\bar{p}} \ , \quad \delta\rho^s = \delta\rho + \varepsilon_0\dot{\bar{\rho}} \ , \quad \delta u^s = \delta u - \varepsilon_0 \ . \tag{5.3.48}$$

Φ が与えられれば，式（5.3.44）から ε_0 を計算でき，Ψ が与えられれば式（5.3.47）から ψ が，そして式（5.3.48）から同期ゲージにおける圧力，エネルギー密度，速度ポテンシャルの摂動が求まる．ただし，式（5.3.44）は ε_0 を唯一に決めることはできず，時間によらない位置のみの関数を加える自由度を残す．したがって，同期ゲージの摂動量の値 A，B，ψ，$\tilde{p}$，$\tilde{\rho}$，$\delta\tilde{u}$ は式（5.3.40）–（5.3.42）で与えられる変換の自由度を残す．

次に，同期ゲージから出発し，計量の摂動場 A，B をニュートンゲージの場に変換する．式（5.3.13）より，計量 g_{ij} を δ_{ij} に比例する形にするには以下の条件が必要となる．

$$\varepsilon^S = a^2 B/2 \ . \tag{5.3.49}$$

そして，$g_{i0} = 0$ を保つには，式（5.3.13）より，

$$\varepsilon_0 = -a^2\dot{B}/2 \tag{5.3.50}$$

が必要となる．再び式（5.3.13）を用い，式（5.3.17）で与えられるニュートンゲージの摂動の定義を思い出せば，以下の結果を得る．

$$\Phi = \dot{\varepsilon}_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(a^2\dot{B}\Big) \ , \tag{5.3.51}$$

$$\Psi = -\frac{1}{2}\left(A + \frac{2\dot{a}}{a}\varepsilon_0\right) = -\frac{1}{2}A + \frac{a\dot{a}}{2}\dot{B} \ . \tag{5.3.52}$$

さっきの場合とは異なり，式（5.3.51）と（5.3.52）は Φ と Ψ を唯一に決める．それだけでなく，もととなる A と B が式（5.3.40）で与えられるゲージ自由度で変化しても，Φ と Ψ は影響を受けないことが示せる．

他のゲージ

計量テンソルの摂動量に制限をつけるだけがゲージを選ぶ唯一の道ではない[*5]．代わりに，いくつかのゲージ条件を用いてエネルギー–運動量テンソルの摂動量に制限をつけることができる．たとえば，**共動ゲージ**では $\delta u = 0$ となる（この条件により，スカラー型摂動の場合は速度場の摂動 δu^i がゼロとなる）ように ε_0 を選ぶ．よくあるインフレーション理論のモデルのように「物質」が一種類しか存在せず，それがスカラー場の場合を例にとろう．このゲージにおける時間座標は，あらゆる時刻のスカラー場の値が摂動を含まない場の値と等しくなるように定義されている．したがって物理的なすべての摂動は計量の摂動に押し込められている[*6]．**一定密度ゲージ**では，$\delta\rho = 0$ となるように ε_0 を選ぶ．どちらの場合でも，ε_0 を選んだ後，ε^S をうまく選ぶことで F をゼロにできるから，スカラー型摂動は $g_{i0} = 0$ を満足する．ただし，この処方箋は ε_0 を完全に決めるが，ε^S は完全に決まらず，$a^2(t)\tau(\boldsymbol{x})$ という形の項を加えるゲージ自由度が残る．これは同期ゲージが持つ欠点と同様である．

5.4 地平線の外側での保存

10 章で議論するように，我々が観測する宇宙のゆらぎは，初期宇宙のインフレーション期に量子ゆらぎとして生成されたものだと考えられている．ゆらぎが生成された初期宇宙と，それよりもずっと後の，我々がゆらぎを観測する時期の間には，ゆらぎの進化を記述する方程式が良く理解されていない時期がある．たとえば，インフレーションが終わると「再加熱」と呼ばれる時期がある．そこでは真空のエネルギーが通常の物質と放射に転化されるが，宇宙の再加熱中にどの粒子が最初に生成されたか，あるいはどのようにしてエネルギーが転化されたかに関しては，まったく何もわかっていない．その後，おそらくある種の粒子は他

[*5] 様々なゲージが，H. Kodama, M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78**, 1 (1984) で議論されている．

[*6] たとえば，このゲージは，J. Maldacena, *J. High Energy Phys.* **0305**, 013 (2003) [astro-ph/0210603] により，宇宙論的な相関関数の非ガウス分布的補正を計算するのに使われた．

の物質や放射と相互作用するのをやめ，現在冷たい暗黒物質として観測されるものとなったと考えられるが，それがいつ，どのように起こったのかに関しても，推測するしかない．

このような不定性があるにも関わらず，我々が観測するゆらぎの性質をインフレーション理論を用いて予言することができる．予言が可能な理由は，興味あるゆらぎの波長が，インフレーションが終わる時刻よりもずっと前の時期から比較的現在に近い時期（よってその間には再加熱の時期や冷たい暗黒物質の脱結合の時期を含む）に至るまで地平線の外側にあるためである．つまりこの期間中，興味あるゆらぎの物理的な波数 q/a は宇宙の膨張率 $H \equiv \dot{a}/a$ よりもずっと小さい．インフレーション中，q/a はほぼ指数関数的に減少する一方で H はほぼ一定なので，すべてのゆらぎの波数が最初は $q/a \gg H$ であったとしても，極端に短波長のゆらぎを除けば，それらは最終的には $q/a \ll H$ となる．その後，a は放射優勢期で $t^{1/2}$ に比例して増加し，物質優勢期で $t^{2/3}$ に比例して増加するが，H は $1/t$ に比例して減少する．したがって，極端に長波長のゆらぎを除けば，インフレーションが終わった時刻に波数 $q/a \ll H$ を持っていたゆらぎは，最終的には再び $q/a \gg H$ を持つようになる．ゆらぎの波長が地平線の外側にある間，スカラー型摂動とテンソル型摂動はある保存則に従う．この保存則のおかげで，初期宇宙と現在をつなぐことができるのである．

以下で見るように，スカラーモードではニュートンゲージで定義される次の量[*1]，

$$\mathcal{R}_q \equiv -\Psi_q + H\delta u_q \tag{5.4.1}$$

が，ある状況下において保存量となる．(δu は全エネルギー–運動量テンソルの速度ポテンシャルであることに注意しよう.) 形は違うが $\mathcal{R}$ に等価な保存量がもう 1 つあり[*2]，

$$\zeta_q \equiv -\Psi_q + \frac{\delta\rho_q}{3(\bar{\rho}+\bar{p})} \tag{5.4.2}$$

[*1] $\mathcal{R}$ が一定となることは，様々な特殊なケースにおいて，J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980); D. H. Lyth, *Phys. Rev. D* **31**, 1792 (1985) によって指摘されていた．このトピックに関するレビューは，J. Bardeen, in *Cosmology and Particle Physics*, eds. Li-zhi Fang, A. Zee, Gordon & Breach (1988); A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large Scale Structure*, Cambridge University Press (2000) を見よ．

[*2] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **28**, 679 (1983)．この量は，D. Wands, K. A. Malik, D. H. Lyth, A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **62**, 043527 (2000) によって再導入された．

と定義される．この量は，式（5.3.26）で与えられる束縛条件によれば，$\mathcal{R}_q$ と以下のように関係している．

$$\zeta_q = \mathcal{R}_q - \frac{q^2 \Psi_q}{12\pi G(\bar{\rho}+\bar{p})a^2} \,. \tag{5.4.3}$$

両者の相対的な違いは $(q/aH)^2$ 程度の大きさなので，$\mathcal{R}_q$ が地平線の外（$q/a \ll H$）で保存すれば，ζ_q もまた保存する．

以下で示すように，脚注 1 の文献で導入された $\mathcal{R}_q$ の重要性は，単一のスカラー場で引き起こされるインフレーション中，地平線の外側で保存量となることである．しかし，それだけでは十分ではない．インフレーション終了後，宇宙はたくさんの種類の物質や放射で満たされるから，そのような状況下でも $\mathcal{R}_q$ が地平線の外側で保存するかどうかは自明ではない．我々が本当に必要なのは，宇宙のエネルギー要素が何であっても，地平線の外側で保存する $\mathcal{R}_q$ や ζ_q が常に場の方程式の解であることを保証する定理である．そのような解は，後に述べる理由から「断熱的」であるといわれる．もし宇宙論的ゆらぎがインフレーション中に断熱的な解で記述されれば，インフレーションが終わった後もずっと断熱的な解で記述でき，ゆらぎが地平線の外側にある限り $\mathcal{R}_q$ と ζ_q は一定となる．なぜなら，この解はあらゆる状況化で解となるからである．

この結果（および対応するテンソルモードに対する結果）は以下の定理に含まれている[*3]．すなわち宇宙のエネルギー要素が何であっても，独立で，物理的で，かつ断熱的なスカラー型摂動の解が2つ存在する．ニュートンゲージで書かれた場の方程式では，$q/a \ll H$ の極限で摂動量 $\mathcal{R}_q$ が時間に依存しなくなる．さらに，$q/a \ll H$ の極限で時間に依存しないテンソル型摂動の解 $\mathcal{D}_q$ が 1 つ存在する．この極限では，スカラーモードの解の 1 つは $\mathcal{R}_q \neq 0$ を持ち，計量のスカラー型摂動は以下で与えられる．

$$\Phi_q(t) = \Psi_q(t) = \mathcal{R}_q \left[-1 + \frac{H(t)}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^{t} a(t')\, dt' \right] . \tag{5.4.4}$$

あらゆる 4 元スカラー量 $s(x)$（エネルギー密度，圧力，インフレーションを起こすスカラー場等）は以下で与えられる．

$$\delta s_q(t) = -\frac{\mathcal{R}_q\, \dot{\bar{s}}(t)}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^{t} a(t')\, dt' . \tag{5.4.5}$$

---

*3　S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **67**, 123504 (2003) [astro-ph/0302326]. S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **69**, 023503 (2004) [astro-ph/0306304] の付録も見よ．

速度ポテンシャルの摂動は以下で与えられる．

$$\delta u_q(t) = \frac{\mathcal{R}_q}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^{t} a(t')\, dt' \,. \tag{5.4.6}$$

ここで $\mathcal{T}$ は任意の初期時刻で，上記の積分すべてにおいて同じ値を持つ．もう 1 つの解は $\mathcal{R}_q = 0$ で，そのときのスカラーモードは，

$$\Phi_q(t) = \Psi_q(t) = \frac{\mathcal{C}_q H(t)}{a(t)} \,, \quad \delta s_q(t) = -\frac{\mathcal{C}_q\, \dot{\bar{s}}(t)}{a(t)} \,, \quad \delta u_q(t) = \frac{\mathcal{C}_q}{a(t)} \tag{5.4.7}$$

で与えられ，$\mathcal{C}_q$ は時間に依存しない定数である．$q/a \ll H$ の極限では，たとえ粒子の平均自由時間がハッブル時間と同程度であっても，断熱的スカラーモード，および保存するテンソルモードの両方において非等方ストレスの成分 π^S_q，$\pi^V_{i\,q}$，$\pi^T_{ij\,q}$ がゼロとなる．ニュートンゲージはゲージ自由度を残さないので，これらの解はゲージモードではなく，物理的なスカラーモードとテンソルモードの解である．

この定理の証明は，以下の知見に基づいている．空間的に一様な宇宙という特殊な場合では，摂動を含まない計量が持つ対称性に**属さない**座標変換に対してでさえ，ニュートンゲージの場の方程式と物質や放射の進化の方程式（および空間的に一様であるという条件）は不変に保たれる[*4]．ニュートンゲージにおける計量の 1 次のスカラー型摂動，およびテンソル型摂動が空間的に一様な場合，計量の摂動は以下のように書ける．

$$h_{00} = -2\Phi(t) \,, \quad h_{i0} = 0 \,, \quad h_{ij} = -2\delta_{ij} a^2(t)\Psi(t) + a^2(t) D_{ij}(t) \,,$$

ここで D_{ij} は条件 $D_{ii} = 0$ を満たす．空間一様性より，圧力，密度，速度ポテンシャル等もすべて時間のみの関数となる．これらの空間的に一様な摂動で書かれたニュートンゲージの場の方程式は，式（5.3.4）–（5.3.7）や式（5.3.14）–（5.3.16）で与えられるゲージ変換のうち，ニュートンゲージの条件と空間一様性の条件を変えない限定的な変換に対し，不変に保たれなければならない．式（5.3.7）より，h_{00} を空間的に一様に保つには ε_0 は，

$$\varepsilon_0(\boldsymbol{x}, t) = \varepsilon(t) + \chi(\boldsymbol{x})$$

という形で書け，したがって，

*4　この側面において，ここで与える定理は量子場の理論におけるゴールドストン定理に似ている．ゴールドストン定理に関しては，J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **9**, 154 (1961); J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962) を見よ．$\mathcal{R}_q$ や $\mathcal{D}_q$ が地平線の外で一定となるモードは，ゴールドストン定理でいえば長波長で自由粒子となる南部–ゴールドストン・ボソンに対応する．

$$\Delta\Phi = \dot{\varepsilon}$$

であることが導かれる．式（5.3.6）より，h_{i0} をゼロに保つには ε_i は以下の形で書かれる．

$$\varepsilon_i(\boldsymbol{x},t) = a^2(t) f_i(\boldsymbol{x}) - a^2(t)\frac{\partial\chi(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\int\frac{dt}{a^2(t)} \ .$$

すると式（5.3.5）より以下の表式を得る．

$$\Delta h_{ij} = -a^2\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} + \frac{\partial f_j}{\partial x^i}\right) + 2\delta_{ij} a\dot{a}\Big[\varepsilon + \chi\Big] + 2a^2\frac{\partial^2\chi}{\partial x^i\,\partial x^j}\int\frac{dt}{a^2} \ .$$

h_{ij} が $\boldsymbol{x}$ に依存しないためには，χ は定数でなければならない．その場合，χ を ε に吸収することで消去できる．また，定数行列 ω_{ij} を用いて f_i は $f_i(\boldsymbol{x}) = \omega_{ij}x^j$ の形に書ける．（f_i に $\boldsymbol{x}$ に依存しない項があったとしても，それは計量やその他あらゆる摂動に影響を与えないため，無視して良い.）したがって以下の表式を得る．

$$\Delta h_{ij} = -a^2[\omega_{ij} + \omega_{ji}] + 2\delta_{ij} a\dot{a}\varepsilon \ .$$

これを式（5.1.33）と比べれば（そしてニュートンゲージの条件 $B = C_i = 0$，$A = -2\Psi$ を用いれば），

$$\Delta h_{ij} = -2a^2\delta_{ij}\Delta\Psi + a^2\Delta D_{ij}$$

を得る．Δh_{ij} の中で δ_{ij} に比例する項，およびトレースがゼロの項を対応させれば，以下の結果を得る．

$$\Delta\Psi = \frac{1}{3}\omega_{ii} - H\varepsilon \ ,$$

$$\Delta D_{ij} = -\omega_{ij} - \omega_{ji} + \frac{2}{3}\delta_{ij}\omega_{kk} \ .$$

（摂動を含まない計量は座標の 3 次元回転に対して不変なので，ω_{ij} の反対称部分は何の影響も与えない.）エネルギー–運動量テンソルに現れる量，および一般のスカラー量のゲージ変換は式（5.3.14）–（5.3.16）で与えられる．$\{h_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}\}$ と $\{h_{\mu\nu} + \Delta h_{\mu\nu}, T_{\mu\nu} + \Delta T_{\mu\nu}\}$ はともに場の方程式と保存則の式の解なので，両者の差もまた解である．したがって，ニュートンゲージの場の方程式と保存則の式には，以下で与えられる空間的に一様なスカラー型摂動の解が存在すると結論できる．

$$\Psi = H\varepsilon - \omega_{ii}/3\ , \quad \Phi = -\dot{\varepsilon}, \tag{5.4.8}$$

$$\delta p = -\dot{\bar{p}}\varepsilon\ , \quad \delta\rho = -\dot{\bar{\rho}}\varepsilon\ , \quad \delta u = \varepsilon\ , \quad \pi^S = 0. \tag{5.4.9}$$

より一般的には，あらゆる 4 元スカラー量 s に対し，以下が成り立つ．

$$\delta s = -\dot{\bar{s}}\varepsilon\ . \tag{5.4.10}$$

（すべての空間微分を無視すれば，式（5.4.8）–(5.4.10）で与えられる摂動の解がニュートンゲージの場の方程式（5.3.19）–(5.3.22)，保存則の式（5.3.23）–(5.3.24）と（5.3.25)，および束縛条件の式（5.3.26）を満たすことが示せる.）さらに，空間的に一様なテンソル型摂動の解が存在し，

$$D_{ij} \propto \omega_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\omega_{kk}\ , \quad \pi^T_{ij} = 0 \tag{5.4.11}$$

で与えられる.（これが式（5.1.53）の解となることは自明であるが，D_{ij} が一定のとき，π^T_{ij} を決める方程式が $\pi^T_{ij} = 0$ を与えるのはそれほど自明ではない．これは粒子の衝突率が H と同程度の大きさになっても成り立つ.）最後に，式（5.4.8）–(5.4.11）は，摂動のフーリエ変換で波数がゼロの成分の解にもなっている．

さて，これまでのところ ε は時間の任意関数で，ω_{ij} は任意の 3×3 の定数行列である．しかし，これらの解は単に波数がゼロのモードが持つゲージ自由度にすぎない．一方，ニュートンゲージは波数がゼロのモード以外にはゲージ自由度を残さないから，もしこれらの解がゼロでない波数にまで拡張できれば，物理的なモードだということになる．テンソルモードの場合には何の問題もない．この場合には波数がゼロのときに場の方程式が $0=0$ とならないので，時間によらない D_{ij} の解は自動的に波数がゼロでない物理的なモードに拡張できる．しかし，スカラーモードの場合，事情はもっと込み入っている．

スカラーモードでは場の方程式（5.3.20）が波数がゼロの極限で $0=0$ となってしまうので，物理的なモードを取り出すには摂動に以下の条件を課せばよい．

$$\Phi = \Psi\ . \tag{5.4.12}$$

（式（5.3.21）が $q\neq 0$ で成り立つための条件 $\delta u = \varepsilon$ は式（5.4.9）によって既に満足されている.）式（5.4.8）を式（5.4.12）に代入すれば，ε に関する微分方程式として，

$$\dot{\varepsilon} = -H\varepsilon + \omega_{kk}/3 \tag{5.4.13}$$

を得る．また，Ψ の式（5.4.8）と δu の式（5.4.9）から，式（5.4.1）で定義される $\mathcal{R}$ が時間によらない値，

$$\mathcal{R} = \omega_{kk}/3 \tag{5.4.14}$$

を持つことが導ける．$\mathcal{R} \neq 0$ のとき，式（5.4.13）で与えられる $\varepsilon(t)$ の一般解は，

$$\varepsilon(t) = \frac{\mathcal{R}}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^{t} a(t')\,dt', \tag{5.4.15}$$

ここで $\mathcal{T}$ は任意の定数を表す．式（5.4.15）を式（5.4.8）に用いれば，長波長極限の解の具体的な表式（5.4.4）として以下を得る．

$$\Psi = \Phi = \mathcal{R}\left[-1 + \frac{H(t)}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^{t} a(t')\,dt'\right]. \tag{5.4.16}$$

式（5.4.9）からは，

$$\frac{\delta p}{\dot{\bar{p}}} = \frac{\delta\rho}{\dot{\bar{\rho}}} = -\delta u = -\frac{\mathcal{R}}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^{t} a(t')\,dt' \tag{5.4.17}$$

が得られる．より一般的な 4 元スカラー量の解（式（5.4.10））は以下で与えられる．

$$\frac{\delta s}{\dot{\bar{s}}} = -\frac{\mathcal{R}}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^{t} a(t')\,dt'. \tag{5.4.18}$$

あらゆる $\mathcal{T}$ に対して式（5.4.15）は式（5.4.13）の解であり，その際 $\mathcal{R}$ は同じ値を持つ．異なる $\mathcal{T}$ を持つ解の差もまた解であるが，そのときには $\mathcal{R} = 0$ である．つまり，$\mathcal{R} = 0$ のときの式（5.4.13）の解は，

$$\varepsilon(t) = \frac{\mathcal{C}}{a(t)} \tag{5.4.19}$$

で，$\mathcal{C}$ はもう 1 つの定数，そして，

$$\Psi = \Phi = \frac{\mathcal{C}H(t)}{a(t)}, \tag{5.4.20}$$

$$\frac{\delta\rho}{\dot{\bar{\rho}}} = \frac{\delta p}{\dot{\bar{p}}} = -\delta u = \frac{\delta s}{\dot{\bar{s}}} = -\frac{\mathcal{C}}{a(t)} \tag{5.4.21}$$

を得る．宇宙の各々の要素に対しても同じ結果が成り立つ．($a(t)$ は時間とともに増加し $H(t)$ は時間とともに減少するからこの解は減衰モードで，大抵の場合は重要な役割を果たさないと仮定される.）さて，これまで見てきたスカラーモード

では，$\delta\rho_\alpha/\dot{\bar{\rho}}_\alpha$ が宇宙のすべての要素 α に対して同じ値を持つことに着目しよう．この関係式は，それぞれの要素のエネルギーが別個に保存しようがしまいが成り立つ．この理由から，これらのスカラー型摂動解は**断熱的**だと呼ばれている*5．同じ理由から，その他すべての解は**エントロピー的**だと呼ばれている（これらの解は等曲率モードと呼ばれることもあるが，この名称は誤解を招く．なぜなら，$\Phi = \Psi = 0$ としてしまうと大抵の場合は解がなくなってしまうからである）．

これまでに，波数が十分に小さいとき（つまり $q/a \ll H$ のとき），**物理的**かつ断熱的なスカラー型摂動の解が常に 2 つ存在することを示した．それらは式 (5.4.16)–(5.4.18)，あるいは式 (5.4.20)–(5.4.21) で与えられ，任意の定数 $\mathcal{R}$，あるいは $\mathcal{C}$ を持つ．また，テンソル型摂動の物理的な解は式 (5.4.11) で与えられ，任意の定数行列 ω_{ij} を持つ．我々が解いた方程式は斉次方程式であるから，同じ形を持ち，時間に依存しないが q に依存する $\mathcal{R}$，$\mathcal{C}$，ω_{ij} の解もまた存在する．これで証明完了である*6．

もし，インフレーション中に生成された摂動がインフレーションの終了時に上記の解（断熱的な解）で記述されるならば，定理により，これらの摂動は地平線の外にいる限り断熱的であり続ける．特に，これらの解は宇宙の要素が何であろうが解であるから，$\mathcal{R}_q$ と $\mathcal{D}_q$ はずっと一定であり続ける．我々が現在興味のあるゆらぎの波長は，インフレーション終了後に生じたと考えられる宇宙の再加熱の時期には地平線よりもずっと外側にあるから，インフレーション終了時にスカラー型摂動が断熱的であれば，その後の再加熱によってエントロピー的な摂動が

---

*5 たとえば，（電子–陽電子プラズマと光子のような）複数の要素それぞれが持つ密度や圧力が，（たとえ摂動がある場合にも）温度のみに依存するならば，$\delta\rho_\alpha(T) = \rho'_\alpha(T)\delta T$ かつ $d\bar{\rho}_\alpha(T)/dt = \rho'_\alpha(T)\dot{T}$ であり，したがって $\delta\rho_\alpha/\dot{\bar{\rho}}_\alpha = \delta T/\dot{T}$ となる．同様のことが圧力やその他すべてのスカラー量にもあてはまる．

*6 エネルギー密度，圧力等のすべての 4 元スカラー量 s に対して $\delta s_q/\dot{\bar{s}}$ が等しくなるような解の存在自体は，長年に渡って知られていたようである（ただし式 (5.4.4)–(5.4.7) で与えられる詳細な解は導かれていなかった）．宇宙のあらゆる要素 α に対して $\delta\rho_{\alpha q}/\dot{\bar{\rho}}_\alpha$ が等しくなるような解の存在を示唆する，直観的な「セパレート宇宙」論が，D. H. Lyth, D. Wands, *Phys. Rev. D* **68**, 103516 (2003) によって論じられている．D. Wands, K. A. Malik, D. H. Lyth, A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **62**, 043627 (2000); A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press (2000) も見よ．この論法は，D. H. Lyth, K. A. Malik, M. Sasaki, *J. Cosm. & Astropart. Phys.* **0505**, 004 (2005) [astro-ph/0411220] によって摂動論を超える領域まで拡張されている．しかしこの種の論法では，上記の条件を満たす解が波数がゼロのときに存在することしか示せていない．確かに，波数がゼロのときにはそのような解が無数に存在するが，既に見たように，そのような解のほとんどは波数がゼロでないモードに拡張できないため物理的ではない．本節で与えた証明によれば，ゼロでない波数に拡張できる解は 2 つしかなく，式 (5.4.4)–(5.4.7) で記述される．この要請より，「セパレート宇宙」論で波数がゼロの解を生成するのに使われる時間座標の無限小変換は，空間座標の無限小変換を伴わなければならないことが示される．

生成されることはない[*7].

この定理は，インフレーション中に生成されるスカラー型の摂動が，実際にインフレーション終了時に断熱的になっているかどうかは教えてくれない．この問題は，解の数を数える問題とみなすことができる[訳注 1]．スカラー型摂動を記述する微分方程式の解のうち，2つの独立解は常に断熱的であるから，**もしこれらの方程式の解の個数が2個以下であれば，すべての摂動は断熱的である**．10章で見るように，単一のスカラー場によって引き起こされるインフレーションでは，すべての解が断熱的となる．

しかし，もし宇宙マイクロ波背景放射の観測で最終散乱の時刻における摂動が断熱的であるとわかったとしても，インフレーション終了時の摂動が断熱的であったと結論してはならない．(3.3節で議論したような宇宙論的バリオン生成やレプトン生成の理論で大抵仮定されているように）完全な局所的熱平衡状態で，かつすべての保存量子数がゼロの状態が初期宇宙に存在すれば，スカラー量の自由度は温度と重力ポテンシャル $\Phi=\Psi$ の2つしかない．これらは1次の連立微分方程式で記述できるから，独立な解は2つしかなく，したがってこれらの解は断熱的でなければならない（なぜなら解の2つは常に断熱的であることによる）．ゆえに，インフレーション中に何が起ころうとも，その後の宇宙が十分に長い期間局所的熱平衡状態で，かつゼロでない保存量子数が存在しない状態にあれば，摂動は断熱的となり，その後は（たとえ局所熱平衡状態が終了した後でも）ずっと断熱的であり続ける[*8].

宇宙の異なる時期をつなぐ保存則は，ニュートンゲージでなくても使える．現に，ζ_q も $\mathcal{R}_q$ もゲージ不変な形に書ける．式 (5.3.13) と (5.3.14) を使えば $A/2-H\delta\rho/\dot{\bar\rho}$ と $A/2+H\delta u$ がゲージ不変であることが示せ，ニュートンゲージではこれらの量がそれぞれ式 (5.4.2) と (5.4.1) になることを示せるから，すべてのゲージで，

$$\zeta_q = A_q/2 - H\delta\rho_q/\dot{\bar\rho}\,, \quad \mathcal{R}_q = A_q/2 + H\delta u_q \tag{5.4.22}$$

となる．もちろん，この式中の A，$\delta\rho$，δu はすべて同じゲージで計算されなけれ

---

*7 S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **70**, 043541 (2004) (astro-ph/0401313).

訳注 1 方程式は決まった数の解を持つので，見つけた解の数がその数と等しければすべての解を見つけたことになる．

*8 S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **70**, 083522 (2004) (astro-ph/0405397).

ばならない．

たとえば，式（5.3.38）は同期ゲージで，

$$q^2 A_q = 8\pi G a^2 \delta\rho_q - 2Ha^2\psi_q \tag{5.4.23}$$

となるから，このゲージでの ζ_q と $\mathcal{R}_q$ は同期ゲージによく現れる便利な摂動場 ψ_q を用いて以下のように書ける．

$$\begin{aligned} q^2\zeta_q &= -a^2 H\psi_q + 4\pi G a^2\delta\rho_q - q^2 H\delta\rho_q/\dot{\bar{\rho}}, \\ q^2\mathcal{R}_q &= -a^2 H\psi_q + 4\pi G a^2\delta\rho_q + q^2 H\delta u_q \ , \end{aligned} \tag{5.4.24}$$

ここでもちろん，$\delta\rho_q$ と δu_q は同期ゲージで計算されなければならない．この結果は，式（5.4.1）と（5.4.2）で与えられる $\mathcal{R}_q$ と ζ_q のニュートンゲージの表式から出発して，5.3 節で導いたニュートンゲージから同期ゲージへの変換則を用いて導出することもできる．

宇宙論的摂動が断熱的であるかないかに関わらず $q/a \ll H$ の極限で一般的に成り立つ，ζ_q と $\mathcal{R}_q$ の変化率を記述する便利な公式がある．この式を導くため，ニュートンゲージでのエネルギー保存則の式（5.3.24）を用いる．$q/a \ll H$ では，

$$\delta\dot{\rho}_q + 3H(\delta\rho_q + \delta p_q) = 3(\bar{\rho} + \bar{p})\dot{\Psi}_q \tag{5.4.25}$$

と書ける．また，摂動を含まない保存則の式は，

$$\dot{\bar{\rho}} = -3H(\bar{\rho} + \bar{p}) \tag{5.4.26}$$

である．あとは簡単な計算から以下の結果を導けば良い．

$$\dot{\zeta}_q = \frac{\dot{\bar{\rho}}\delta p_q - \dot{\bar{p}}\delta\rho_q}{3(\bar{\rho} + \bar{p})^2} \ . \tag{5.4.27}$$

$q/a \ll H$ の極限では，$\dot{\mathcal{R}}_q$ も同じ式で与えられる．式（5.3.14）を使って右辺がゲージ不変になっていることを確認しておこう．これより，ζ_q や $\mathcal{R}_q$ が時間変化するか否かは，どのゲージでも $\dot{\bar{\rho}}\delta p_q - \dot{\bar{p}}\delta\rho_q$ を計算すればわかる．

特殊な場合として，任意の摂動に対し，もし $\bar{p} + \delta p$ が（摂動も含めた）エネルギー密度のみの関数 $F(\bar{\rho} + \delta\rho)$ で書けるなら，$\dot{\bar{p}} = F'(\bar{\rho})\dot{\bar{\rho}}$，および $\delta p_q = F'(\bar{\rho})\delta\rho_q$ となるから，式（5.4.27）の右辺の分子はゼロとなり，**たとえ摂動が断熱的でなくても** ζ_q と $\mathcal{R}_q$ は地平線の外で保存する[*9]．

式（5.4.27）の証明は式（5.4.25）と（5.4.26）で与えられるエネルギー保存則

の式のみを用いており，重力場の方程式によらない．したがって，もし宇宙のある要素 α がエネルギー的に孤立していれば，つまり宇宙の他の物質や放射とのエネルギーのやりとりがなければ，$q/a \ll H$ の極限において，孤立要素のエネルギー密度 ρ_α と圧力 p_α から計算できる以下の量，

$$\zeta_{\alpha q} \equiv -\Psi_q + \delta\rho_{\alpha q}/3(\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha) \tag{5.4.28}$$

が次のゲージ不変な関係式を満たす[*10]．

$$\dot{\zeta}_{\alpha q} = \frac{\dot{\bar{\rho}}_\alpha \delta p_{\alpha q} - \dot{\bar{p}}_\alpha \delta\rho_{\alpha q}}{3(\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha)^2} \ . \tag{5.4.29}$$

特に，孤立要素の圧力がその要素の（摂動も含む）エネルギー密度のみの関数で書けていれば，$\zeta_{\alpha q}$（および $\mathcal{R}_{\alpha q}$）は地平線の外で保存する[*11]．（6.1 節で見るように，宇宙の温度が 10^{10}K より低くなり，ニュートリノと反ニュートリノが物質や放射と相互作用をしなくなる頃には，宇宙の各々のエネルギー要素に対してこの保存則が良い近似で成り立っている．）この場合，式（5.4.28）は，ニュートンゲージにおける相対的な密度ゆらぎを地平線の外側で定義する便利な公式として使える．

$$\frac{\delta\rho_{\alpha q}}{3(\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha)} = \zeta_{\alpha q} + \Psi_q \ , \tag{5.4.30}$$

ここで $\zeta_{\alpha q}$ は時間によらない定数を表す．

同期ゲージでも，対応する結果が存在する．長波長の極限では，エネルギー的に孤立した宇宙の要素に対するエネルギー保存則の式（5.3.34）は以下の形で書ける．

$$\delta\dot{\rho}^s_{\alpha q} + 3H\Big(\delta\rho^s_{\alpha q} + \delta p^s_{\alpha q}\Big) + \Big(\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha\Big)\psi_q = 0. \tag{5.4.31}$$

ここで，上付きの添字 s は同期ゲージの量を表すものとする．さらに，p_α が無視できるか，あるいは ρ_α のみの関数だとすれば，この式は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\rho^s_{\alpha q}}{\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha}\right) = -\psi_q$$

[*9] （36 ページ）もし全圧力が全エネルギー密度のみの関数なら，3 本の 1 階微分方程式（5.3.21），（5.3.23），（5.3.24）は，$\Psi = \Phi$，δu，$\delta\rho$ に関して閉じた方程式系となる．式（5.3.26）は束縛条件を 1 つ与えるから独立解は 2 つしかないことになり，それらは式（5.4.4），（5.4.6），（5.4.7）で与えられる断熱的な解と同じ形を持つ．しかし，その他の摂動も含めた完全な解が断熱的であるとは限らない．なぜなら，（宇宙の各々の要素のエネルギー密度や圧力といった）他の 4 元スカラー量が式（5.4.9）で与えられるとは限らないからである．

[*10] S. Bashinsky, U. Seljak, *Phys. Rev. D* **69**, 083002 (2004) [astro-ph/0310198].

[*11] D. Wands *et al.*，脚注 2 を参照．

のように書き換えられ，以下の結果を得る．

$$\frac{\delta\rho^s_{\alpha q}}{\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha} = -\int \psi_q\, dt + c_{\alpha q}\ . \tag{5.4.32}$$

積分定数 $c_{\alpha q}$ は ψ_q の積分の下限値として何を選ぶかによっているが，その差は絶対的な意味を持っており，$\zeta_{\alpha q}$ の差と直接関係している．式（5.3.14）で与えられるゲージ変換，および孤立要素が満たすエネルギー保存則の式 $\dot{\bar{\rho}}_\alpha = -3H(\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha)$ を用いれば，エネルギーが個別に保存する 2 つの要素に対して以下の結果が得られる．

$$\frac{\delta\rho^s_{\alpha q}}{\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha} - \frac{\delta\rho^s_{\beta q}}{\bar{\rho}_\beta + \bar{p}_\beta} = \frac{\delta\rho_{\alpha q}}{\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha} - \frac{\delta\rho_{\beta q}}{\bar{\rho}_\beta + \bar{p}_\beta}. \tag{5.4.33}$$

式（5.4.30）と（5.4.33）を比べれば，

$$c_{\alpha q} - c_{\beta q} = 3\left(\zeta_{\alpha q} - \zeta_{\beta q}\right) \tag{5.4.34}$$

を得る．

特別な場合として断熱的な摂動を考えれば，式（5.4.9）から $\delta\rho_{\alpha q}/(\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha) = -3H\delta\rho_{\alpha q}/\dot{\bar{\rho}}_\alpha$，つまり $\zeta_{\alpha q}$ がすべての要素 α に対して等しく，それは実は ζ_q に等しいことが導ける．式（5.4.34）より，それはまた $c_{\alpha q}$ がすべて等しいことを意味する．宇宙マイクロ波背景放射を使えば，摂動が再び地平線の中に入ってくる時刻以前の $\zeta_{\alpha q}$ や $c_{\alpha q}$ の差を測定できる．それはすなわち，宇宙論的な摂動が真に断熱的がどうかを判別することになる．7.2 節で見るように，これまでのところ，確かに摂動は断熱的なようである．

第6章
宇宙論的ゆらぎの進化

これより，5 章で学んだ定式化を用い，宇宙論的なゆらぎの進化を追う．考慮する時期は，ニュートリノが物質と放射から脱結合し，電子–陽電子の対消滅がほぼ完了した時期（温度でいえば $\approx 10^9$ K）から，物質のゆらぎが 1 次の摂動論で記述できないくらい大きくなる比較的最近の時期までである．ここで得られる結果を，7 章で宇宙マイクロ波背景放射のゆらぎの計算に適用し，さらに 8 章で宇宙の大規模構造に適用する．

5.4 節で学んだように，この時期のゆらぎの進化とそれ以前の時期を結びつけているのは $\mathcal{R}_q$（あるいは ζ_q）を含む少数のパラメータである．これらのパラメータは，宇宙の様々な要素の摂動が地平線の外にある間は——つまり物理的な波数 q/a が宇宙の膨張率 $\dot{a}/a$ よりずっと小さい間は——宇宙がいくら膨張しようとも保存される．したがって，様々な摂動の強さを決めるのは，地平線の外側でのこれらのパラメータの値である．10 章では，より初期であるインフレーションの時期の研究からこれらのパラメータについて何がいえるかを学ぶ．そうすれば，大規模構造や宇宙マイクロ波背景放射のゆらぎの観測から，インフレーション期の物理に関して何がいえるのかが明らかとなるだろう．

6.1 節では，スカラー型摂動を記述する方程式を書き下す．これらの方程式は，冷たい暗黒物質とバリオンのプラズマに関しては単純な流体力学の方程式となるが，光子とニュートリノに関して高精度の計算をするには位相空間における分布関数の進化を記述するボルツマン方程式を解く必要がある[*1]．これらの方程式は

[*1] P. J. E. Peebles, J. T. Yu, *Astrophys. J.* **162**, 815 (1970); R. A. Sunyaev, Ya. B. Zel'dovich, *Astrophys. Space Sci.* **7**, 3 (1970).

複雑すぎて解析的に解くことができないので，CMBfast*2 や CAMB*3 といったコンピュータプログラムによる計算が必要となる．しかし，そのようなコンピュータによる計算結果は，物理過程を理解する目的には有用でない．したがって，本章では解析的に扱える流体近似を用いた計算を中心に行う．とはいえ，いくつかの数値積分は必要となる．流体近似は単純ではあるが，コンピュータによる正確な計算結果をほど良く再現できるという意味で現実的な近似となっている．

スカラー型摂動の解析的な扱いを記述する方程式，およびその初期条件は 6.2 節で与える．スカラー型摂動の解析的な扱いは摂動の波長領域によって異なり，以下の 2 つの領域に分けられる．6.3 節で扱うのは長波長領域，つまり物質優勢期になるまで地平線の内側に入ってこない摂動で，6.4 節で扱うのは短波長領域，つまり放射優勢期に地平線の内側に入ってくる摂動である．6.5 節では，長波長領域と短波長領域で得られた解をつなぐ方法を学ぶ．6.6 節ではテンソル型摂動の進化を扱う．

本章で得られたスカラー型摂動とテンソル型摂動の結果は，7 章において宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎと偏光に適用する．8 章では最終散乱の時刻以降の物質ゆらぎを扱い，宇宙における物質分布の観測に適用する．

6.1　スカラー型摂動——運動学的理論

e^+–e^- の対消滅の直後（宇宙の温度が $T \approx 10^9$ K 程度の時期）から $T \simeq 3000$ K の最終散乱の時刻までは，宇宙は主に 4 つの要素（光子，冷たい暗黒物質，ニュートリノ，そして自由電子，イオン，中性原子からなるバリオンプラズマ）で構成されていたと考えられている．そこで本節では，これら 4 つの要素それぞれのスカラー型摂動を順に追っていく．計算には 5.3 節で述べた同期ゲージを採用する．各々の摂動量 $X(\boldsymbol{x}, t)$（$\delta\rho$，δp，A，B 等に対応する）は，式（5.2.1）のようにフーリエ積分とモードに渡る和で書ける．

---

*2 CMBfast は光子とニュートリノのボルツマン方程式，およびその他の動力学方程式と重力場の方程式を解くコンピュータプログラムで，C.-P. Ma, E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995) [astro-ph/9506072] によって最初に書かれたプログラムに基づいている．その後，後に議論する重要な要素が，U. Seljak, M. A. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* **469**, 437 (1996).[astro-ph/9603033] によって追加された．M. Zaldarriaga, U. Seljak, E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **494**, 491 (1998); M. Zaldarriaga, U. Seljak, *Astrophys. J.* **129**, 431 (2000) も見よ．このプログラムは `lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_cmbfast_ov.cfm` からダウンロードできる．

*3 このプログラムは CMBfast に基づいており，アントニー・ルイスとアンソニー・チャリナーによって書かれた．`camb.info` からダウンロードできる．

$$X(\boldsymbol{x},t) = \sum_n \int d^3q\ \alpha_n(\boldsymbol{q})\, X_{nq}(t)\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\ , \tag{6.1.1}$$

ここで $\alpha_n(\boldsymbol{q})$ は n 番目のモードが持つ確率変数である．同期ゲージにおける計量の摂動は $\delta g_{00}=0$，$\delta g_{i0}=0$，および，

$$\delta g_{ij}(\boldsymbol{x},t) = a^2(t) \sum_n \int d^3q\ \alpha_n(\boldsymbol{q}) \left[A_{nq}(t)\delta_{ij} - q_i q_j B_{nq}(t)\right] e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{6.1.2}$$

で与えられる（q は共動的波数で，物理的波数 k との関係は $k=q/a$ である．a を現在の時刻で $a=1$ となるように定義するのが慣例となっているので，共動的波数は現在の物理的波数と等しい．その場合，共動的波数は単に k と書かれることが多い．本書では a の規格化を任意とし，k は常に物理的な波数 q/a を表すものとする）．本節では，モードを 1 つ 1 つ考え，添字 n を省く．これから導く方程式は多くの解を持ち，それらの解が様々なモードを定義する．

冷たい暗黒物質

冷たい暗黒物質の粒子は光速に比べてずっと小さな速度で運動すると仮定されているので，その圧力や非等方ストレスは無視できる．また，5.3 節で示したように，圧力や非等方ストレスがない場合には，冷たい暗黒物質の流体速度 u^i_D がゼロになるような特別な同期ゲージを選ぶことができる．これはつまり，暗黒物質の粒子が常に静止状態にあるような座標を選ぶことになる．(暗黒物質の粒子がその中を運動する）重力場の摂動があっても，このような座標を選ぶことができる．したがって，暗黒物質はその密度 $\bar\rho_D(t)+\delta\rho_D(\boldsymbol{x},t)$ のみで完全に記述できる．摂動を含まない部分 $\bar\rho_D(t)$ は単に $a^{-3}(t)$ に比例して減少し，摂動成分 $\delta\rho_D(\boldsymbol{x},t)$ のフーリエ変換はエネルギー保存則の式（5.3.34）で圧力も速度もゼロにしたもの，

$$\delta\dot\rho_{Dq} + 3H\delta\rho_{Dq} = -\bar\rho_D\psi_q \tag{6.1.3}$$

によって記述される（ここで $\psi_q \equiv (3\dot A_q - q^2\dot B_q)/2$ である）．

バリオンのプラズマ

電子と原子核との間のクーロン相互作用は十分に強いので，電子と原子核はまとめて単一の完全流体として振る舞う．いま興味ある時期では電子も原子核も非相対論的なので，バリオンプラズマの圧力と非等方ストレスも無視できる．したがって，摂動を含まない密度 $\bar\rho_B(t)$ は $a^{-3}(t)$ に比例して減少し，密度ゆらぎ $\delta\rho_B(\boldsymbol{x},t)$ のフーリエ変換はエネルギー保存則の式（5.3.34）によって記述される．

ただし，今回は速度ポテンシャル $\delta u_B(\boldsymbol{x}, t)$ はゼロでない．

$$\delta\dot{\rho}_{Bq} + 3H\delta\rho_{Bq} - (q^2/a^2)\bar{\rho}_B\delta u_{B\,q} = -\bar{\rho}_B\psi_q\ . \tag{6.1.4}$$

一方，バリオンプラズマと光子はトムソン散乱によって運動量をやり取りするので，運動量保存則の式（5.3.32）を満たすのは光子とバリオンプラズマを組み合わせたものである．

$$\delta p_{\gamma\,q} - q^2\pi^S_{\gamma\,q} + [\partial_0 + 3H]\left[\bar{\rho}_B\delta u_{B\,q} + \frac{4}{3}\bar{\rho}_\gamma\delta u_{\gamma\,q}\right] = 0\ , \tag{6.1.5}$$

ここで δp_γ は光子の圧力の摂動で，δu_γ は光子の速度ポテンシャルを表す．この式をバリオンプラズマの運動方程式とみなすことにしよう．光子に関する量 $\pi^S_{\gamma q}$，$p_{\gamma q}$，$\delta u_{\gamma q}$ は次の小節で計算する．

光子

電子と陽子の再結合の時刻よりずっと前の時期では，自由電子の密度が十分大きいため光子も流体力学的に扱うことができる．トムソン散乱により光子とバリオンプラズマは同じ速度場 $\delta u_{\gamma\,q} = \delta u_{B\,q}$ を持ち，またその運動量分布は粒子の共動座標系で等方的となるので，$\delta p_{\gamma\,q} = \delta\rho_{\gamma\,q}/3$，$\pi^S_{\gamma\,q} = 0$ となる．しかし，再結合の時刻付近での光子の振る舞いを高精度で扱おうとすれば，光子を（流体力学的ではなく）運動学的に扱い，光子の運動量空間の分布関数を光子の偏光も考慮して解かなくてはならない．付録 H で学ぶように，この分布関数はエルミート的な**数密度行列** $n^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$ で与えられる．この行列は，空間体積 $\prod_i dx^i$ と運動量空間の体積 $\prod_i dp_i$ 中にある光子の数を，光子が偏光ベクトル e^i を持つ確率で重みをつけて数えたものが $e_i e_j^* n^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)\prod_k dx^k dp_k$ となるように定義される．この行列は $p_i n^{ij} = 0$ を満たす．（偏光ベクトルは規格化条件 $g_{ij}e^i e^{j*} = 1$，横波条件 $p_i e^i = 0$，および $e_i \equiv g_{ik}e^k$ を満たす．偏光に関する詳しい議論は付録 G を見よ．）摂動が小さい場合には，この分布関数は以下のような便利な形に書ける．

$$n^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) = \frac{1}{2}\bar{n}_\gamma\Big(a(t)p^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)\Big)\left[g^{ij}(\boldsymbol{x}, t) - \frac{g^{ik}(\boldsymbol{x}, t)g^{jl}(\boldsymbol{x}, t)p_k p_l}{[p^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)]^2}\right] + \delta n^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)\ , \tag{6.1.6}$$

ここで，

$$p^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) \equiv \sqrt{g^{ij}(\boldsymbol{x}, t)p_i p_j} \tag{6.1.7}$$

である．$\bar{n}_\gamma(p)$ は熱平衡状態における光子の位相空間数密度で，

$$\bar{n}_\gamma(p) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\left[\exp\left(p/k_{\mathcal{B}}a(t)\bar{T}(t)\right) - 1\right]^{-1} , \tag{6.1.8}$$

$\bar{T}(t)$ は摂動を含まないバリオンプラズマの温度，δn^{ij} は小さな摂動を表す．式 (6.1.6) の 1 行目は，無偏光の光子が温度 $\bar{T}(t)$ の熱平衡状態にあるときに持つ分布関数行列である．これは一般座標系で書かれているので，計量の摂動が及ぼす純粋に幾何学的な効果は 1 行目に含まれる．したがって，2 行目の δ_n は光子の分布関数に対する動力学的な効果のみを表している．(式 (6.1.6) の $\bar{n}_\gamma$ の引数中の因子 $a(t)$ は式 (6.1.8) の $\bar{T}(t)$ にかかる因子 $a(t)$ で打ち消される．我々が興味ある時期には $\bar{T}(t) \propto a^{-1}(t)$ なので，定義通り，$\bar{n}_\gamma$ は時間に依存しない関数となっている．)

$e_i e_j^*$ を偏光状態に渡って和をとったものは g_{ij} になるから，光子の位相空間数密度は $g_{ij}n^{ij}$ で与えられる．ゆえに，光子のエネルギー–運動量テンソルは以下で与えられる．

$$T^{\mu}_{\gamma\,\nu} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\, g}}\int\left[\prod_{k=1}^{3} dp_k\right] g_{ij}n^{ij}\frac{p^\mu p_\nu}{p^0} . \tag{6.1.9}$$

式 (6.1.9) は，$p^i = g^{ij}p_j$，$p^0 = -p_0 = \sqrt{g^{ij}p_ip_j}$，計量の行列式 Det$g$，および $g_{ij}n^{ij}$ に含まれる計量 g_{ij} の摂動から生じる 1 次の摂動を含む．面倒だがさほど難しくない計算をすれば，実はこれらの計量の摂動から生じる $\delta T^{\mu}_{\gamma\,\nu}$ への寄与はすべて打ち消し合ってゼロになることが示せる．しかし，この結果は次のように考えることでより簡単に得られる．式 (6.1.9) を見ると，式 (6.1.6) の 1 行目から生じる $\delta T^{i}_{\gamma\,j}(\boldsymbol{x},t)$，$\delta T^{0}_{\gamma\,j}(\boldsymbol{x},t)$，$\delta T^{j}_{\gamma\,0}(\boldsymbol{x},t)$，$\delta T^{0}_{\gamma\,0}(\boldsymbol{x},t)$ への寄与は 3 次元計量 $g_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ の局所的な関数で，一般的な空間座標変換に対してそれぞれ 3 元混合テンソル，3 元共変ベクトル，3 元反変ベクトル，3 元スカラーのように変換する．しかし，空間座標変換に対してこのように変換する 3 元計量の局所的な関数は存在しない！ したがって，ゼロでない寄与は δn_γ^{ij} のトレース成分のみということになる．つまり，エネルギー–運動量テンソルの 1 次の摂動成分は以下のように与えられる．

$$\delta T^{i}_{\gamma\,j}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{a^4(t)}\int\left(\prod_{k=1}^{3} dp_k\right) a^2(t)\,\delta n_\gamma^{kk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\,\frac{p_ip_j}{\sqrt{p_kp_k}} , \tag{6.1.10}$$

$$\delta T^{0}_{\gamma\, j}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{a^3(t)} \int \left(\prod_{k=1}^{3} dp_k \right) a^2(t)\, \delta n^{kk}_{\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\, p_j \ , \tag{6.1.11}$$

$$\delta T^{0}_{\gamma\, 0}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{a^4(t)} \int \left(\prod_{k=1}^{3} dp_k \right) a^2(t)\, \delta n^{kk}_{\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) \sqrt{p_k p_k} \ . \tag{6.1.12}$$

見ればわかるように，これらの量を計算するには $\delta n^{kk}_{\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ を光子のエネルギーで重みをかけて積分すればよいことがわかる．そこで，以下のような**無次元強度行列** $J_{ij}(\boldsymbol{x},\hat{p},t)$ を定義する．

$$a^4(t)\, \bar{\rho}_{\gamma}(t)\, J_{ij}(\boldsymbol{x},\hat{p},t) \equiv a^2(t) \int_0^{\infty} \delta n^{ij}_{\gamma}(\boldsymbol{x},p\hat{p},t)\, 4\pi p^3\, dp \ , \tag{6.1.13}$$

ここで $\bar{\rho}_{\gamma}(t) \equiv a^{-4}(t) \int 4\pi p^3 \bar{n}_{\gamma}(p)\, dp$ は摂動を含まない光子のエネルギー密度を表す．これを用い，式（6.1.10）–（6.1.12）で与えられるエネルギー–運動量テンソルの成分を以下のように書き換える．

$$\delta T^{i}_{\gamma\, j}(\boldsymbol{x},t) = \bar{\rho}_{\gamma}(t) \int \frac{d^2\hat{p}}{4\pi} J_{kk}(\boldsymbol{x},\hat{p},t)\, \hat{p}_i \hat{p}_j \ , \tag{6.1.14}$$

$$\delta T^{0}_{\gamma\, j}(\boldsymbol{x},t) = a(t)\bar{\rho}_{\gamma}(t) \int \frac{d^2\hat{p}}{4\pi} J_{kk}(\boldsymbol{x},\hat{p},t)\, \hat{p}_j \ , \tag{6.1.15}$$

$$\delta T^{0}_{\gamma\, 0}(\boldsymbol{x},t) = -\bar{\rho}_{\gamma}(t) \int \frac{d^2\hat{p}}{4\pi} J_{kk}(\boldsymbol{x},\hat{p},t) \ . \tag{6.1.16}$$

付録 H の式（H.37）に示すように，摂動 δn^{ij} は次のボルツマン方程式に従う．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\, \delta n^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}_k}{a(t)} \frac{\partial\, \delta n^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial x^k} + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)}\, \delta n^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) \\
&\quad - \frac{1}{4a^2(t)} p \bar{n}'_{\gamma}(p) \hat{p}_k \hat{p}_l \frac{\partial}{\partial t}\Big(a^{-2}(t) \delta g_{kl}(\boldsymbol{x},t) \Big) \Big(\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j \Big) \\
&= -\omega_c(t)\, \delta n^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) + \frac{3\omega_c(t)}{8\pi} \int d^2\hat{p}_1 \\
&\quad \times \Big[\delta n^{ij}(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t) - \hat{p}_i \hat{p}_k\, \delta n^{kj}(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t) - \hat{p}_j \hat{p}_k\, \delta n^{ik}(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t) \\
&\qquad + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l\, \delta n^{kl}(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t) \Big] \\
&\quad - \frac{\omega_c}{2a^3} p_k \delta u_{Bk}\, \bar{n}'_{\gamma}(p) \Big(\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j \Big) \ ,
\end{aligned} \tag{6.1.17}$$

ここで $p \equiv \sqrt{p_i p_i}$，$\hat{p} \equiv \boldsymbol{p}/p$ で，$\omega_c(t)$ は光子とバリオンプラズマ中の電子との衝突率，δu_{Bk} はバリオンプラズマの特異速度を表す．式（6.1.17）の両辺に $4\pi p^3$ をかけて $p \equiv \sqrt{p_i p_i}$ に渡って積分し，

$$4\pi\int_0^\infty p^4\,\bar{n}'_\gamma(p)\,dp = -16\pi\int_0^\infty p^3\,\bar{n}_\gamma(p)\,dp = -4a^4(t)\rho_\gamma(t)$$

を用いれば，無次元強度行列を記述するボルツマン方程式を導くことができる．強度行列とプラズマ速度をフーリエ変換，

$$J_{ij}(\boldsymbol{x},\hat{p},t) = \int d^3q\; J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\;, \quad \delta u_{Bi}(\boldsymbol{x},t) = \int d^3q\;\delta u_{Bi}(\boldsymbol{q},t)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{6.1.18}$$

で書けば，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\, J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t)}{\partial t} + i\frac{\hat{p}\cdot\boldsymbol{q}}{a(t)}J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t) \\
&\quad + \alpha(\boldsymbol{q})\left[\dot{A}_q(t) - (\boldsymbol{q}\cdot\hat{p})^2\dot{B}_q(t)\right]\left(\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j\right) \\
&= -\omega_c(t)\,J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t) + \frac{3\omega_c(t)}{8\pi}\int d^2\hat{p}_1 \\
&\quad \times\Big[J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p}_1,t) - \hat{p}_i\hat{p}_k\,J_{kj}(\boldsymbol{q},\hat{p}_1,t) - \hat{p}_j\hat{p}_k\,J_{ik}(\boldsymbol{q},\hat{p}_1,t) \\
&\qquad + \hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_l\,J_{kl}(\boldsymbol{q},\hat{p}_1,t)\Big] \\
&\quad + \frac{2\omega_c(t)}{a(t)}\Big[\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j\Big]\hat{p}_k\delta u_{Bk}(\boldsymbol{q},t)
\end{aligned} \tag{6.1.19}$$

を得る．この結果を導く際，計量の摂動として式（5.3.27）と（6.1.2）を用いた．

強度行列とプラズマ速度は確率変数 $\alpha(\boldsymbol{q})$ に比例していて，この変数は初期条件に関するすべての情報を担っている．この変数を除けば特定の方向は現れないから，強度行列の $\alpha(\boldsymbol{q})$ の係数は 2 つの対称な 3 元テンソル $\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j$，および $\Big(\hat{q}_i - (\hat{q}\cdot\hat{p})\hat{p}_i\Big)\Big(\hat{q}_j - (\hat{q}\cdot\hat{p})\hat{p}_j\Big)$ に比例する項の和に分解できる．これらのテンソルは $\hat{p}_i$ や $\hat{p}_j$ と縮約を取ればゼロとなり，それらの係数はスカラー積 $\hat{q}\cdot\hat{p}$ を通してのみ $\hat{q}$ や $\hat{p}$ に依存する．この分解は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t) = \alpha(\boldsymbol{q})\Bigg\{&\frac{1}{2}\Big(\varDelta_T^{(S)}(q,\hat{q}\cdot\hat{p},t) - \varDelta_P^{(S)}(q,\hat{q}\cdot\hat{p},t)\Big)\Big(\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j\Big) \\
&+\varDelta_P^{(S)}(q,\hat{q}\cdot\hat{p},t)\left[\frac{\Big(\hat{q}_i - (\hat{q}\cdot\hat{p})\hat{p}_i\Big)\Big(\hat{q}_j - (\hat{q}\cdot\hat{p})\hat{p}_j\Big)}{1-(\hat{p}\cdot\hat{q})^2}\right]\Bigg\}\,.
\end{aligned} \tag{6.1.20}$$

（添字 T は P それぞれ「温度（temperature）」と「偏光（polarization）」を表す．エネルギー–運動量テンソルにはトレース J_{ii} しか現れず，それは $\varDelta_T^{(S)}$ にのみ

比例しているが，$\Delta_P^{(S)}$ は摂動の発展方程式を通じて $\Delta_T^{(S)}$ と結びついているため，$\Delta_P^{(S)}$ の発展もきちんと追わなければいけないことに注意しよう.）同様に，式（6.1.19）の右辺にある $\hat{p}$ に渡る積分は，以下のように「源泉関数」$\Phi(q,t)$, $\Pi(q,t)$ を用いて書ける.

$$\int \frac{d^2\hat{p}}{4\pi} J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t) = \alpha(\boldsymbol{q}) \left[\delta_{ij}\Phi(q,t) + \frac{1}{2}\hat{q}_i\hat{q}_j\Pi(q,t)\right] , \tag{6.1.21}$$

最後に，特異速度を速度ポテンシャル δu を用いて，

$$\delta u_{Bi}(\boldsymbol{q},t) = i\alpha(\boldsymbol{q})q_i\delta u_{B\,q}(t) \tag{6.1.22}$$

と書く．式（6.1.20）–(6.1.22）を式（6.1.19）に代入すれば，$\Delta_T^{(S)}$ と $\Delta_P^{(S)}$ が従うボルツマン方程式を導ける.

$$\begin{aligned}
&\dot{\Delta}_P^{(S)}(q,\mu,t) + i\left(\frac{q\mu}{a(t)}\right)\Delta_P^{(S)}(q,\mu,t) \\
&\quad = -\omega_c(t)\Delta_P^{(S)}(q,\mu,t) + \frac{3}{4}\omega_c(t)\,(1-\mu^2)\Pi(q,t)\,,
\end{aligned} \tag{6.1.23}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\Delta}_T^{(S)}(q,\mu,t) + i\left(\frac{q\mu}{a(t)}\right)\Delta_T^{(S)}(q,\mu,t) \\
&\quad = -\omega_c(t)\Delta_T^{(S)}(q,\mu,t) - 2\dot{A}_q(t) + 2q^2\mu^2\dot{B}_q(t) \\
&\qquad + 3\omega_c(t)\,\Phi(q,t) + \frac{3}{4}\omega_c(t)(1-\mu^2)\Pi(q,t) + 4i\left(\frac{q\mu}{a(t)}\right)\omega_c(t)\delta u_{B\,q}(t),
\end{aligned} \tag{6.1.24}$$

ここで Φ と Π は式（6.1.21）で与えられる.

これらのボルツマン方程式の解は，通常 $\Delta_T^{(S)}$ と $\Delta_P^{(S)}$ を部分波に展開して求められる*1.

$$\Delta_T^{(S)}(q,\mu,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{-\ell}(2\ell+1)\,P_\ell(\mu)\,\Delta_{T,\ell}^{(S)}(q,t), \tag{6.1.25}$$

$$\Delta_P^{(S)}(q,\mu,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{-\ell}(2\ell+1)\,P_\ell(\mu)\,\Delta_{P,\ell}^{(S)}(q,t). \tag{6.1.26}$$

これら部分波の振幅に関するボルツマン方程式を導く際，以下のルジャンドル級数の漸化式とルジャンドル級数の規格化条件を用いる.

*1 M. L. Wilson, J. Silk, *Astrophys. J.* **243**, 14 (1981); J. R. Bond, G. Efstathiou, *Astrophys. J.* **285**, L45 (1984); R. Crittenden, J. R. Bond, R. L. Davis, G. Efstathiou, P. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 324 (1993); C. -P. Ma, E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995).

$$(2\ell+1)\mu P_\ell(\mu) = (\ell+1)P_{\ell+1}(\mu) + \ell P_{\ell-1}(\mu), \qquad \int_{-1}^{+1} P_\ell^2(\mu)\,d\mu = \frac{2}{2\ell+1}.$$

式（6.1.23）と（6.1.24）の両辺に $P_\ell(\mu)$ をかけ，μ に関して積分すれば以下の結果を得る．

$$\begin{aligned}
&\dot{\Delta}^{(S)}_{P,\ell} + \frac{q}{a(2\ell+1)}\left[(\ell+1)\Delta^{(S)}_{P,\ell+1} - \ell\Delta^{(S)}_{P,\ell-1}\right] \\
&\quad = -\omega_c \Delta^{(S)}_{P,\ell} + \frac{1}{2}\omega_c \Pi \left(\delta_{\ell 0} + \frac{\delta_{\ell 2}}{5}\right), \qquad (6.1.27)\\
&\dot{\Delta}^{(S)}_{T,\ell} + \frac{q}{a(2\ell+1)}\left[(\ell+1)\Delta^{(S)}_{T,\ell+1} - \ell\Delta^{(S)}_{T,\ell-1}\right] \\
&\quad = -2\dot{A}_q \delta_{\ell 0} + 2q^2 \dot{B}_q \left(\frac{\delta_{\ell 0}}{3} - \frac{2\delta_{\ell 2}}{15}\right) \\
&\qquad - \omega_c \Delta^{(S)}_{T,\ell} + \omega_c \left(3\Phi + \frac{1}{2}\Pi\right)\delta_{\ell 0} + \frac{1}{10}\omega_c \Pi\,\delta_{\ell 2} \\
&\qquad - \frac{4}{3}\frac{q}{a(t)}\omega_c\,\delta u_{Bq}\,\delta_{\ell 1}. \qquad (6.1.28)
\end{aligned}$$

式（6.1.20）を式（6.1.21）に代入し，あらゆる関数 $f(\hat{q}\cdot\hat{p})$ に対して成り立つ以下の積分公式を用いれば，源泉関数を $\Delta^{(S)}_{T,\ell}$ と $\Delta^{(S)}_{P,\ell}$ で表すことができる．その積分公式とは，

$$\frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{p}\, f(\hat{q}\cdot\hat{p})\hat{p}_i\hat{p}_j = \mathcal{A}\,\delta_{ij} + \mathcal{B}\,\hat{q}_i\hat{q}_j$$

で，右辺の係数は，

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} d\mu\, f(\mu)\,(1-\mu^2) = \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} d\mu\, f(\mu)\Big(P_0(\mu) - P_2(\mu)\Big), \\
\mathcal{B} &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} d\mu\, f(\mu)\,(3\mu^2-1) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\mu\, f(\mu)\,P_2(\mu)
\end{aligned}$$

となる（これらの積分の一般的な形は回転不変性によって決められているが，係数を求めるには積分と δ_{ij}，$\hat{q}_i\hat{q}_j$ との縮約を取ることで得られる $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ の線形方程式を解けば良い）．この結果を使えば，式（6.1.21）の左辺の積分に含まれる2つの項を簡単に求めることができる（ここで引数 q，t は省略する）．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi}\int d^2\hat{p}\left(\Delta^{(S)}_T(\hat{q}\cdot\hat{p}) - \Delta^{(S)}_P(\hat{q}\cdot\hat{p})\right)(\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j) \\
&= \int_{-1}^{+1} d\mu \left(\Delta^{(S)}_T(\mu) - \Delta^{(S)}_P(\mu)\right)\left[\left(\frac{1}{6}P_0(\mu) + \frac{1}{12}P_2(\mu)\right)\delta_{ij} - \frac{1}{4}P_2(\mu)\hat{q}_i\hat{q}_j\right],
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{p}\Delta_P^{(S)}(\hat{q}\cdot\hat{p})\frac{\Big(\hat{q}_i-(\hat{q}\cdot\hat{p})\hat{p}_i\Big)\Big(\hat{q}_j-(\hat{q}\cdot\hat{p})\hat{p}_j\Big)}{1-(\hat{q}\cdot\hat{p})^2}$$
$$=\int_{-1}^{+1}d\mu\,\Delta_P^{(S)}(\mu)\left[\left(\frac{1}{12}P_0(\mu)+\frac{1}{6}P_2(\mu)\right)\delta_{ij}+\left(\frac{1}{4}P_0(\mu)-\frac{1}{2}P_2(\mu)\right)\hat{q}_i\hat{q}_j\right].$$

さらに，式（6.1.25）と（6.1.26）で与えられる部分波展開を用いれば，源泉関数は以下のように導かれる．

$$\Phi=\frac{1}{6}\left[2\Delta_{T,0}^{(S)}-\Delta_{P,0}^{(S)}-\Delta_{T,2}^{(S)}-\Delta_{P,2}^{(S)}\right]\,, \tag{6.1.29}$$

$$\Pi=\Delta_{P,0}^{(S)}+\Delta_{T,2}^{(S)}+\Delta_{P,2}^{(S)}\,. \tag{6.1.30}$$

同様に，式（6.1.20）を式（6.1.14）–(6.1.16）に用いれば，

$$\delta T^i_{\gamma j}(\boldsymbol{x},t)=\bar{\rho}_\gamma(t)\int d^3q\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha(\boldsymbol{q})\int_{-1}^{1}d\mu\,\Delta_T^{(S)}(q,\mu,t)$$
$$\times\left[\frac{1}{6}\Big(P_0(\mu)-P_2(\mu)\Big)\delta_{ij}+\frac{1}{2}P_2(\mu)\hat{q}_i\hat{q}_j\right]\,,$$
$$\delta T^0_{\gamma\,j}(\boldsymbol{x},t)=a(t)\,\bar{\rho}_\gamma(t)\int d^3q\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha(\boldsymbol{q})\frac{\hat{q}_j}{2}\int_{-1}^{1}d\mu\,\Delta_T^{(S)}(q,\mu,t)P_1(\mu)\,,$$
$$\delta T^0_{\gamma\,0}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{1}{2}\bar{\rho}_\gamma(t)\int d^3q\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha(\boldsymbol{q})\int_{-1}^{1}d\mu\,\Delta_T^{(S)}(q,\mu,t)\,P_0(\mu)$$

を得る．ここで，以下の公式を用いた．

$$\frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{p}\,f(\hat{q}\cdot\hat{p})\,\hat{p}_i=\frac{\hat{q}_i}{2}\int_{-1}^{1}d\mu\,f(\mu)\,P_1(\mu)\,.$$

この結果を式（5.1.43）の最初の 3 本の式と比較し，再び式（6.1.25）と（6.1.26）で与えられる部分波展開を用いれば，以下の結果を得る．

$$\delta p_{\gamma\,q}=\frac{\bar{\rho}_\gamma}{3}\Big(\Delta_{T,0}^{(S)}+\Delta_{T,2}^{(S)}\Big)\,, \tag{6.1.31}$$

$$q^2\pi^S_{\gamma\,q}=\bar{\rho}_\gamma\Delta_{T,2}^{(S)}\,, \tag{6.1.32}$$

$$\delta\rho_{\gamma\,q}=\bar{\rho}_\gamma\Delta_{T,0}^{(S)}\,, \tag{6.1.33}$$

$$\frac{q}{a(t)}\delta u_{\gamma\,q}=-\frac{3}{4}\Delta_{T,1}^{(S)}\,. \tag{6.1.34}$$

式（6.1.31）–(6.1.33）のチェックのため，これらの結果を式（5.1.43）の最後の式に用いれば $\delta T^{\lambda}_{\gamma\,\lambda}=0$ が得られることを確かめよう．これは，光子が質量を持たない粒子であることから導かれる帰結であり，光子がどのような分布関数を持っ

ても必ず成り立つ.

式 (6.1.31)–(6.1.34) を見ると，重力場の摂動の発展や，それがその他のスカラー型摂動に及ぼす影響を計算する際に必要となる光子の情報は，$\ell \leqq 2$ に対する $\Delta_{T,\ell}^{(S)}$ のみであることがわかる．しかし，これら 3 つの $\Delta_{T,\ell}^{(S)}$ の進化は，ボルツマン方程式 (6.1.27)–(6.1.30) を通じてより大きな値の ℓ を持つ $\Delta_{T,\ell}^{(S)}$，$\Delta_{P,\ell}^{(S)}$ に依存している．CMBfast や CAMB のようなコンピュータプログラムでは，部分波展開はある十分大きな値の ℓ で止められている．最新バージョンの CMBfast では ℓ の最大値は $\ell_{最大} = 12$ で，この場合，バリオンプラズマ，冷たい暗黒物質，ニュートリノ，重力場を記述する他の方程式を除いたとしても，コンピュータは各々の q に対して $2(\ell_{最大} + 1) = 26$ 個の連立常微分方程式を解かなくてはならない.

7 章で学ぶように，宇宙マイクロ波背景放射の観測を解釈するには 1000 を超す ℓ の値に対して $\Delta_{T,\ell}^{(S)}$ や $\Delta_{P,\ell}^{(S)}$ を計算する必要がある．元々，これはボルツマン方程式 (6.1.27)，(6.1.28) を直接解いて計算されていたが[*1]，この計算には数時間，あるいは数日にも渡る数値計算が必要であった．後になって，ボルツマン方程式 (6.1.19) の解を「視線方向積分」形式と呼ばれる形に書き表すことで，計算が非常に簡略化されることが示された[*2]．これを強度行列で書けば，以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t) &= \alpha(\boldsymbol{q}) \int_{t_1}^{t} dt' \,\exp\left(-i\boldsymbol{q}\cdot\hat{p}\int_{t'}^{t}\frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^{t} dt''\,\omega_c(t'')\right) \\
&\quad \times \Bigg[-\left(\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j\right)\left(\dot{A}_q(t') - (\hat{p}\cdot\boldsymbol{q})^2\dot{B}_q(t')\right) \\
&\qquad + \frac{3\omega_c(t')}{2}(\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j)\Phi(q,t') \\
&\qquad + \frac{3\omega_c(t')}{4}\Pi(q,t')\left(\hat{q}_i - \hat{p}_i(\hat{q}\cdot\hat{p})\right)\left(\hat{q}_j - \hat{p}_j(\hat{q}\cdot\hat{p})\right) \\
&\qquad + \frac{2\omega_c(t')}{a(t')}[\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j]\,\hat{p}_k\delta u_k(\boldsymbol{q},t')\Bigg] \\
&\quad + J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t_1)\exp\left(-i\boldsymbol{q}\cdot\hat{p}\int_{t_1}^{t}\frac{dt'}{a(t')} - \int_{t_1}^{t} dt'\,\omega_c(t')\right), \qquad (6.1.35)
\end{aligned}
$$

ここで t_1 は任意の初期時刻を表す．初期時刻 t_1 を再結合の時刻よりもずっと以前に選び（したがって $\omega_c(t_1) \gg H(t_1)$），さらに t を再結合の時刻よりもずっと後に選べば，式 (6.1.35) の最後の項は無視できる．すると，以下の結果を得る.

[*2] U. Seljak, M. A. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* **469**, 437 (1996). [astro-ph/9603033].

$$J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t)=\alpha(\boldsymbol{q})\int_{t_1}^{t}dt'\ \exp\left(-i\boldsymbol{q}\cdot\hat{p}\int_{t'}^{t}\frac{dt''}{a(t'')}-\int_{t'}^{t}dt''\ \omega_c(t'')\right)$$
$$\times\Bigg[-\left(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j\right)\left(\dot{A}_q(t')-(\hat{p}\cdot\boldsymbol{q})^2\dot{B}_q(t')\right)$$
$$+\frac{3\omega_c(t')}{2}(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j)\Phi(q,t')$$
$$+\frac{3\omega_c(t')}{4}\Pi(q,t')\left(\hat{q}_i-\hat{p}_i(\hat{q}\cdot\hat{p})\right)\left(\hat{q}_j-\hat{p}_j(\hat{q}\cdot\hat{p})\right)$$
$$+\frac{2\omega_c(t')}{a(t')}[\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j]\,\hat{p}_k\delta u_k(\boldsymbol{q},t')\Bigg]\,. \tag{6.1.36}$$

この視線方向積分形式の解を，式（6.1.20）の分解で定義される温度ゆらぎと偏光で書けば，

$$\Delta_T^{(S)}(q,\mu,t)=\Delta_P^{(S)}(q,\mu,t)+2\int_{t_1}^{t}dt'\exp\left[-iq\mu\int_{t'}^{t}\frac{dt''}{a(t'')}-\int_{t'}^{t}\omega_c(t'')\,dt''\right]$$
$$\times\left[-\dot{A}_q(t')+\mu^2q^2\dot{B}_q(t')+\frac{3}{2}\omega_c(t')\,\Phi(q,t')+\frac{2i\mu q\omega_c(t')}{a(t')}\,\delta u_q(t')\right], \tag{6.1.37}$$

$$\Delta_P^{(S)}(q,\mu,t)=\frac{3}{4}(1-\mu^2)\int_{t_1}^{t}dt'\ \exp\left[-iq\mu\int_{t'}^{t}\frac{dt''}{a(t'')}-\int_{t'}^{t}\omega_c(t'')\,dt''\right]$$
$$\times\,\omega_c(t')\,\Pi(q,t')\,, \tag{6.1.38}$$

を得る．ここで δu_q は $\delta u_k(\boldsymbol{q},t)=iq_k u_q(t)$ で定義される速度のスカラーポテンシャルである．式（6.1.29），(6.1.30）から Φ と Π を求めておけば，式（6.1.37），(6.1.38）から任意の ℓ に対して $\Delta_{T,\ell}^{(S)}$ と $\Delta_{P,\ell}^{(S)}$ が求まる．(別の手段として，式（6.1.36）から源泉関数 Φ，Π を求めることもできる．式（6.1.36）を $\hat{p}$ に渡って積分すれば，積分方程式を得る[*3]．この積分方程式により，$\Phi(q,t)$ と $\Pi(q,t)$ は，$\Phi(q,t')$ と $\Pi(q,t')$（ここで $t'<t$）の線形関数を t_1 から t まで積分した形で与えられる．この方法は，6.6 節でテンソルモードを議論する際に採用する.）

ニュートリノ

質量がゼロの各種ニュートリノ（もしくは反ニュートリノ）が持つ位相空間の数密度 $n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ は，式（6.1.6）のように摂動 $\delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ を用いて以下のよう

[*3] S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **74**, 063517 (2006) [astro-ph/0607076]; D. Baskaran, L. P. Grishchuk, A. G. Polnarev, *Phys. Rev. D* **74**, 063517 [gr-qc/0605100].

に書ける.

$$n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) = \bar{n}_\nu\Big(a(t)p^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\Big) + \delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\ , \tag{6.1.39}$$

ここで, $\bar{n}_\nu$ は各種ニュートリノが熱平衡時に持つ位相空間密度で,

$$\bar{n}_\nu(p) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\left[\exp\Big(p/k_{\mathcal{B}}a(t)\bar{T}(t)\Big)+1\right]^{-1}\ . \tag{6.1.40}$$

付録 H で示すように, 摂動 $\delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ は光子の位相空間密度 $a^2(t)\,n_\gamma^{kk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ と同じくボルツマン方程式に従うが, 光子との違いは, 温度が $T \ll 10^{10}$ K のときには衝突率に比例する項がなくなることである.

$$\begin{aligned} 0 = &\frac{\partial\,\delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}_k}{a(t)}\frac{\partial\,\delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial x^k} \\ &- \frac{1}{2}p\bar{n}'_\nu(p)\hat{p}_k\hat{p}_l\frac{\partial}{\partial t}\Big(a^{-2}(t)\delta g_{kl}(\boldsymbol{x},t)\Big). \end{aligned} \tag{6.1.41}$$

各種ニュートリノによるエネルギー–運動量テンソルの摂動への寄与は, 光子と同様に式 (6.1.10)–(6.1.12) で与えられるが, 違いは, $a^2(t)\,\delta n_\gamma^{kk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ の代わりに $\delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ が現れることである. 再び, 無次元の (方向に依存する) 強度を, 光子のときの式 (6.1.13) のように定義しよう.

$$a^4(t)\bar{\rho}_\nu(t)J(\boldsymbol{x},\hat{p},t) \equiv N_\nu\int_0^\infty \delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\,4\pi p^3\,dp\ , \tag{6.1.42}$$

ここで N_ν はニュートリノの種類数で, ニュートリノと反ニュートリノも別々に数えるものとする. また, $\bar{\rho}_\nu \equiv N_\nu\,a^{-4}\displaystyle\int 4\pi p^3\bar{n}_\nu(p)\,dp$ である. すると, ニュートリノと反ニュートリノによるエネルギー–運動量テンソルの寄与は, ちょうど光子のときの式 (6.1.14)–(6.1.16) のような形で与えられる.

$$\delta T^i_{\nu\,j}(\boldsymbol{x},t) = \bar{\rho}_\nu(t)\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}J(\boldsymbol{x},\hat{p},t)\,\hat{p}_i\hat{p}_j\ , \tag{6.1.43}$$

$$\delta T^0_{\nu\,j}(\boldsymbol{x},t) = a(t)\bar{\rho}_\nu(t)\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}J(\boldsymbol{x},\hat{p},t)\,\hat{p}_j\ , \tag{6.1.44}$$

$$\delta T^0_{\nu\,0}(\boldsymbol{x},t) = -\bar{\rho}_\nu(t)\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}J(\boldsymbol{x},\hat{p},t)\ . \tag{6.1.45}$$

回転不変性と並進不変性より, $J(\boldsymbol{x},\hat{p},t)$ をフーリエ積分で書くことができて,

$$J(\boldsymbol{x},\hat{p},t) = \int\ \alpha(\boldsymbol{q})\,\mathit{\Delta}_\nu^{(S)}(q,\hat{q}\cdot\hat{p},t)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\,d^3q \tag{6.1.46}$$

となる．$\Delta_\nu^{(S)}$ が従うボルツマン方程式を導くには，式（6.1.41）の両辺に $4\pi|\boldsymbol{p}|^3$ をかけ，$|\boldsymbol{p}|$ に渡って積分すれば良い．結果は，

$$\frac{\partial\,\Delta_\nu^{(S)}(q,\mu,t)}{\partial t}+i\frac{q\mu}{a(t)}\Delta_\nu^{(S)}(q,\mu,t)=-2\dot{A}_q(t)+2q^2\mu^2\dot{B}_q(t) \qquad (6.1.47)$$

となる．

CMBfast のようなコンピュータプログラムでは，ニュートリノと光子のボルツマン方程式を次の部分波展開を用いて解いている．

$$\Delta_\nu^{(S)}(q,\mu,t)=\sum_{\ell=0}^{\infty}i^{-\ell}(2\ell+1)P_\ell(\mu)\,\Delta_{\nu,\ell}^{(S)}(q,t)\,. \qquad (6.1.48)$$

これを式（6.1.46）に代入し，その結果を式（6.1.43)–(6.1.45）に代入し，さらにその結果を式（5.1.43）の最初の 3 本の式と比べれば，ニュートリノの圧力の摂動，スカラー型非等方ストレス，エネルギー密度の摂動，および速度ポテンシャルが以下のように書けることがわかる．

$$\delta p_{\nu\,q}(t)=\frac{\bar{\rho}_\nu(t)}{3}\left(\Delta_{\nu,0}^{(S)}(q,t)+\Delta_{\nu,2}^{(S)}(q,t)\right), \qquad (6.1.49)$$

$$q^2\pi_{\nu\,q}^S(t)=\bar{\rho}_\nu(t)\,\Delta_{\nu,2}^{(S)}(q,t)\,, \qquad (6.1.50)$$

$$\delta\rho_{\nu\,q}(t)=\bar{\rho}_\nu(t)\,\Delta_{\nu,0}^{(S)}(q,t)\,, \qquad (6.1.51)$$

$$q\,\delta u_{\nu\,q}(t)=-\frac{3}{4}\Delta_{\nu,1}^{(S)}(q,t)\,. \qquad (6.1.52)$$

これら部分波の振幅が従うボルツマン方程式を導くには，式（6.1.47）の両辺に $P_\ell(\mu)$ をかけ，μ に渡って積分すれば良い．

$$\begin{aligned}&\dot{\Delta}_{\nu,\ell}^{(S)}(q,t)+\frac{q}{a(2\ell+1)}\left[(\ell+1)\Delta_{\nu,\ell+1}^{(S)}(q,t)-\ell\,\Delta_{\nu,\ell-1}^{(S)}(q,t)\right]\\&\quad=-2\dot{A}_q(t)\delta_{\ell 0}+q^2\dot{B}_q(t)\left(\frac{2\delta_{\ell 0}}{3}-\frac{4\delta_{\ell 2}}{15}\right)\,.\end{aligned} \qquad (6.1.53)$$

CMBfast の最新バージョンでは，この方程式は $\ell=25$ まで数値的に解かれている．このように有限の ℓ で止められた部分波展開を行うのではなく，式（6.1.47）の解を，以下のように視線方向積分の形で与えることができる（この解は単なる形式解ではない）．

$$\Delta_\nu^{(S)}(q,\mu,t)=-2\int_{t_1}^{t}dt'\exp\left(-iq\mu\int_{t'}^{t}\frac{dt''}{a(t'')}\right)\left(\dot{A}_q(t')-\mu^2q^2\dot{B}_q(t')\right)$$

$$+ \Delta_\nu^{(S)}(q,\mu,t_1)\,\exp\left(-iq\mu\int_{t_1}^{t}\frac{dt'}{a(t')}\right)\,, \tag{6.1.54}$$

ここで t_1 は任意の初期時刻を表す．もし，初期時刻 t_1 をニュートリノとバリオンプラズマの熱平衡状態が終了した時刻よりも後に，なおかつ重力場の摂動がニュートリノの分布関数を変形させるよりも前の時刻に取れば，$\Delta_\nu^{(S)}(q,\mu,t_1)$ は時刻 t_1 での温度ゆらぎで与えられる．

$$\Delta_\nu^{(S)}(q,\mu,t_1) = 4\left[\frac{\delta T_q(t_1)}{\bar{T}(t_1)} + i\frac{\mu q\delta u_q(t_1)}{a(t_1)}\right]\,, \tag{6.1.55}$$

ここで，角括弧内の 2 項目は，電子–陽電子–光子のプラズマの運動によるドップラー効果から生じる寄与である．

式（6.1.43）–（6.1.45）の角度積分は解析的に行える．そのためには以下の積分公式が必要となる．

$$\begin{aligned}\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_l\,e^{-i\hat{p}\cdot\boldsymbol{v}} &= \Big(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{kj}\Big)\,j_2(v)/v^2\\ &\quad-(\delta_{ij}\hat{v}_k\hat{v}_l+\delta_{ik}\hat{v}_j\hat{v}_l+\delta_{il}\hat{v}_k\hat{v}_j+\delta_{jk}\hat{v}_i\hat{v}_l+\delta_{jl}\hat{v}_k\hat{v}_i+\delta_{kl}\hat{v}_i\hat{v}_j)\,j_3(v)/v\\ &\quad+\hat{v}_i\hat{v}_j\hat{v}_k\hat{v}_l\,j_4(v)\,,\end{aligned} \tag{6.1.56}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k e^{-i\hat{p}\cdot\boldsymbol{v}} &= -i\Big(\delta_{ij}\hat{v}_k+\delta_{jk}\hat{v}_i+\delta_{ki}\hat{v}_j\Big)j_2(v)/v\\ &\qquad+i\hat{v}_i\hat{v}_j\hat{v}_k\,j_3(v)\,,\end{aligned} \tag{6.1.57}$$

$$\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}\hat{p}_i\hat{p}_j\,e^{-i\hat{p}\cdot\boldsymbol{v}} = \delta_{ij}j_1(v)/v-\hat{v}_i\hat{v}_j\,j_2(v), \tag{6.1.58}$$

$$\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}\hat{p}_i\,e^{-i\hat{p}\cdot\boldsymbol{v}} = -i\hat{v}_i\,j_1(v), \tag{6.1.59}$$

$$\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}e^{-i\hat{p}\cdot\boldsymbol{v}} = j_0(v)\,, \tag{6.1.60}$$

ここで $v\equiv|\boldsymbol{v}|$ で，$j_\ell(v)$ は球ベッセル関数を表す．再び式（5.1.43）の最初の 3 本の式と比べれば，ニュートリノの圧力の摂動，スカラー型非等方ストレス，エネルギー密度の摂動，および速度ポテンシャルの解が以下のように求められる[*4]．

$$\delta p_{\nu\,q}(t) = -2\bar{\rho}_\nu(t)\int_{t_1}^{t}dt'$$

[*4] 同様な解が，質量がゼロでないニュートリノに対しても求められている．脚注 3 を参照．

$$\times \left[\dot{A}_q(t')\, K_1 \left(q \int_{t'}^{t} \frac{dt''}{a(t'')} \right) - q^2 \dot{B}_q(t')\, K_2 \left(q \int_{t'}^{t} \frac{dt''}{a(t'')} \right) \right], \tag{6.1.61}$$

$$q^2 \pi^S_{\nu\, q}(t) = -2\bar{\rho}_\nu(t) \int_{t_1}^{t} dt' \times \left[\dot{A}_q(t')\, j_2 \left(q \int_{t'}^{t} \frac{dt''}{a(t'')} \right) - q^2 \dot{B}_q(t')\, K_3 \left(q \int_{t'}^{t} \frac{dt''}{a(t'')} \right) \right], \tag{6.1.62}$$

$$q \delta u_{\nu\, q}(t) = \frac{3a(t)}{2} \int_{t_1}^{t} dt' \times \left[\dot{A}_q(t')\, j_1 \left(q \int_{t'}^{t} \frac{dt''}{a(t'')} \right) - q^2 \dot{B}_q(t')\, K_4 \left(q \int_{t'}^{t} \frac{dt''}{a(t'')} \right) \right], \tag{6.1.63}$$

$$\delta\rho_{\nu\, q}(t) = -2\bar{\rho}_\nu(t) \int_{t_1}^{t} dt' \times \left[\dot{A}_q(t')\, j_0 \left(q \int_{t'}^{t} \frac{dt''}{a(t'')} \right) - q^2 \dot{B}_q(t')\, K_5 \left(q \int_{t'}^{t} \frac{dt''}{a(t'')} \right) \right], \tag{6.1.64}$$

ここで

$$K_1(v) \equiv j_1(v)/v\ , \tag{6.1.65}$$

$$K_2(v) \equiv j_2(v)/v^2 - j_3(v)/v\ , \tag{6.1.66}$$

$$K_3(v) \equiv -2j_2(v)/v^2 + 5j_3(v)/v - j_4(v)\ , \tag{6.1.67}$$

$$K_4(v) \equiv 3j_2(v)/v - j_3(v)\ , \tag{6.1.68}$$

$$K_5(v) \equiv j_1(v)/v - j_2(v) \tag{6.1.69}$$

である．これらの式を用いれば，ニュートリノの部分波展開を有限の ℓ で打ち切る必要がなくなる．

重力

あと残されているのは，重力場のスカラー型摂動 $\dot{A}$，$\dot{B}$ が従う運動方程式だけである（時間微分のない A と B はどこにも現れない）．方程式の 1 つを式 (5.3.31) に選ぶのが便利である．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[a^2\, \psi_q\right] = -4\pi G a^2 \times \left(\delta\rho_{Dq} + \delta\rho_{B\, q} + \delta\rho_{\gamma\, q} + \delta\rho_{\nu\, q} + 3\delta p_{\gamma\, q} + 3\delta p_{\nu\, q} - q^2 \pi^S_{\gamma\, q} - q^2 \pi^S_{\nu\, q} \right), \tag{6.1.70}$$

ここで，

$$\psi_q \equiv \frac{1}{2}\left(3\dot{A}_q - q^2\dot{B}_q\right) \tag{6.1.71}$$

である．もう 1 つは式（5.3.30）から持ってこよう．

$$\dot{A}_q = 8\pi G\left[\frac{4}{3}\bar{\rho}_\gamma \delta u_{\gamma\, q} + \frac{4}{3}\bar{\rho}_\nu \delta u_{\nu\, q} + \bar{\rho}_B \delta u_{B\, q}\right]. \tag{6.1.72}$$

（ここで，我々の用いている同期ゲージでは $\delta u_{D\,q} = 0$ としていることを思い出そう.）式（6.1.70）で与えられる 1 次の微分方程式を ψ_q に関して解き，式（6.1.72）を用いて $\dot{A}_q$ を得れば，もう 1 つの成分 $\dot{B}_q$ は式（6.1.71）から自明に得られる．

$$q^2\dot{B}_q = 3\dot{A}_q - 2\psi_q\ . \tag{6.1.73}$$

この結果を用い，かつ光子とニュートリノの部分波展開を有限の ℓ で止めれば，すべての摂動に関する常微分方程式系が閉じる．あとは，初期条件を与えてコンピュータで数値的に解けば良い．

初期条件を与えるため，再結合の時刻よりも十分前の時刻 t_1（たとえば $\bar{T}(t_1) > 10^5$ K）では，光子とバリオンプラズマとの衝突率が非常に大きく，光子とプラズマは熱平衡かつ運動学的にも平衡状態となっていることに着目しよう．このような条件下では，光子の分布関数の摂動 δn^{ij} は式（H.13）の初項の温度ゆらぎ，および光子流体の運動によるドップラー効果のみから生じる．平衡状態では光子流体の速度はバリオンプラズマの速度 $\delta \boldsymbol{u}_B$ に等しいので，以下の結果を得る．

$$\delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t_1) = -\frac{1}{2}a^{-2}(t_1)\left[\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j\right]\bar{n}'_\gamma(p)\, p\left[\frac{\delta T(\boldsymbol{x}, t_1)}{\bar{T}(t_1)} + \frac{\hat{p}_k \delta u_{Bk}(\boldsymbol{x}, t_1)}{a(t_1)}\right]. \tag{6.1.74}$$

（式（6.1.74）のドップラー効果の項にある因子 $1/a(t_1)$ は，式（H.13）で説明する.）（ω_c を含まない）式（6.1.74）が初期条件であるということは，ω_c が非常に大きいとき，式（6.1.17）の右辺で ω_c を含む項の係数がすべて相殺することを意味する．式（6.1.74）の両辺に $4\pi p^3$ をかけて p に渡って積分すれば，J_{ij} の初期条件が得られる．

$$J_{ij}(\boldsymbol{x}, \hat{p}, t_1) = 2\left[\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j\right]\left[\frac{\delta T(\boldsymbol{x}, t_1)}{\bar{T}(t_1)} + \frac{\hat{p}_k \delta u_k(\boldsymbol{x}, t_1)}{a(t_1)}\right]. \tag{6.1.75}$$

$J_{ij}(\boldsymbol{x}, \hat{p}, t_1)$ はスカラー型摂動とベクトル型摂動のみを含み，テンソル型摂動を含まないことに注意しておこう．

同様の議論がニュートリノにもあてはまるが，その場合は初期時刻をさらに早

期（温度が 10^{10} K より少し低い程度で，ニュートリノは自由に運動しているが，重力場の摂動がニュートリノの位相空間分布を平衡状態の分布から変えられるほど時間が経過していない頃）に取らなければならない．

これでもまだ，その他のスカラー型摂動 A_q，B_q，δ_{Dq}，δ_{Bq}，δu_{Bq}，δT_q の初期条件を選ぶ自由度が残っている．これらの初期条件を選ぶには，興味のある波数が（$q/a \ll H$ という意味で）地平線の外側にある時刻まで遡らなければならない．6.2 節では，観測から支配的なモードだとわかっている断熱ゆらぎにたいして初期条件を与える．初期条件の規格化因子は，摂動量 $\mathcal{R}_q$ である（この量は，地平線の外側では，同期ゲージの摂動量を用いて式（5.4.24）で与えられる）．

6.2　スカラー型摂動——流体力学的極限

6.1 節で導いた方程式系は，あまりにも複雑なため解析的には解けない．しかし，再結合の時刻までは光子と自由電子との衝突率が大きいので，光子とバリオンプラズマは局所的熱平衡状態にある．この場合，光子はプラズマや冷たい暗黒物質と同様，流体力学的に扱うことができる．この手法は再結合の時刻付近では正しくなくなるが，6.4 節で見るように，この時期における平均自由時間の増大に伴う音波の減衰を考慮すれば，流体近似はそこそこの精度を保てる．再結合の時刻以降，光子はほぼ自由に伝播し，その伝播の道筋は運動方程式を解くことで追うことができる．やっかいなのはニュートリノだが，非常に早期でニュートリノの摂動がまだ地平線の外側にある頃は $q^2\pi^S_{\nu\,q}$ も $q\delta u_{\nu\,q}$ も無視できるので，式（6.1.49）–（6.1.51）より $\delta\rho_{\nu\,q} = 3\delta p_{\nu\,q}$ が得られる．つまり，あたかもニュートリノが熱平衡状態にあるように振る舞うのである．後期になって宇宙が物質優勢になれば，ニュートリノは重力場に対して小さな寄与しかしない．

これらを踏まえ，本節と次の 3 節では，解析的な扱いを可能にするため流体近似を採用する[*1]．これらの仮定のもと，同期ゲージで求めた摂動のフーリエ変換（q は共動的波数）の進化は重力場の方程式（5.3.36），

$$\frac{d}{dt}\Big(a^2\psi_q\Big) = -4\pi G a^2\Big(\delta\rho_{Dq} + \delta\rho_{Bq} + 2\delta\rho_{\gamma q} + 2\delta\rho_{\nu q}\Big)\,, \qquad (6.2.1)$$

[*1] ゆらぎの進化に関する他の解析的，あるいは準解析的な扱いは，W. Hu, N. Sugiyama, *Astrophys. J.* **444**, 489 (1995); **471**, 542 (1996); V. Mukhanov, *Int. J. Theor. Phys.* **43**, 623 (2004) [astro-ph/0303072] を見よ．私の意見では，本書で与える手法は前者（フーと杉山）の手法よりも見通しが良いが精度が悪く，後者（ムハノフ）よりは精度が良い（というのも，本書では数値積分をするのにコンピュータを使うことを認めているためである）．

各種流体のエネルギー保存の式（5.3.34），

$$\delta\dot{\rho}_{\gamma q} + 4H\delta\rho_{\gamma q} - (4q^2/3a^2)\bar{\rho}_\gamma \delta u_{\gamma q} = -(4/3)\bar{\rho}_\gamma \psi_q \ , \tag{6.2.2}$$

$$\delta\dot{\rho}_{Dq} + 3H\delta\rho_{Dq} = -\bar{\rho}_D \psi_q \ , \tag{6.2.3}$$

$$\delta\dot{\rho}_{Bq} + 3H\delta\rho_{Bq} - (q^2/a^2)\bar{\rho}_B \delta u_{\gamma q} = -\bar{\rho}_B \psi_q \ , \tag{6.2.4}$$

$$\delta\dot{\rho}_{\nu q} + 4H\delta\rho_{\nu q} - (4q^2/3a^2)\bar{\rho}_\nu \delta u_{\nu q} = -(4/3)\bar{\rho}_\nu \psi_q, \tag{6.2.5}$$

および光子–バリオンプラズマとニュートリノの運動量保存式（5.3.32），

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{4}{3}\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_B\right)\delta u_{\gamma q}\right) + 3H\left(\left(\frac{4}{3}\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_B\right)\delta u_{\gamma q}\right) = -(1/3)\delta\rho_{\gamma q}, \tag{6.2.6}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\bar{\rho}_\nu \delta u_{\nu q}\Big) + 3H\bar{\rho}_\nu \delta u_{\nu q} = -(1/4)\delta\rho_{\nu q} \tag{6.2.7}$$

で記述される．

これらの方程式を，以下で定義する無次元の摂動量で書き換えるのが有用である[*2]．

$$\delta_{\alpha q} \equiv \frac{\delta\rho_{\alpha q}}{\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha}, \tag{6.2.8}$$

ここで α は γ，D，B，ν を取る．$a^4\bar{\rho}_\gamma$，$a^3\bar{\rho}_D$，$a^3\bar{\rho}_B$，$a^4\bar{\rho}_\nu$ がすべて時間に依存しないことを考慮すれば，式（6.2.1）–（6.2.7）は，

$$\frac{d}{dt}\Big(a^2\psi_q\Big) = -4\pi G a^2\left(\bar{\rho}_D\delta_{Dq} + \bar{\rho}_B\delta_{Bq} + \frac{8}{3}\bar{\rho}_\gamma\delta_{\gamma q} + \frac{8}{3}\bar{\rho}_\nu\delta_{\nu q}\right) \ , \tag{6.2.9}$$

$$\dot{\delta}_{\gamma q} - (q^2/a^2)\delta u_{\gamma q} = -\psi_q \ , \tag{6.2.10}$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q \ , \tag{6.2.11}$$

$$\dot{\delta}_{Bq} - (q^2/a^2)\delta u_{\gamma q} = -\psi_q \ , \tag{6.2.12}$$

$$\dot{\delta}_{\nu q} - (q^2/a^2)\delta u_{\nu q} = -\psi_q \ , \tag{6.2.13}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(1+R)\delta u_{\gamma q}}{a}\right) = -\frac{1}{3a}\delta_{\gamma q} \ , \tag{6.2.14}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta u_{\nu q}}{a}\right) = -\frac{1}{3a}\delta_{\nu q} \tag{6.2.15}$$

と書くことができ，$R \equiv 3\bar{\rho}_B/4\bar{\rho}_\gamma$ である．式（6.2.1）–（6.2.7），あるいは上の式（6.2.9）–（6.2.15）は 7 本の 1 階微分方程式（ψ_q，4 つの密度ゆらぎ，そして光子–

[*2] ただし，この定義は文献でよく使われている定義とは異なる．文献では $\delta_{\alpha q}$ は $\delta\rho_{\alpha q}/\bar{\rho}_\alpha$ として定義されることが多い．

バリオンプラズマとニュートリノの速度ポテンシャル）からなる閉じた方程式系なので，7 個の独立解がある．

これらの方程式を使って再結合の時刻まで成り立つ解を求める前に，まず初期条件を選ばなければならない．これらの初期条件によって異なる独立解が区別される．十分早期には宇宙は放射優勢であるから，全物質密度と全放射密度を，

$$\bar{\rho}_M \equiv \bar{\rho}_D + \bar{\rho}_B\,, \qquad \bar{\rho}_R \equiv \bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu \tag{6.2.16}$$

と定義すると，$\bar{\rho}_M \ll \bar{\rho}_R$ が成り立つ．したがって，良い近似で $a \propto \sqrt{t}$，$8\pi G\bar{\rho}_R/3 = 1/4t^2$（この表式で時間のゼロ点を決めたことになる），および $R \ll 1$ として良い．式（6.2.9)–(6.2.15）で $a \propto \sqrt{t}$，$R \ll 1$ とすれば，以下の式を得る．

$$\frac{d}{dt}\Big(t\psi_q\Big) = -4\pi G t\left(\bar{\rho}_D\delta_{Dq} + \bar{\rho}_B\delta_{Bq} + \frac{8}{3}\bar{\rho}_\gamma\delta_{\gamma q} + \frac{8}{3}\bar{\rho}_\nu\delta_{\nu q}\right)\,, \tag{6.2.17}$$

$$\dot{\delta}_{\gamma q} = \dot{\delta}_{Bq} = -\psi_q + (q^2/a^2)\delta u_{\gamma q}\,, \tag{6.2.18}$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q\,, \tag{6.2.19}$$

$$\dot{\delta}_{\nu q} = -\psi_q + (q^2/a^2)\delta u_{\nu q}\,, \tag{6.2.20}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta u_{\gamma q}}{\sqrt{t}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{t}}\delta_{\gamma q}\,, \tag{6.2.21}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta u_{\nu q}}{\sqrt{t}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{t}}\delta_{\nu q}\,. \tag{6.2.22}$$

かなり早期には摂動は（$q/aH \ll 1$ という意味で）地平線の外にあるが，式（6.2.18)，(6.2.20）ではまだ q^2 に比例する項を無視せず残してある．なぜなら，ある解では地平線の外側で保存する量 $\mathcal{R}_q$ を計算する際に相殺する項があり，これらの項が必要となるからである．また，ここでは $\bar{\rho}_D$ と $\bar{\rho}_B$ は $\bar{\rho}_\gamma$ と $\bar{\rho}_\nu$ に比べてずっと小さいと仮定しているが，式（6.2.17）の右辺ではまだ $\bar{\rho}_D$ や $\bar{\rho}_B$ に比例する項を無視せず残してある．これは，ある解では暗黒物質やバリオンの**密度ゆらぎと平均密度の比**が光子やニュートリノの密度ゆらぎと平均密度の比よりも大きくなる可能性を残しておくためである．

1．解 1

これは最も支配的な断熱的解である．ここでいう「断熱的」とは，非常に早期にはすべての $\delta_{\alpha q}$ が等しくなる，という意味である．(5.4 節で議論したように，単一のスカラー場によるインフレーション理論では断熱的な解しか存在しないし，もし，宇宙が早期にどこかで，ゼロでない保存量子数を持たないまま局所熱平衡

状態になれば，やはり断熱的な解しか存在しなくなる.）式（6.2.17）–(6.2.22）を見てみると，もし以下のような関係，

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{Bq} = \delta_{Dq} = \delta_{\nu q} \equiv \delta_q \ , \qquad \delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} \equiv \delta u_q \tag{6.2.23}$$

が成り立ち，式（6.2.17）でバリオンと暗黒物質の密度に比例する項を無視し，さらに式（6.2.18）,（6.2.20）で q^2/a^2 に比例する項を無視すれば，式（6.2.18）–(6.2.22）と式（6.2.17）が以下のようになることがわかる.

$$\dot{\delta}_q = -\psi_q \ , \tag{6.2.24}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta u_q}{\sqrt{t}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{t}}\delta_q \ , \tag{6.2.25}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(t\psi_q\Big) = -\frac{1}{t}\delta_q \ . \tag{6.2.26}$$

式（6.2.24）,（6.2.26）を組み合わせれば，δ_q に対する 2 次の線形微分方程式を得る.

$$\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt}\delta_q\right) - \frac{1}{t}\delta_q = 0 \ .$$

これは 2 つの解 $\delta_q \propto t$，および $\delta_q \propto 1/t$ を持ち，それぞれの解に対して式（6.2.24）,（6.2.25）から ψ_q，δu_q の解が得られる．時間とともに大きくなる解は $\delta_q \propto t$，$\delta u_q \propto t^2$ で，これらは第 1 の断熱的解を構成する.

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{Bq} = \delta_{\nu q} = \delta_{Dq} = \frac{q^2 t^2 \mathcal{R}_q^o}{a^2} \ , \tag{6.2.27}$$

$$\psi_q = -\frac{tq^2\mathcal{R}_q^o}{a^2} \ , \tag{6.2.28}$$

$$\delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = -\frac{2t^3 q^2 \mathcal{R}_q^o}{9a^2} \ . \tag{6.2.29}$$

この解は，式（5.4.24）で与えられる以下の量，

$$q^2\mathcal{R}_q \equiv -a^2 H\psi_q + 4\pi G a^2 \delta\rho_q + q^2 H \delta u_q \tag{6.2.30}$$

が $q/a \ll H$ のときに時間によらない定数 $q^2\mathcal{R}_q^o$ となるように規格化されている.（上付き添字 o は「地平線の外（outside the horizon)」を表す.）

2. 解 2

式（6.2.24）–(6.2.26）の解のうち，$t \to 0$ のときに $\delta_q \propto 1/t$ となる解は第 2 の断熱的解を構成する.

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{Bq} = \delta_{\nu q} = \delta_{Dq} = \varepsilon_q/t\ , \quad \psi_q = \varepsilon_q/t^2\ , \quad \delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = \frac{2\varepsilon_q}{3}\ . \tag{6.2.31}$$

ここで ε_q は q の任意関数で，時間に依存しない．この解から $\mathcal{R}_q$ を計算する際，$q^2\mathcal{R}_q$ の式（6.2.30）の最初の 2 項が q^2/a^2H^2 のゼロ次で相殺し，$q^2\mathcal{R}_q$ に q^2/a^2H^2 程度の大きさの不定な項が残る（したがって $\mathcal{R}_q$ に q^2/a^2H^2 のゼロ次で不定な項が残る），という問題が生じる．しかしうまいことに，第 2 の断熱的解では式（6.2.17）–（6.2.22）の解として，($\rho_M \ll \rho_R$ である限り）q/aH のすべての次数で成り立つ解を求めることができる．その解は，

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{Bq} = \delta_{\nu q} = \varepsilon_q/t\ , \quad \delta_{Dq} = \frac{\varepsilon_q}{t}\left[1 - \frac{q^2}{3H^2a^2}\ln\left(\frac{q}{Ha}\right)\right]\ , \tag{6.2.32}$$

$$\psi_q = \frac{\varepsilon_q}{t^2}\left[1 + \frac{2q^2t^2}{3a^2}\right]\ , \tag{6.2.33}$$

$$\delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = \frac{2\varepsilon_q}{3} \tag{6.2.34}$$

である．これを式（6.2.30）に用いれば，この解は，$\bar{\rho}_M \ll \bar{\rho}_R$ である限り，q/aH のすべての次数において $\mathcal{R}_q = 0$ を与えることが示せる．

その他の 5 つの解は非断熱的な解，つまり，$q/a \ll H$ の極限であってもいくつかの $\delta_{\alpha q}$ が等しくならない解である．それがどのようなものかを理解するため，特に単純な例を次に取り上げよう．

3. 解 3

単純な例は以下のとおり，

$$\delta_{Dq} = \frac{\varepsilon_q\bar{\rho}_B}{\bar{\rho}_B + \bar{\rho}_D}\ , \quad \delta_{Bq} = -\frac{\varepsilon_q\bar{\rho}_D}{\bar{\rho}_B + \bar{\rho}_D}\ , \tag{6.2.35}$$

$$\psi_q = 0\ , \quad \delta_{\gamma q} = \delta_{\nu q} = 0\ , \quad \delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = 0\ , \tag{6.2.36}$$

ここで再び，ε_q は時間によらない q の任意関数である．この解は，バリオン密度と暗黒物質密度の比（この比は時間によらない）に対する摂動で，すべての時刻での厳密解となっている．これは**等曲率**解である．というのは，この解は $\psi_q = 0$ を持ち，さらには $\mathcal{R}_q = 0$ でもあるからだ．

＊＊＊

既に示したように，これらの結果は $\bar{\rho}_M \ll \bar{\rho}_R$ が成り立つような十分早期の時刻でのみ適用できる（解 1 では，それに加えて $q/a \ll H$ も要求される）．これら

早期の解を後期まで拡張するため，再結合の時刻以前ではすべての時刻において式（6.2.10）と式（6.2.12）の差から以下の式が得られることに着目しよう．

$$\frac{d}{dt}\Big(\delta_{Bq}-\delta_{\gamma q}\Big)=0\ . \tag{6.2.37}$$

つまり，摂動がまだ地平線の外にあるような早期に断熱条件 $\delta_{Bq}=\delta_{\gamma q}$ を満たす解は，その後もずっと，

$$\delta_{Bq}=\delta_{\gamma q} \tag{6.2.38}$$

を満たす．すると，式（6.2.9）–（6.2.15）から以下の結果が導かれる．

$$\frac{d}{dt}\Big(a^2\psi_q\Big)=-4\pi Ga^2\left[\bar\rho_D\delta_{Dq}+\Big(\bar\rho_B+\frac{8}{3}\bar\rho_\gamma\Big)\delta_{\gamma q}+\frac{8}{3}\bar\rho_\nu\delta_{\nu q}\right]\ , \tag{6.2.39}$$

$$\dot\delta_{\gamma q}-(q^2/a^2)\delta u_{\gamma q}=-\psi_q\ , \tag{6.2.40}$$

$$\dot\delta_{Dq}=-\psi_q\ , \tag{6.2.41}$$

$$\dot\delta_{\nu q}-(q^2/a^2)\delta u_{\nu q}=-\psi_q\ , \tag{6.2.42}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(1+R)\delta u_{\gamma q}}{a}\right)=-\frac{1}{3a}\delta_{\gamma q}\ , \tag{6.2.43}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta u_{\nu q}}{a}\right)=-\frac{1}{3a}\delta_{\nu q}\ , \tag{6.2.44}$$

ここで再び $R\equiv 3\bar\rho_B/4\bar\rho_R$ である．これらの式は，再結合の時刻以前のすべての時刻において解 1，解 2 に適用できる．これからは主に解 1 に注目する．なぜなら，放射優勢期で摂動がまだ地平線の外側にあるとき，解 2 の摂動は解 1 の摂動と比べて $1/t^2$ に比例して減少するからである．

式（6.2.39）–（6.2.44）は随分と簡単化されはしたが，それでもすべての時刻とすべての波数で成り立つ解析解を求めることはできない．しかし 2 つの波長領域で解析的に扱うことができる．つまり，$q\ll q_{\rm EQ}$ である**長波長領域**と，$q\gg q_{\rm EQ}$ である**短波長領域**である．ここで，$q_{\rm EQ}$ は物質と放射のエネルギー密度が等しくなる時刻において $q/a=H$ を満たす波数 q を表す．さて，インフレーションが終わると，q/a は H よりもゆっくり減少する．長波長領域では波数が非常に小さく，$\bar\rho_M$ と $\bar\rho_R$ が等しくなる時刻でも q/a は H よりずっと小さいものとする．一方，短波長領域では波数が非常に大きく，$\bar\rho_M$ がまだ $\bar\rho_R$ よりずっと小さい時刻に q/a と H が等しくなるものとする．長波長領域では，摂動が地平線の外にある早期，および宇宙膨張が非相対論的物質に支配される後期の両方で式（6.2.39）–（6.2.44）の解析解が求められる．それらの解析解は，これらの時期が重なる期間

（つまり摂動がまだ地平線の外にあり，かつ宇宙が既に物質優勢である期間）でつなぎ合わせることができる．短波長領域では逆に，宇宙が放射優勢である早期と摂動が十分に地平線の内側にある後期で解析解が求められ，それらの解析解をこれらの時期が重なる期間（宇宙がまだ放射優勢で，かつ摂動がすでに十分地平線の内側にある期間）でつなぎ合わせる．これらの長波長領域と短波長領域は，それぞれ 6.3 節と 6.4 節で考える．

長波長領域と短波長領域の分かれ目となる波数 $q_{\rm EQ}$（物質密度と放射密度が等しくなる時刻で $q/a = H$ を満たす波数 q）を計算するため，式（2.2.5）[訳注 1]から物質密度と放射密度が等しくなる時刻の赤方偏移が $1 + z_{\rm EQ} = \Omega_M/\Omega_R = \Omega_M h^2/4.15 \times 10^{-5}$ と与えられることを思い出そう．式（2.2.9）[訳注 2]は放射優勢期の宇宙膨張率 $H = 2.1 \times 10^{-20}\ (1+z)^2 s^{-1}$ を与えるが，物質密度と放射密度が等しくなる時刻では物質密度の寄与によって H が $\sqrt{2}$ 倍大きくなる．したがって，物質密度と放射密度が等しくなる時刻でちょうど地平線の内側に入ってくる波長を持つゆらぎの物理的波数 q/a は以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
q_{\rm EQ}/a_{\rm EQ} = H_{\rm EQ} &= \sqrt{2} \times 2.1 \times 10^{-20}\ (1+z_{\rm EQ})^2 s^{-1} \\
&= 1.72 \times 10^{-11} (\Omega_M h^2)^2\ {\rm s}^{-1}\ .
\end{aligned}
$$

これに対応する物理的波長の現在時刻での値は，

$$
\lambda_0 \equiv \frac{2\pi}{q_{\rm EQ}/a_0} = \frac{2\pi(1+z_{\rm EQ})}{q_{\rm EQ}/a_{\rm EQ}} = 85\ (\Omega_M h^2)^{-1}\ {\rm Mpc} \qquad (6.2.45)
$$

である．比較のため，おとめ座銀河団と我々の銀河系との間の距離から見積もった局所超銀河団のサイズは約 15 Mpc である．現在観測されるゆらぎのうち $\lambda_{\rm EQ}$ よりも長い，あるいは短い波長を持つゆらぎは，それぞれ物質密度と放射密度が等しくなる時刻よりも前，あるいは後に地平線の内側に入ってきたゆらぎである．式（1.5.28）[訳注 3]，（1.5.39）[訳注 4]で与えられる現在の物質密度 ρ_{M0} を使えば，直径 λ_0 を持つ球の中に含まれる物質の質量が以下のように求まる．

訳注 1　$\dfrac{\rho_{R0}}{\rho_{M0}} = \dfrac{\Omega_R}{\Omega_M} = 4.15 \times 10^{-5} \Omega_M^{-1} h^{-2}$.

訳注 2　$H \equiv \dfrac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_R T^4/T_{\gamma 0}^4} = 2.1 \times 10^{-20}\ {\rm s}^{-1} \left(\dfrac{T}{T_{\gamma 0}}\right)^2$.

訳注 3　$\rho_{0,{\rm crit}} \equiv \dfrac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.878 \times 10^{-29}\ h^2\ {\rm g/cm^3}$.

訳注 4　$\rho_{V0} \equiv \dfrac{3H_0^2 \Omega_\Lambda}{8\pi G}, \rho_{M0} \equiv \dfrac{3H_0^2 \Omega_M}{8\pi G}, \rho_{R0} \equiv \dfrac{3H_0^2 \Omega_R}{8\pi G}$.

$$\frac{\pi}{6}\rho_{M0}\lambda_0^3 = 0.9 \times 10^{17}\left(\Omega_M h^2\right)^{-2} M_\odot \,. \tag{6.2.46}$$

比較のため，大きな銀河の典型的な質量は約 $10^{12}M_\odot$ である．したがって，銀河，あるいは銀河団の形成に関わるようなゆらぎは，物質密度と放射密度が等しくなる時刻で十分地平線の内側にあったことになる．

さらに，$k_{\rm EQ}$ に対応する宇宙マイクロ波背景放射の異方性の角波数 $\ell_{\rm EQ}$ も計算できる．2.6 節で述べたように，多重極展開の係数 C_ℓ を求める際に必要となる積分は，波数が ℓ/r_L 程度のときに最大の寄与を持つ（r_L は最終散乱面の動径座標）．ゆえに，ℓ が $\ell_{\rm EQ} = q_{\rm EQ} r_L$ 程度の大きさのとき，C_ℓ の積分は波数が $q_{\rm EQ}$ のゆらぎ，つまり物質密度と放射密度が等しくなる時刻で地平線の内側に入ってきたゆらぎの寄与に支配されることになる．この角波数は以下のように計算できる．

$$\ell_{\rm EQ} = \left(\frac{q_{\rm EQ}}{a_{\rm EQ}}\right)\left(\frac{a_{\rm EQ}}{a_0}\right)\left(\frac{a_0}{a_L}\right) a_L r_L = \frac{H_{\rm EQ}(1+z_L)}{(1+z_{\rm EQ})} a_L r_L \,,$$

a_L は最終散乱の時刻におけるロバートソン–ウォーカースケール因子を表す．ここで $H_{\rm EQ} = \sqrt{2\Omega_M}(1+z_{\rm EQ})^{3/2}H_0$ で，$a_L r_L = d_A$ は最終散乱面への角径距離であることを思い出そう．さらに $1+z_{\rm EQ} = \Omega_M/\Omega_R$ を用いれば以下の結果を得る．

$$\ell_{\rm EQ} = \Omega_M \sqrt{2/\Omega_R}\, H_0 d_A (1+z_L) \,. \tag{6.2.47}$$

たとえば，2.6 節で述べたように，$\Omega_M = 0.26$ と $\Omega_\Lambda = 0.74$ のとき $d_A = 3.38 H_0^{-1}(1+z_L)^{-1}$ である．$\Omega_R = 8.01 \times 10^{-5}$ と取れば（これは $T_0 = 2.725$ K，$H_0 = 72$ km s^{-1} Mpc^{-1} と取ることに対応している），式（6.2.47）より角波数として $\ell_{\rm EQ} = 140$ を得る．したがって，この波数よりも大きな ℓ を持つ多重極展開係数は，放射優勢期に地平線の中に入ってきたゆらぎのみから生じていることになる．

スカラー型摂動とテンソル型摂動の両方に関するこれからの議論において，以下の無次元化された波数を用いるのが便利である．

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{2}q}{q_{\rm Eq}} = \frac{(q/a_0)\sqrt{\Omega_R}}{H_0\Omega_M} = \frac{q/a_0}{0.052\,\Omega_M h^2\,{\rm Mpc}^{-1}} \,. \tag{6.2.48}$$

これを用いると，長波長領域と短波長領域はそれぞれ $\kappa \ll 1$，$\kappa \gg 1$ に対応する．

6.3〜6.5 節で行う計算はどうしても複雑なものになり，また少々くどいかもしれない．そのための参考となるよう，これから導出しようとしている結果が何で

あるかを先に述べておこう．それは，物質優勢期のすべてに渡って成り立つ暗黒物質密度と重力場の摂動の表式 (6.5.15)，(6.5.16) と，物質優勢期において物質と放射の結合が切れる時刻まで成り立つ光子とバリオンプラズマの密度の摂動および速度ポテンシャルの表式 (6.5.17)，(6.5.18) である．

6.3 スカラー型摂動——長波長領域

まず初めに，物質と放射の密度が等しくなる時刻でもまだ波長が地平線の外にあるような，長波長の摂動を考えよう．6.2 節の最後で述べたように，そのような長波長の摂動は $\ell < 140$ の角波数に対応する宇宙マイクロ波背景放射の異方性を生み出している．放射優勢期には $a \propto \sqrt{t}$ および $H \propto a^{-2}$ なので，$q\bar{\rho}_R/aH\bar{\rho}_M$ は一定に保たれる．本節では，$\bar{\rho}_M = \bar{\rho}_R$ のときにこの量が 1 よりずっと小さい場合を扱うから，

$$\frac{q}{aH} \ll \frac{\bar{\rho}_M}{\bar{\rho}_R} \tag{6.3.1}$$

が放射優勢期のすべてにおいて成り立つ（右辺の量は $\bar{\rho}_M \equiv \bar{\rho}_D + \bar{\rho}_B$，および $\bar{\rho}_R \equiv \bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu$ と定義される）．一方，物質優勢期には $a \propto t^{2/3}$ および $H \propto a^{-3/2}$ なので，一定に保たれるのは $q^2\bar{\rho}_R/a^2H^2\bar{\rho}_M$ である．再び，本節で扱うのは $\bar{\rho}_M = \bar{\rho}_R$ のときにこの量が 1 よりずっと小さい場合なので，

$$\frac{q^2}{a^2H^2} \ll \frac{\bar{\rho}_M}{\bar{\rho}_R} \tag{6.3.2}$$

が物質優勢期のすべてにおいて成り立つ．

電子–陽電子対消滅の直後から現在時刻まですべての時期で成り立つ解析解を得ることはできないが，幸運にして以下の 2 つの時期では解析解が得られる．1 番目は摂動が地平線の外側にある時期で，2 番目は非相対論的物質が宇宙のエネルギー密度を支配する時期である．(ニュートリノによる非等方ストレスは両方の時期で無視できる．地平線の外で無視できるのはすでに述べたとおりであるが，ニュートリノのエネルギー密度が物質密度よりもずっと低ければ，その非等方ストレスも無視できる．) 本節で考える長波長領域，つまり物質と放射のエネルギー密度が等しくなる時刻でもまだ摂動が地平線の外にある場合では，これら 2 つの時期は**重なる**．よって，これらの時期が重なるところで 1 番目の時期の結果を 2 番目の時期の初期条件として用いることができる．

地平線の外側

最も興味ある摂動の解は断熱的な解で，その初期条件は式（6.2.8）で定義される $\delta_{\alpha q}$ を用いて $\delta_{Bq} = \delta_{\gamma q}$ と書くことができ，その発展は式（6.2.39)–(6.2.44）で記述される．$q/a \ll H$ のときの摂動の発展方程式は以下で与えられる．

$$\frac{d}{dt}\Big(a^2\psi_q\Big) = -4\pi G a^2\left[\bar{\rho}_D\delta_{Dq} + \Big(\bar{\rho}_B + \frac{8}{3}\bar{\rho}_\gamma\Big)\delta_{\gamma q} + \frac{8}{3}\bar{\rho}_\nu\delta_{\nu q}\right], \tag{6.3.3}$$

$$\dot{\delta}_{\gamma q} = \dot{\delta}_{\nu q} = \dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q\ , \tag{6.3.4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(1+R)\delta u_{\gamma q}}{a}\right) = -\frac{1}{3a}\delta_{\gamma q}\ , \tag{6.3.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta u_{\nu q}}{a}\right) = -\frac{1}{3a}\delta_{\nu q}\ . \tag{6.3.6}$$

これらの方程式は，いくつかの場合において解析的に解ける．最も重要なのは地平線の外ですべての $\delta_{\alpha q}$ が等しくなる断熱的な解の場合で，このときの式（6.3.3），(6.3.4）は，

$$\frac{d}{dt}\Big(a^2\psi_q\Big) = -4\pi G a^2\left[\bar{\rho}_M + \frac{8}{3}\bar{\rho}_R\right]\ \delta_q\ , \tag{6.3.7}$$

$$\dot{\delta}_q = -\psi_q \tag{6.3.8}$$

となる．ここで，

$$\delta_q \equiv \delta_{\gamma q} = \delta_{\nu q} = \delta_{Bq} = \delta_{Dq} \tag{6.3.9}$$

を定義した．また，$\bar{\rho}_M \equiv \bar{\rho}_B + \bar{\rho}_D$，$\bar{\rho}_R \equiv \bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu$ であることも思い出そう．式(6.3.8）を式（6.3.7）に代入すれば，δ_q に対する 2 階の微分方程式が得られる．

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\frac{d}{dt}\delta_q\right) = 4\pi G a^2\left[\bar{\rho}_M + \frac{8}{3}\bar{\rho}_R\right]\ \delta_q\ . \tag{6.3.10}$$

式（6.3.10）を解く際，独立変数を t から $y \equiv a/a_{\rm EQ} = \bar{\rho}_M/\bar{\rho}_R$ に置き換えると便利である．ここで，$a_{\rm EQ}$ は物質と放射の密度が等しくなる時刻でのロバートソン–ウォーカースケール因子を表す．新しい独立変数を使うと $\bar{\rho}_M = \rho_{\rm EQ}/y^3$，$\bar{\rho}_R = \rho_{\rm EQ}/y^4$ と書ける．$\rho_{\rm EQ}$ は物質と放射の密度が等しくなるときの値を表す．宇宙の膨張率にフリードマン方程式を用いれば，

$$\frac{d}{dt} = \frac{H_{\rm EQ}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1+y}}{y}\frac{d}{dy} \tag{6.3.11}$$

が得られ，式（6.3.10）は以下のように書き換えられる．

$$y\sqrt{1+y}\frac{d}{dy}\left(y\sqrt{1+y}\frac{d}{dy}\delta_q\right)-\frac{3}{2}\left(y+\frac{8}{3}\right)\delta_q=0, \tag{6.3.12}$$

これは 2 つの独立解を持つ．

$$\delta^{(a)}=y^{-2}\Big(16+8y-2y^2+y^3\Big)\,,\qquad \delta^{(b)}=y^{-2}\sqrt{1+y}\,.$$

我々が求めるのは，6.2 節の解 1 のように $t\to 0$ の極限で $t\propto y^2$ に比例する解だから，$y\to 0$ において $5y^2/8$ となる $\delta^{(a)}-16\delta^{(b)}$ に比例するものを解としなくてはいけない．この解を式（6.2.27）に合うように規格化すれば，以下の結果が得られる．

$$\delta_q=\frac{4q^2\mathcal{R}_q^o}{5H_{\rm EQ}^2a_{\rm EQ}^2y^2}\left(16+8y-2y^2+y^3-16\sqrt{1+y}\right), \tag{6.3.13}$$

$$\delta u_{\gamma q}=-\frac{\sqrt{2}y}{3H_{\rm EQ}(1+R)}\int_0^y\frac{dy'}{\sqrt{1+y'}}\delta_q(y')\,, \tag{6.3.14}$$

$$\delta u_{\nu q}=-\frac{\sqrt{2}y}{3H_{\rm EQ}}\int_0^y\frac{dy'}{\sqrt{1+y'}}\delta_q(y')\,, \tag{6.3.15}$$

$$\psi_q=\frac{\sqrt{2}q^2\mathcal{R}_q^o}{5H_{\rm EQ}a_{\rm EQ}^2y^4}\left(2\sqrt{1+y}\Big(32+8y-y^3\Big)-64-48\,y\right). \tag{6.3.16}$$

この規格化を用いれば，$\mathcal{R}_q$ は地平線の外で時間によらない値 $\mathcal{R}_q^o$ を持つ．

物質優勢期

物質優勢期（$\bar\rho_M\gg\bar\rho_R$）には，摂動が地平線の外にあるかどうかに関わらず式（6.2.39）–（6.2.44）を解析的に解くことができる．さらなる簡単化のため，$\bar\rho_B\ll\bar\rho_D$ と仮定しよう（実際のこの比は約 0.2 である）．しかし，物質優勢期には $\bar\rho_\gamma$ もまた $\bar\rho_D$ よりずっと小さいので，$\bar\rho_B$ は $\bar\rho_\gamma$ と比べて無視できない．さて，物質優勢期には $a\propto t^{2/3}$ および $8\pi G\bar\rho_M/3=H^2=4/9t^2$ であることを思い出そう[*1]．式（6.2.39）の右辺で $\bar\rho_D$ に比例する項のみを残す一方，q/a と H の大きさの間に何の関係も仮定しなければ，式（6.2.39）–（6.2.44）は以下のようになる．

$$\frac{d}{dt}\Big(t^{4/3}\psi_q\Big)=-\frac{2}{3}t^{-2/3}\delta_{Dq}\,, \tag{6.3.17}$$

$$\dot\delta_{\gamma q}-(q^2/a^2)\delta u_{\gamma q}=-\psi_q, \tag{6.3.18}$$

---

*1　本節では，物質優勢期で $a\propto t^{2/3}$ となるように時刻のゼロ点を選ぶ．言い換えれば，ここでの時刻 t は $2/3H$ で定義される．

$$\dot{\delta}_{\nu q} - (q^2/a^2)\delta u_{\nu q} = -\psi_q, \tag{6.3.19}$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q, \tag{6.3.20}$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-2/3}(1+R)\delta u_{\gamma q}\right) = -\frac{1}{3}t^{-2/3}\delta_{\gamma q}, \tag{6.3.21}$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-2/3}\delta u_{\nu q}\right) = -\frac{1}{3}t^{-2/3}\delta_{\nu q}, \tag{6.3.22}$$

ここで再び，$R \equiv 3\bar{\rho}_B/4\bar{\rho}_R \propto a$ を定義した．

式（6.3.17），(6.3.20）の解は 2 つあり，1 つは $\psi_q \propto t^{-1/3}$ と $\delta_{Dq} \propto t^{2/3}$，もう 1 つは $\psi_q \propto t^{-2}$，$\delta_{Dq} \propto t^{-1}$ である．これらの解の係数を決めるため，先ほど得た地平線の外での解，式（6.3.13），(6.3.16）と比べよう．比較はこれらの結果が両方とも使える時期，つまり $q/a \ll H$ と $\bar{\rho}_R \ll \bar{\rho}_M$ の両方が満たされる時期（すなわち $y \gg 1$）で行う．6.2 節で定義した断熱的な解 1 に対し，式（6.3.13），(6.3.16）は $y \gg 1$ の極限で，

$$\delta_{Dq} = \frac{4q^2 y\mathcal{R}_q^o}{5H_{\mathrm{EQ}}^2 a_{\mathrm{EQ}}^2} = \frac{9q^2t^2\mathcal{R}_q^o}{10a^2}\ , \tag{6.3.23}$$

$$\psi_q = \frac{-2\sqrt{2}q^2\mathcal{R}_q^o}{5H_{\mathrm{EQ}}a_{\mathrm{EQ}}^2 y^{1/2}} = -\frac{3q^2t\mathcal{R}_q^o}{5a^2} \tag{6.3.24}$$

を与える．(式（6.3.23）–(6.3.24）の最後の等式は，$\bar{\rho}_R \ll \bar{\rho}_D$ のときの膨張率の式 $H = 2/3t = H_{\mathrm{EQ}}/\sqrt{2}y^{3/2}$ を用いて H_{EQ} を消去することで得られる．）物質優勢期 $a \propto t^{2/3}$ では，これらの解は確かに $\delta_{Dq} \propto t^{2/3}$，$\psi_q \propto t^{-1/3}$ に比例し，先ほど得た結果と適合している．また，物質優勢期の断熱的な解 2 に対しては $\psi_q \propto t^{-2}$，$\delta_{Dq} \propto t^{-1}$ が得られることもたやすく導ける．これより，もし断熱的な解 1 が地平線の外で支配的であるなら，物質優勢期の暗黒物質密度の摂動と重力場の摂動はそれぞれ式（6.3.23）と（6.3.24）で与えられると結論できる．

ここでちょっと立ち止まり，2.6 節で与えた，より初歩的な扱いとの関係を見ておこう．最終散乱の時刻でのニュートンの重力ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ が暗黒物質密度の摂動に支配されていたと仮定すれば，そのフーリエ変換はポアソン方程式のラプラシアンを $-q^2/a^2$ に置き換えることで以下のように得られる．

$$\delta\phi(\boldsymbol{q}, t) = -4\pi G\Big(a^2(t)/q^2\Big)\delta\rho_D(\boldsymbol{q}, t) = -4\pi G\Big(a^2(t)/q^2\Big)\bar{\rho}_D(t)\delta_{Dq}(t)\ .$$

式（6.3.23）で与えられる断熱的な解 1，およびフリードマン方程式 $H^2 =$

$(2/3t)^2 = 8\pi G\bar{\rho}_D/3$ を用いれば，$\delta\phi(\boldsymbol{q},t)$ は時間によらない値，

$$\delta\phi(\boldsymbol{q}) = -\frac{3}{5}\alpha(\boldsymbol{q})\mathcal{R}_q^o$$

を持つことが導ける．そして $\langle\delta\phi(\boldsymbol{q})\delta\phi(\boldsymbol{q}')\rangle = \mathcal{P}_\phi(q)\delta^3(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}')$ を計算すれば，2.6 節で導入した相関関数 $\mathcal{P}_\phi$ が以下で与えられることがわかる．

$$\mathcal{P}_\phi(q) = \frac{9}{25}|\mathcal{R}_q^o|^2 \ .$$

したがって，2.6 節で見た，温度ゆらぎの多重極展開係数 $C_\ell = 8\pi N_\phi^2/9\ell(\ell+1)$ を与える相関関数 $\mathcal{P}_\phi(q) = N_\phi^2 q^{-3}$ は，$|\mathcal{R}_q^o|^2 = N^2 q^{-3}$，および $N_\phi^2 = 9\,N^2/25$ と仮定することに対応している．

冷たい暗黒物質が重力場を支配すると仮定していても，7 章で宇宙マイクロ波背景放射の異方性に寄与する温度ゆらぎとドップラー効果を計算するためには，光子のエネルギー密度の摂動と光子–バリオン流体の速度も考えなくてはいけない．式（6.3.18），(6.3.21）は 2 つの未定変数 $\delta_{\gamma q}$，$\delta u_{\gamma q}$ に対する 1 階の非斉次微分方程式で，その非斉次項は ψ_q に比例している．驚くべきことに，式（6.3.24）で与えられる ψ_q を用いると，これらの方程式は解析的に解ける．

$$\delta_{\gamma q}^{(1)} = \frac{3q^2t^2(1+3R)\mathcal{R}_q^o}{5a^2(t^2q^2/a^2+2R)}\ , \quad \delta u_{\gamma q}^{(1)} = -\frac{3t^3q^2\mathcal{R}_q^o}{5a^2(t^2q^2/a^2+2R)}\ . \qquad (6.3.25)$$

（残りの方程式（6.3.19），(6.3.22）はニュートリノ摂動を計算するときのみ必要なので，ここでは考えない.）

式（6.3.25）は特解を与えるので，これに式（6.3.18），(6.3.21）の斉次項から得られる式，

$$\dot{\delta}_{\gamma q}^{(2)} = (q^2/a^2)\delta u_{\gamma q}^{(2)}\ , \qquad \frac{d}{dt}\left(t^{-2/3}(1+R)\delta u_{\gamma q}^{(2)}\right) = -\frac{1}{3}t^{-2/3}\delta_{\gamma q}^{(2)} \qquad (6.3.26)$$

の解を加えなくてはいけない．速度ポテンシャルを消去すれば，

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-2/3}(1+R)a^2\frac{d}{dt}\delta_{\gamma q}^{(2)}\right) + \frac{q^2}{3}t^{-2/3}\delta_{\gamma q}^{(2)} = 0 \qquad (6.3.27)$$

が得られる．解の係数は，$q^2t^2/a^2 \ll 1$ のときに $\delta_{\gamma q}^{(1)} + \delta_{\gamma q}^{(2)}$ が先ほど得られた地平線の外での解と合うように選ぶ．

物質優勢期には $R \propto a \propto t^{2/3}$ であることを使えば，式（6.3.27）の一般解は，

$$F\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{1-16\eta},\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{1-16\eta},\ \frac{1}{2},\ -R\right)\ ,$$

$$\sqrt{R}\,F\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{1-16\eta},\ \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{1-16\eta},\ \frac{3}{2},\ -R\right)$$

の線形結合で書ける．F はガウスの超幾何関数（よく ${}_2F_1$ とも書かれる）で，η は，

$$\eta \equiv \frac{3q^2t^2}{4a^2R}$$

で定義され，物質優勢期には時間によらず一定となる量である．しかし，この表式は解の振る舞いを理解するのにはあまり有用ではない．そこで，もう 1 つの仮定として，ゆらぎの波長が（$\eta \gg 1$ という意味で）そこそこ長いとしてみよう．つまり，q は物質と放射の密度が等しい時刻において $q/aH \ll 1$ となるほど小さいが，物質優勢期では以下の条件を満たす程度に大きいとする．

$$R \ll t^2q^2/a^2 \ll \bar{\rho}_M/\bar{\rho}_R\ . \tag{6.3.28}$$

物質優勢期にはこの不等式のそれぞれの項は $t^{2/3}$ に比例するから，式（6.3.28）が物質優勢期のある時刻で成り立てば，物質優勢期のすべての時刻で成り立つ．この仮定を用いると，式（6.3.27）の解を初等関数で書けるようになる．

波長が非常に長い極限，つまり物質優勢期のすべてで $t^2q^2/a^2 \ll R$ となる極限では，式（6.3.18），(6.3.21）の一般解を t^2q^2/a^2R に関する級数展開で求められる．しかしここでは，波長がそこそこ長い場合の方に興味がある．なぜなら，6.5 節で見るように，滑らかな外挿によって短波長領域につなげられるのはこの場合だからである．

不等式（6.3.28）より，摂動が地平線の外にあるときから地平線に入って少し時間が経ったときまで $R \ll 1$ が満たされることがわかる．$R \ll 1$ が満たされている間は，斉次方程式（6.3.26）は厳密解，

$$\delta^{(2)}_{\gamma q} = c_q\cos(\sqrt{3}qt/a) + d_q\sin(\sqrt{3}qt/a)\ , \tag{6.3.29}$$

$$\delta u^{(2)}_{\gamma q} = \frac{a}{\sqrt{3}q}\left[-c_q\sin(\sqrt{3}qt/a) + d_q\cos(\sqrt{3}qt/a)\right] \tag{6.3.30}$$

を持つ．c_q，d_q は定数である．これに式（6.3.25）で与えられる非斉次解を足さなくてはいけないが，$R \ll q^2t^2/a^2$ の極限ではそれは，

$$\delta^{(1)}_{\gamma q} = \frac{3(1+3R)\mathcal{R}^o_q}{5}\ , \quad \delta u^{(1)}_{\gamma q} = -\frac{3t\mathcal{R}^o_q}{5} \tag{6.3.31}$$

となる．定数 c_q，d_q を決めるには，$qt/a \ll 1$ のとき（式（6.3.28）より，これは $R \ll 1$ であることも意味する），全光子密度の摂動 $\delta^{(1)}_{\gamma q} + \delta^{(2)}_{\gamma q}$ が $\delta_{Dq} \to$

$9q^2t^2\mathcal{R}_q^o/10a^2$ に近づくという条件を使えば良い．これより，

$$c_q = -\frac{3\mathcal{R}_q^o}{5}\ , \qquad d_q = 0 \tag{6.3.32}$$

が得られ，$R \ll 1$ のときの $\delta_{\gamma q}^{(2)}$ として，

$$\delta_{\gamma q}^{(2)} = -\frac{3\mathcal{R}_q^o}{5}\cos(\sqrt{3}qt/a) \tag{6.3.33}$$

を得る．

最終的には R は無視できなくなるが，式（6.3.28）の仮定のもとでは，R が大きくなる頃には qt/a もまた 1 よりずっと大きくなる．このとき，斉次方程式（6.3.26）は WKB 近似を用いて解ける．式（6.3.27）を見ると，$qt/a \gg 1$ のとき密度ゆらぎは激しく振動し，その位相は以下で与えられることがわかる．

$$\varphi \equiv \int_0^t \frac{q\,dt}{a\sqrt{3(1+R)}} = \frac{\sqrt{3}qt}{a\sqrt{R}}\ln\left(\sqrt{R}+\sqrt{1+R}\right)\ . \tag{6.3.34}$$

t の代わりに φ を独立変数として用い，物質優勢期には $a \propto t^{2/3}$ であることに気づけば，式（6.3.27）は以下の形に書ける．

$$\frac{d^2\delta_{\gamma q}}{d\varphi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\ \ln(1+R)}{d\varphi}\right)\frac{d\delta_{\gamma q}}{d\varphi} + \delta_{\gamma q} = 0\ .$$

この式の解の形を $\mathcal{A}e^{\pm i\varphi}$ として $\mathcal{A}$ を求めよう．$\mathcal{A}$ の φ 依存性は弱いとすれば，左辺第 1 項の $\mathcal{A}$ の 2 階微分は無視でき，左辺第 2 項の $\mathcal{A}$ の 1 階微分も無視できる（この項は $d\ln(1+R)/d\varphi$ がかかっているのですでに小さい）．これより $d\mathcal{A}/d\varphi \simeq -(\mathcal{A}/4)d\ln(1+R)/d\varphi$ が得られ，式（6.3.27）の一般解の WKB 近似は以下で与えられる．

$$\delta_{\gamma q}^{(2\pm)} \propto (1+R)^{-1/4}\exp(\pm i\varphi)\ .$$

これらの解の線形結合のうち $R \ll 1$ のときの結果となめらかにつながる解を得るには，式（6.3.33）の余弦の引数を φ に置き換え，$(1+R)^{-1/4}$ をかければ良い．そして式（6.3.31）で与えられる非斉次解の極限を加えれば，物質優勢期におけるそこそこ長い波長の光子とバリオン密度の摂動の解として，

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{Bq} = \frac{3\mathcal{R}_q^o}{5}\left[1+3R-(1+R)^{-1/4}\cos\varphi\right] \tag{6.3.35}$$

が得られる．式（6.3.18），(6.3.24）を用いれば，速度ポテンシャルも以下のよう

に計算できる.

$$\delta u_{\gamma q} = \frac{3t\mathcal{R}_q^o}{5}\left[-1 + \frac{a}{\sqrt{3}qt(1+R)^{3/4}}\sin\varphi\right] . \tag{6.3.36}$$

(ここで，角括弧内の Ra^2/t^2q^2 に比例する項は無視した.) 計算結果のチェックとして，物質優勢期の初期 ($qt/a \ll 1$) には $R \ll 1$，したがって $\varphi \to \sqrt{3}qt/a \to 0$ であり，式 (6.3.35) から $\delta_{\gamma q} = \delta_{Bq} \to 9q^2t^2\mathcal{R}_q^o/10a^2$ が得られることを確認しよう．これは式 (6.3.23) と一致するし，断熱的な摂動ではすべての $\delta_{\alpha q}$ が地平線の外で等しくなるという条件とも合致している．たとえ不等式 (6.3.28) が満たされなくとも，$R \ll 1$ と $qt/a \ll 1$ の両方が成り立っていれば式 (6.3.35) は断熱条件を満たす.

波長がそこそこ長い場合の $\delta_{\gamma q} = \delta_{Bq}$ および $\delta u_{\gamma q}$ の式 (6.3.35)，(6.3.36) は，最終散乱の時刻までしか成り立たない．一方，最終散乱以降の宇宙の密度が暗黒物質に支配されていれば，δ_{Dq} と ψ_q は放射とバリオンプラズマの脱結合に影響されず，真空のエネルギーや (もし存在すれば) 空間曲率が重要になるか，あるいは摂動が大きくなり過ぎて 1 次の摂動として扱えなくなるまでは，引き続き式 (6.3.23)，(6.3.24) で与えられる.

6.4 スカラー型摂動——短波長領域

次に，物質と放射の密度が等しい時刻ですでに地平線の中にあるような短い波長を持つ断熱的摂動を考えよう．6.3 節の最後で述べたように，そのような短波長の摂動は $\ell \gg 140$ の角波数に対応する宇宙マイクロ波背景放射の異方性を生み出し，また，銀河や銀河団のような構造の形成を引き起こす重力不安定性のきっかけにもなる．6.3 節の最初で用いたのと同じ論理に基づき，放射優勢期にはこれらの摂動の波長は，

$$\frac{q}{aH} \gg \frac{\bar{\rho}_M}{\bar{\rho}_R} \tag{6.4.1}$$

を満たし，物質優勢期には，

$$\frac{q^2}{a^2H^2} \gg \frac{\bar{\rho}_M}{\bar{\rho}_R} \tag{6.4.2}$$

を満たすものとする．ここで，いつものように $\bar{\rho}_M \equiv \bar{\rho}_D + \bar{\rho}_B$，$\bar{\rho}_R \equiv \bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu$ である.

ここでは断熱的な摂動を考えているから，6.2 節で見たように，$\delta_{\alpha q} \equiv \delta\rho_{\alpha q}/(\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha)$ のように定義された摂動は条件 $\delta_{Bq} = \delta_{\gamma q}$ を満たす．その結果，摂動の進化は式（6.2.39）–（6.2.44）で記述される．ここでも，電子–陽電子対消滅の直後から現在時刻まですべての時期で成り立つ解析解を得ることはできないが，幸運にして以下の 2 つの，**互いに重なる**時期では解析解が得られる．つまり，1 番目は宇宙のエネルギー密度が放射（光子とニュートリノ）によって支配されている時期で，2 番目は摂動が十分地平線の中にある時期である．

放射優勢期

$\bar{\rho}_R \gg \bar{\rho}_M$ となる放射優勢期では，式（6.2.39）–（6.2.44）の解析解を見つけることができる．ここで今は，とりあえず，重力場の方程式（6.2.39）の右辺にある光子とニュートリノの密度ゆらぎを含む項が，暗黒物質密度のゆらぎを含む項よりずっと大きいと仮定しよう．この仮定の正しさは後に本節中で確認する．放射優勢期には $a \propto t^{1/2}$ だから，式（6.2.39）–（6.2.44）は以下の形を取る．

$$\frac{d}{dt}\Big(t\psi_q\Big) = -\frac{32\pi G t}{3}\Big(\bar{\rho}_\gamma \delta_{\gamma q} + \bar{\rho}_\nu \delta_{\nu q}\Big) , \tag{6.4.3}$$

$$\dot{\delta}_{\gamma q} - (q^2/a^2)\delta u_{\gamma q} = -\psi_q , \tag{6.4.4}$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q , \tag{6.4.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-1/2}\delta u_{\gamma q}\right) = -\frac{1}{3}t^{-1/2}\delta_{\gamma q} , \tag{6.4.6}$$

$$\dot{\delta}_{\nu q} - (q^2/a^2)\delta u_{\nu q} = -\psi_q , \tag{6.4.7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-1/2}\delta u_{\nu q}\right) = -\frac{1}{3}t^{-1/2}\delta_{\nu q} . \tag{6.4.8}$$

ここでは断熱的な解に興味があるから，早期においてすべての $\delta_{\alpha q}$ は等しく，またすべての $\delta u_{\alpha q}$ も等しくなる．一方，光子とニュートリノを記述する微分方程式は同じなので，これらの断熱的な解は，

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{\nu q} , \qquad \delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q}$$

を満たす．すると，式（6.4.3）は以下のように簡単化できる．

$$\frac{d}{dt}\Big(t\psi_q\Big) = -\frac{32\pi G\bar{\rho}_R t}{3}\delta_{\gamma q} = -\frac{1}{t}\delta_{\gamma q}\ .$$

さらに，断熱的な解のうち摂動が成長する方の解（解 1）の初期条件は式（6.2.27）–（6.2.30）で与えられる．$q/aH \ll 1$ のときには，

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{Bq} = \delta_{\nu q} \longrightarrow \frac{q^2 t^2 \mathcal{R}_q^o}{a^2}\ , \quad \delta_{Dq} \longrightarrow \frac{q^2 t^2 \mathcal{R}_q^o}{a^2}\ , \tag{6.4.9}$$

$$\psi_q \longrightarrow -\frac{tq^2\mathcal{R}_q^o}{a^2}\ , \quad \delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} \longrightarrow -\frac{2t^3 q^2 \mathcal{R}_q^o}{9a^2} \tag{6.4.10}$$

で，$\mathcal{R}_q^o$ は地平線の外での $\mathcal{R}_q$ の値である．読者には，これらの初期条件を満たす式（6.4.3）–（6.4.8）の解が以下で与えられることを確認してみてほしい[*1]．

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{Bq} = \delta_{\nu q} = 3\mathcal{R}_q^o\left(\frac{2}{\Theta}\sin\Theta - \left(1-\frac{2}{\Theta^2}\right)\cos\Theta - \frac{2}{\Theta^2}\right), \tag{6.4.11}$$

$$\psi_q = \frac{3\mathcal{R}_q^o}{t}\left(\frac{2}{\Theta}\sin\Theta + \frac{2}{\Theta^2}\cos\Theta - \frac{2}{\Theta^2} - 1\right)\ , \tag{6.4.12}$$

$$\delta_{Dq} = -6\mathcal{R}_q^o\int_0^\Theta\left(\frac{2}{\vartheta^3}\sin\vartheta + \frac{2}{\vartheta^4}\cos\vartheta - \frac{2}{\vartheta^4} - \frac{1}{\vartheta^2}\right)\vartheta\, d\vartheta\ , \tag{6.4.13}$$

$$\delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = 4t\mathcal{R}_q^0\left(\frac{\sin\Theta}{2\Theta} - \frac{1-\cos\Theta}{\Theta^2}\right)\ , \tag{6.4.14}$$

ここで

$$\Theta \equiv \frac{2qt}{\sqrt{3}a} \tag{6.4.15}$$

である．さて，Θ が小さくも大きくもなくほどほどの値を取るときには，すべての $\delta_{\alpha q}$ の大きさが同程度になることに着目しよう．この結果から，$\bar{\rho}_R$ が $\bar{\rho}_D$ よりずっと大きいとき，さらに q/aH が 1 よりそれほど大きくないときに，式（6.2.39）の右辺の物質ゆらぎを含む項が無視できることがわかる．摂動が地平線のずっと内側にあるとき（Θ が大きくなるとき）でも式（6.2.39）の物質ゆらぎの項を無視しても良い条件は，以下で議論する．

地平線のずっと内側

$\bar{\rho}_D$ が $\bar{\rho}_R$ と比べて無視できるか否かに関わらず，波長が（$q/a \gg H$ という意味で）地平線のずっと内側にあるときにも式（6.2.39）–（6.2.44）の解を求めるこ

[*1] 独立変数を t から Θ に変えると，式（6.4.3），(6.4.4)，(6.4.6) は $\delta_{\gamma q} = \delta_{Bq} = \delta_{\nu q}$，$\delta u_{\gamma q}/t = \delta u_{\nu q}/t$，$t\psi_q$ に関するパラメータのない 3 本の微分方程式系として書ける．式（6.4.9），(6.4.10) で与えられる初期条件を満たす解を見つければ，式（6.4.5）を積分することで δ_{Dq} が得られる．規格化因子を除けば，様々なゆらぎに対するこの解は，S. Bashinsky, E. Bertschinger *Phys. Rev. D* **65**, 123008 (2002) の式 (48) で与えられる，異なるゲージにおけるニュートンポテンシャルの解と等価である．

とができる．$q/a \gg H$ のときには次の 2 つの異なる種類の解を区別できる．すなわち，摂動に作用する時間微分が H 程度の大きさとなる「遅い解」と，ある項の時間微分が q/a 程度の大きさ（そして他の項は H 程度の大きさ）となる「速い解」である．式（6.2.39)–(6.2.44）は 6 本の微分方程式系なので，6 個の独立解を持つ．これより 4 つの独立な速い解と 2 つの独立な遅い解を見つけることができるので，速い解，遅い解と呼ぶもの以外の解は存在しない．

1．速い解

これまではニュートリノの非等方ストレスを無視してきたが，激しく振動する速い解を考える際には，ニュートリノの平均自由行程が長いためにニュートリノの密度と速度の摂動が減衰する効果を含めなくてはいけない．地平線のずっと内側にある速い解を考える際には，単純に，この減衰によって式（6.2.39）の右辺の $\delta_{\nu q}$ が無視できると仮定することにしよう．他の摂動の速い解に目を向けると，速い解の変化率は q/a 程度の大きさなので，式（6.2.41）より δ_{Dq} は $\psi_q/(q/a)$ 程度の大きさだとわかる．したがって式（6.2.39）の右辺の暗黒物質の項は

$$4\pi G a^2 \bar{\rho_D} \psi_q/(q/a) \leqq 3H^2 a^2 \psi_q / 2(q/a)\,,$$

程度の大きさになる．一方，(6.2.39）の左辺は $(q/a)a^2\psi_q$ 程度の大きさだから，暗黒物質の項は式（6.2.39）の左辺よりも因子 $\leqq H^2/(q/a)^2$ だけ小さい．摂動が地平線のずっと内側にあるときにはこの因子は 1 よりもずっと小さいから，式（6.2.39）から暗黒物質の項を落とせば，$\delta_{\gamma q}$ は少なくとも $(q/a)\psi_q/H^2$ 程度の大きさでなければならないことがわかる．すると式（6.2.43）から $\delta u_{\gamma q}$ が $\delta_{\gamma q}/(q/a)$ 程度の大きさ，すなわち ψ_q/H^2 程度の大きさであることがわかる．これより，式（6.2.40）の左辺の項は両方とも ψ_q の $q^2/a^2H^2 \gg 1$ 倍程度の大きさだということがわかり，右辺の ψ_q を無視できる．(物理的にいえば，波長が短いので，バリオン–光子プラズマに働く力は重力よりも圧力の方がずっと強いということである.）よって，式（6.2.40），(6.2.43），(6.2.39），(6.2.41）から $H^2/(q/a)^2$ 程度の大きさの因子によって小さく抑えられているすべての項を無視すれば（ただし，a に関する微分の項は $H/(q/a)$ 倍程度にしか小さくならないので無視**しない**），以下の方程式を得る．

$$\dot{\delta}_{\gamma q} = (q^2/a^2)\delta u_{\gamma q} \tag{6.4.16}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(1+R)\delta u_{\gamma q}}{a}\right) = -\frac{1}{3a}\delta_{\gamma q}\,, \tag{6.4.17}$$

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\psi_q\right) = -\frac{16\pi G a^2}{3}\bar{\rho}_\gamma(R+2)\delta_{\gamma q}\ , \tag{6.4.18}$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q\ , \tag{6.4.19}$$

ここで，以前のように $R \equiv 3\bar{\rho}_B/4\bar{\rho}_\gamma$ である．式（6.4.16），(6.4.17) からは 2 つの独立解が得られ，$\delta_{\gamma q}$ と $\delta u_{\gamma q}$ を与える．これらを式（6.4.18）に用い，かつ速い解だけに着目すれば ψ_q の唯一解が得られ，さらに式（6.4.19）から δ_{Dq} の唯一解が得られる．($a^2\psi_q$ や δ_{Dq} に定数を足したものも解であるが，それらは速い解ではなく遅い解に寄与する．）式（6.2.42），(6.2.44) から得られる 2 つの（非常に減衰した）ニュートリノ摂動の解を合わせれば，約束どおり，確かに速い解として 4 つの独立解が得られる．

式（6.4.16），(6.4.17) から $\delta u_{\gamma q}$ を消去すれば，$\delta_{\gamma q}$ のみに関する 2 階の微分方程式を得る．

$$\frac{d}{dt}\left(a(1+R)\frac{d}{dt}\delta_{\gamma q}\right) + \frac{q^2}{3a}\delta_{\gamma q} = 0\ . \tag{6.4.20}$$

もし a，R が定数であれば，これは単に音波を記述する波動方程式である．その物理的波数は q/a で，音速は $v_s = 1/\sqrt{3(1+R)}$ で与えられる*2．a と R が比較的ゆっくりと，H 程度の変化率で時間変化している場合には，式（6.4.20）は $q/a \gg H$ の場合に WKB 近似を用いて解ける．その準備として，独立変数を位相 $\varphi \equiv q\int_0^t dt/a\sqrt{3(1+R)}$ に取り，式（6.4.20）を以下のように書き換えよう．

$$\frac{d^2\delta_{\gamma q}}{d\varphi^2} + \frac{1}{2}\frac{d\ln(1+R)}{d\varphi}\frac{d\delta_{\gamma q}}{d\varphi} + \delta_{\gamma q} = 0\ .$$

解を $\delta_{\gamma q} = \mathcal{A}\exp(\pm i\varphi)$ の形に書き，左辺第 1 項の $d^2\mathcal{A}/d\varphi^2$ を無視し，さらに左辺第 2 項の $d\mathcal{A}/d\varphi$ を無視すれば（この項は $d\ln(1+R)/d\varphi$ の因子がかかっているからすでに小さい）$d\mathcal{A}/d\varphi = -(\mathcal{A}/4)d\ln(1+R)/d\varphi$ が得られ，したがって以下の WKB 近似の解が得られる*3．

$$\delta_{\gamma q}^{\pm} = (1+R)^{-1/4}\exp\left[\pm iq\int_0^t \frac{dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right]\ . \tag{6.4.21}$$

*2 エントロピーが一定であるという条件から $d\rho_B/\bar{\rho}_B = d\rho_\gamma/(\bar{\rho}_\gamma + \bar{p}_\gamma) = (3/4)d\rho_\gamma/\bar{\rho}_\gamma$ が得られ，したがって音速の 2 乗は，$v_s^2 = dp/d\rho = d\rho_\gamma/3(d\rho_\gamma + d\rho_B) = 1/3(1+R)$ で与えられる．

*3 P. J. E. Peebles, J. T. Yu, *Astrophys. J.* **162**, 815 (1970). R. A. Sunyaev, Ya. B. Zel'dovich, *Astrophys. & Space Sci.* **7**, 3 (1970).

遅い解では重要でないが，速い解では考慮に入れなくてはいけない効果がある．音波の物理的波数 k が，それが伝播する相対論的な流体を構成する粒子の平均自由行程の逆数よりも大きいときには，粘性と熱伝導によって音波の振幅が減衰する．その減衰率は以下で与えられる[*4]．

$$\Gamma = \frac{k^2}{2(\rho+p)}\left\{\zeta + \frac{4}{3}\eta + \chi\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_n^{-1} \times\left[\rho+p-2T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_n + v_s^2 T\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_n - \frac{n}{v_s^2}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_T\right]\right\}, \quad (6.4.22)$$

ここで η，χ，ζ はそれぞれ剪断粘性率，熱伝導率，体積粘性率で，付録 B で定義される量である．v_s は音速，n は流体の性質が依存する粒子の数密度で，下付きの添字は偏微分を計算する際に変化させずに固定する量を示す．バリオン–光子流体の場合，n はバリオンの数密度に対応し，その他の量は $\rho = \rho_B + \rho_\gamma$，$p = \rho_\gamma/3$，$\rho_B \propto n$，$\rho_\gamma \propto T^4$ である．また，すでに見たように $v_s = 1/\sqrt{3(1+R)}$ だから，($k = q/a$ と書けば）減衰率は以下で与えられる．

$$\Gamma = \frac{3q^2}{8a^2\bar{\rho}_\gamma(1+R)}\left\{\zeta + \frac{4}{3}\eta + \frac{\chi T R^2}{3(1+R)}\right\}. \quad (6.4.23)$$

平均自由時間 $t_\gamma = 1/\sigma_T n_e$ を持つ非相対論的プラズマと相互作用する光子を考えれば，その粘性率と熱伝導率は，

$$\eta = \frac{16}{45}\bar{\rho}_\gamma t_\gamma, \qquad \chi T = \frac{4}{3}\bar{\rho}_\gamma t_\gamma, \qquad \zeta = 0 \quad (6.4.24)$$

で与えられ，この場合の減衰率は以下の公式で与えられる[*5]．

$$\Gamma = \frac{q^2 t_\gamma}{6a^2(1+R)}\left\{\frac{16}{15} + \frac{R^2}{1+R}\right\}. \quad (6.4.25)$$

減衰の効果により，式 (6.4.21) で与えられる速い解の音波の振幅は，以下のよ

[*4] S. Weinberg, *Astrophys. J.* **168**, 175 (1971).

[*5] この減衰率の公式は最初に，N. Kaiser, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **202**, 1169 (1983) によって与えられた．本書では付録 H でその導出を与える．剪断粘性率と熱伝導率の公式は，音波の減衰率の式 (6.4.23) と (6.4.25) を比較して導出した．エネルギーと運動量が相対論的な粒子によって輸送されているので，体積粘性はゼロである（脚注 4 を参照）．脚注 4 の文献で計算された減衰率は，χ と ζ に対しては正しい値を与えるが，η はカイザーによって与えられた正しい値（式 (6.4.24)）に比べて 3/4 だけ小さい．この違いは，脚注 4 の文献の結果が，L. H. Thomas, *Quart. J. Math.* (*Oxford*) **1**, 239 (1930) の計算に基づいており，そこでは散乱が等方的で光子の偏光が無視できると仮定されていたことによる（より前の文献 C. Misner, *Astrophys. J.* **151**, 431 (1968) でも同じ値の η が与えられていた）．カイザーの結果はトムソン散乱の微分散乱断面積を正しく計算し，光子の偏光も考慮に入れているので，脚注 4 の文献および G&C の 15 章で与えられている η の値よりも正しい．

うに補正される.

$$\delta_{\gamma q}^{\pm} = (1+R)^{-1/4} \exp\left[\pm iq \int_0^t \frac{dt}{a\sqrt{3(1+R)}} - \int_0^t \Gamma dt\right] . \qquad (6.4.26)$$

この速い解の減衰は**シルク減衰**として知られている[*6]. この結果を用いれば, 速い解の $\delta u_{\gamma q}^{\pm}$ は式 (6.4.16) から, $\psi_q^{\pm}$ は式 (6.4.18) から, そして $\delta_{Dq}^{\pm}$ は式 (6.4.19) からそれぞれ得られる.

2. 遅い解

変化率が $H = O(1/t)$ 程度の遅い解に対しても, 速い解に対して用いたのと同様な議論を用い, q/aH の冪の数を数えることで解が得られるが, 結果は大きく異なる. 式 (6.2.41), (6.2.43), (6.2.44) より, δ_{Dq} は ψ_q/H 程度の大きさであるが, $\delta_{\gamma q}$, $\delta_{\nu q}$ はそれぞれ $H\delta u_{\gamma q}$, $H\delta u_{\nu q}$ 程度の大きさであることがわかる. すると式 (6.2.40), (6.2.42) の左辺の $\dot{\delta}_{\gamma q}$, $\dot{\delta}_{\nu q}$ は $H^2\delta u_{\gamma q}$, $H^2\delta u_{\nu q}$ 程度の大きさだとわかるので, $(q^2/a^2)\delta u_{\gamma q}$, $(q^2/a^2)\delta u_{\nu q}$ と比べて H^2a^2/q^2 程度の因子だけ小さく, 無視して良い. これより,

$$(q^2/a^2)\delta u_{\gamma q} = (q^2/a^2)\delta u_{\nu q} = \psi_q \qquad (6.4.27)$$

が得られ, 式 (6.2.43), (6.2.44) より $\delta_{\gamma q}$, $\delta_{\nu q}$ は $(a^2H/q^2)\psi_q$ 程度の大きさであることがわかる.

式 (6.2.39) の右辺の光子とニュートリノの項と暗黒物質の項の比は,

$$\frac{\text{光子とニュートリノの項}}{\text{暗黒物質の項}} = O\left[\left(\frac{\bar{\rho}_B + 8\bar{\rho}_R/3}{\bar{\rho}_D}\right)\left(\frac{a^2H^2}{q^2}\right)\right]$$

程度の大きさとなる. ここで以前のように $\bar{\rho}_R \equiv \bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu$ を表す. $\bar{\rho}_B/\bar{\rho}_D \approx 1/5$ で, かつ今は $aH/q \ll 1$ を仮定しているので, 分子が $\bar{\rho}_B$ に比例する項から得られる比は 1 より十分小さい. 一方, 式 (6.4.2) によれば, $\bar{\rho}_R$ に比例する項から得られる比は物質優勢期のすべての期間を通じて 1 より十分に小さい. 実はこの項は, 放射優勢期からすでに 1 より十分小さくなり始めている. それには放射密度と暗黒物質密度が以下の境界値 $(\bar{\rho}_R/\bar{\rho}_D)_{\text{境界}}$ より小さくなれば良い.

$$\left(\frac{\bar{\rho}_R}{\bar{\rho}_D}\right)_{\text{境界}} = \left(\frac{3}{8}\right)^{1/3}\left(\frac{q}{aH}\frac{\bar{\rho}_R}{\bar{\rho}_D}\right)^{2/3} . \qquad (6.4.28)$$

式 (6.4.1) によれば, 本節で扱っている波長では, 放射優勢期のすべてを通じて

[*6] J. Silk, *Nature* **215**, 1155 (1972).

右辺は一定かつ 1 より十分大きいから，$\bar{\rho}_R/\bar{\rho}_D$ は放射と物質の密度が等しくなる時刻よりもずっと前に境界値より十分小さくなる.（つまり，強い圧力によってバリオン–光子プラズマ密度の摂動は小さく抑えられるから，この摂動の重力場への影響は，摂動を受けていない放射密度がまだ物質密度よりも大きいにも関わらず，$\bar{\rho}_R/\bar{\rho}_D$ が式（6.4.28）で与えられる境界値を下回れば無視できるようになる.）これらの議論より，遅い解に対して式（6.2.39）の光子とニュートリノの項を無視すれば，以下の式を得る.

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\psi_q\right) = -4\pi G\bar{\rho}_D a^2 \delta_{Dq} \, . \tag{6.4.29}$$

残りの式（6.2.41），（6.2.43），（6.2.44）は変わらない.

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q \, , \tag{6.4.30}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(1+R)\delta u_{\gamma q}}{a}\right) = -\frac{1}{3a}\delta_{\gamma q} \, , \tag{6.4.31}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta u_{\nu q}}{a}\right) = -\frac{1}{3a}\delta_{\nu q} \, . \tag{6.4.32}$$

式（6.4.30）を式（6.4.29）に用いれば，δ_{Dq} に対する 2 階の微分方程式を得る[*7].

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\frac{d\delta_{Dq}}{dt}\right) = 4\pi G\, a^2\, \bar{\rho}_D \delta_{Dq} \, . \tag{6.4.33}$$

再び，独立変数を t から $y \equiv a/a_{\rm EQ} = \bar{\rho}_M/\bar{\rho}_R$ に変換すると便利になる．このためにフリードマン方程式，

$$\frac{\dot{y}^2}{y^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\bar{\rho}_M + \bar{\rho}_R\right) = \frac{8\pi G\rho_{\rm EQ}}{3}\left(y^{-3} + y^{-4}\right) \tag{6.4.34}$$

を用いる．$\rho_{\rm EQ}$ は $\bar{\rho}_M$ と $\bar{\rho}_R$ が等しくなるときの値である．すると，式（6.4.33）は**メサロ方程式**として知られるものになる.

$$y(1+y)\frac{d^2\delta_{Dq}}{dy^2} + \left(1+\frac{3y}{2}\right)\frac{d\delta_{Dq}}{dy} - \frac{3}{2}\left(1-\beta\right)\delta_{Dq} = 0 \, , \tag{6.4.35}$$

[*7] 式（6.4.33）は，P. Mészáros, *Astron. Astrophys.* **37**, 225 (1974) によって最初に導かれたが，彼は放射エネルギー密度の摂動を単純に無視することでこの式を導いた．式（6.4.33）中で放射密度の摂動を無視する際に述べた本節の議論は，S. Weinberg, *Astrophys. J.* **581**, 810 (2002) で与えられている．これは遅い解にのみ適用できる．速い解では逆に**暗黒物質**のゆらぎが短波長領域で無視できるようになる．この論文ではさらに，式（6.4.33）で放射密度の摂動を無視することを正当化する他の試みについてもコメントしている.

ここで $\beta \equiv \bar{\rho}_B/\bar{\rho}_M = \Omega_B/\Omega_M$ を表す．$\beta = 0$ の場合の式（6.4.35）の独立解はメサロ[*7]，およびグロスとピーブルス[*8]によって与えられた．

$$\delta_{Dq}^{(1)} = 1 + \frac{3y}{2}\,, \qquad \delta_{Dq}^{(2)} = \left(1 + \frac{3y}{2}\right)\ln\left(\frac{\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}-1}\right) - 3\sqrt{1+y}\,. \tag{6.4.36}$$

後にフーと杉山[*9]により，一般的な β の場合の 2 つの独立解が与えられた．

$$\delta_{Dq} \propto (1+y)^{-\alpha_\pm} F\left(\alpha_\pm, \alpha_\pm + \frac{1}{2}, 2\alpha_\pm + \frac{1}{2}; \frac{1}{1+y}\right).$$

ここで F はガウスの超幾何関数で，

$$\alpha_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+24\beta}}{4}$$

である．しかし，最終的な結果を解析的な形に書くため，これからも $\beta \equiv \bar{\rho}_B/\bar{\rho}_M \approx 1/6$ に比例する補正項は無視することにしよう．ただし $R \equiv 3\bar{\rho}_B/4\bar{\rho}_\gamma$ に比例する項は無視しないから，式（6.4.36）で与えられる $\beta = 0$ の場合の遅い解を使うことになる（ゼロでない β による補正は 6.5 節で議論する）．これら 2 つの解から出発し，式（6.4.30），(6.4.27)，(6.4.31)，(6.4.32）を順番に用いることで，ψ_q．$\delta u_{\gamma q}$，$\delta u_{\nu q}$，$\delta_{\gamma q}$, $\delta_{\nu q}$ の遅い解が唯一に求まる．(ニュートリノの摂動が観測的に重要になる例はまだ知られていない[訳注 1].) このようにして 2 つの遅い解が求められたから，速い解と合わせて確かに 6 つの独立解が得られたことになる．

解の接続

うまいことに短波長領域では，δ_D などの解を求めることのできた 2 つの時期が重なる．この重なる時期では，2 つの条件 $q/a \gg \dot{a}/a$ と $\bar{\rho}_M \ll \bar{\rho}_R$ が**両方とも**満足される．この時期では，放射優勢期で求めた解（式（6.4.11）–(6.4.14)）を速い解（fast）と遅い解（slow）に分解できる．式（6.4.15）で定義した Θ はここでは 1 よりずっと大きいから，以下の式を得る．

$$\begin{aligned}\delta_{\gamma q}^{\text{fast}} = \delta_{Bq}^{\text{fast}} = \delta_{\nu q}^{\text{fast}} &= 3\mathcal{R}_q^o\left(\frac{2}{\Theta}\sin\Theta - \left(1 - \frac{2}{\Theta^2}\right)\cos\Theta\right) \\ &\longrightarrow -3\mathcal{R}_q^o\cos\Theta,\end{aligned} \tag{6.4.37}$$

[*8] E. J. Groth, P. J. E. Peebles, *Astron. Astrophys.* **41**, 143 (1975).

[*9] W. Hu, N. Sugiyama, *Astrophys. J.* **471**, 542 (1996).

[訳注 1] 厳密には，ニュートリノの非等方ストレスによる小さな重力的効果が宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎの解析から検出されている（たとえば，Hinshaw *et al.* [arXiv:1212.5226] を見よ）．しかし，ここでは完全流体近似のためニュートリノの非等方ストレスは無視している．

$$\psi_q^{\rm fast} = \frac{3\mathcal{R}_q^o}{t}\left(\frac{2}{\Theta}\sin\Theta + \frac{2}{\Theta^2}\cos\Theta\right) \longrightarrow \frac{6\mathcal{R}_q^o}{t\Theta}\sin\Theta\,, \tag{6.4.38}$$

$$\delta_{Dq}^{\rm fast} = -6\mathcal{R}_q^o\int_{\Theta_1}^{\Theta}\left(\frac{2}{\vartheta^3}\sin\vartheta + \frac{2}{\vartheta^4}\cos\vartheta\right)\vartheta\,d\vartheta \longrightarrow \frac{12\mathcal{R}_q^o}{\Theta^2}\cos\Theta, \tag{6.4.39}$$

$$\delta u_{\gamma q}^{\rm fast} = \delta u_{\nu q}^{\rm fast} = 4t\mathcal{R}_q^0\left(\frac{\sin\Theta}{2\Theta} + \frac{\cos\Theta}{\Theta^2}\right) \longrightarrow \frac{2t\mathcal{R}_q^0}{\Theta}\sin\Theta\,, \tag{6.4.40}$$

$$\delta_{\gamma q}^{\rm slow} = \delta_{Bq}^{\rm slow} = \delta_{\nu q}^{\rm slow} = -\frac{6\mathcal{R}_q^o}{\Theta^2}, \tag{6.4.41}$$

$$\psi_q^{\rm slow} = -\frac{3\mathcal{R}_q^o}{t}\left(\frac{2}{\Theta^2} + 1\right) \longrightarrow -\frac{3\mathcal{R}_q^o}{t}\,, \tag{6.4.42}$$

$$\begin{aligned}\delta_{Dq}^{\rm slow} =& -6\mathcal{R}_q^o\int_0^{\Theta_1}\left(\frac{2}{\vartheta^3}\sin\vartheta + \frac{2}{\vartheta^4}\cos\vartheta - \frac{2}{\vartheta^4} - \frac{1}{\vartheta^2}\right)\vartheta\,d\vartheta \\ &+ 6\mathcal{R}_q^o\left[-\frac{1}{\Theta^2} + \frac{1}{\Theta_1^2} + \ln\left(\Theta/\Theta_1\right)\right] \\ &\longrightarrow 6\mathcal{R}_q^o\left(-\frac{1}{2} + \gamma + \ln\Theta\right)\,,\end{aligned} \tag{6.4.43}$$

$$\delta u_{\gamma q}^{\rm slow} = \delta u_{\nu q}^{\rm slow} = -\frac{4t\mathcal{R}_q^0}{\Theta^2}\,, \tag{6.4.44}$$

ここで再び $\Theta \equiv 2qt/\sqrt{3}a$ で，Θ_1 は $1 \ll \Theta_1 \ll \Theta$ を満たす定数，そして $\gamma = 0.5772\cdots$ はオイラー数である*10.

速い解なら，放射優勢期の解と地平線の内側の解を接続するのは簡単である．放射優勢期には $R \ll 1$ で，（平均自由時間が非常に短いので）減衰は無視でき，さらに $a \propto \sqrt{t}$ であるから，式（6.4.37）の余弦の引数は以下の積分の極限として書ける．

$$q\int_0^t \frac{dt}{a\sqrt{3(1+R)}} \longrightarrow \frac{2qt}{a\sqrt{3}} = \Theta\,.$$

すると，式（6.4.26）で与えられる 2 つの速い解の線形結合のうち，式（6.4.37）の結果になめらかにつながるのは以下の形であることがわかる．

---

*10 式（6.4.43）の積分の漸近値を求めるには，この積分を，それぞれが $\vartheta = 0$ で収束する以下の 3 つの項の和で書き換えれば良い．

$$\begin{aligned}\int_0^{\Theta_1}\left(\frac{2}{\vartheta^3}\sin\vartheta + \frac{2}{\vartheta^4}\cos\vartheta - \frac{2}{\vartheta^4} - \frac{1}{\vartheta^2}\right)\vartheta\,d\vartheta &= \int_0^{\Theta_1}\left(\frac{1}{\vartheta^2}\sin\vartheta + \frac{2}{\vartheta^3}\cos\vartheta - \frac{2}{\vartheta^3}\right)d\vartheta \\ + \int_0^{\Theta_1}\left(\frac{\sin\vartheta}{\vartheta} - \frac{1}{1+\vartheta}\right)\frac{d\vartheta}{\vartheta} &+ \int_0^{\Theta_1}\left(\frac{1}{1+\vartheta} - 1\right)\frac{d\vartheta}{\vartheta}\,.\end{aligned}$$

大きい Θ_1 に対してこれら 3 つの積分はそれぞれ $-1/2$，$1-\gamma$，$-\ln\Theta_1$ に近づくから，全部で $1/2 - \gamma - \ln\Theta_1$ を得る．この結果を式（6.4.43）の 2 行目の項と組み合わせれば，本文に示した結果が得られる．

$$\delta_{\gamma q}^{\mathrm{fast}} = -\frac{3\mathcal{R}_q^o}{(1+R)^{1/4}}\, e^{-\int_0^t \Gamma dt} \cos\left(\int_0^t \frac{q\,dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right). \tag{6.4.45}$$

式 (6.4.16), (6.4.18), (6.4.19) を順番に用いれば（そして速く振動する正弦や余弦を除くすべての因子の時間依存性を無視すれば），$q/a \gg H$ のときの解として以下を得る．

$$\delta u_{\gamma q}^{\mathrm{fast}} = \frac{a\sqrt{3}\mathcal{R}_q^o}{q(1+R)^{3/4}}\, e^{-\int_0^t \Gamma dt} \sin\left(\int_0^t \frac{q\,dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right). \tag{6.4.46}$$

$$\psi_q^{\mathrm{fast}} = 16\sqrt{3}\pi G\bar{\rho}_\gamma(2+R)(1+R)^{1/4}(a/q)\mathcal{R}_q^o e^{-\int_0^t \Gamma dt} \sin\left(\int_0^t \frac{q\,dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right), \tag{6.4.47}$$

$$\delta_{Dq}^{\mathrm{fast}} = 48\pi G\bar{\rho}_\gamma(2+R)(1+R)^{3/4}(a/q)^2\mathcal{R}_q^o\, e^{-\int_0^t \Gamma dt} \cos\left(\int_0^t \frac{q\,dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right). \tag{6.4.48}$$

8.1 節でバリオン音響振動（baryon acoustic oscillation）を扱う際，式 (6.4.45)–(6.4.48) を用いる．

宇宙が放射優勢で，摂動が地平線の十分内側にあり，さらに減衰が無視できるときには，式 (6.4.45) と (6.4.46)，および式 (6.4.37) と (6.4.40) が $\delta_{\gamma q}^{\mathrm{fast}}$ と $\delta u_{\gamma q}^{\mathrm{fast}}$ に対して同じ結果を与えることを確認しておこう．一方，式 (6.4.47) と (6.4.48)，および式 (6.4.38) と (6.4.39) から得られる ψ_q^{fast} と $\delta_{Dq}^{\mathrm{fast}}$ は因子 $\bar{\rho}_\gamma/\bar{\rho}_R$ だけ異なっている．これは，式 (6.4.38) と (6.4.39) を導く際，放射優勢期のニュートリノを完全流体として扱ったためである．しかし，これは摂動が地平線の外にあって非等方ストレスが無視できるときにのみ正しい近似である．式 (6.4.47) と (6.4.48) を導く際には，地平線のずっと内側にあるニュートリノの摂動は非等方ストレスによって激しく減衰しているため，重力場への寄与が無視できると仮定した．この食い違いは，これらの近似で得られた簡単化に対して支払う対価としては小さい．というのも，後に見るように，ψ_q と δ_{Dq} では遅い解の寄与が速い解の寄与よりもずっと大きいためである．

次に遅い解を考えよう．このとき，放射優勢期の解と地平線のずっと内側の解を接続する際に 1 つやっかいなことがある．式 (6.4.41)–(6.4.43) を導く際，放

射優勢期にはバリオンと暗黒物質が重力場の摂動に与える影響を無視できると仮定した．しかし，摂動が地平線のずっと内側にある場合を調べているとき，放射密度と暗黒物質密度の比が 1 より十分大きかったとしても，密度比が式（6.4.28）で与えられる境界値を下回ると，遅い解に対してはこの仮定が成り立たなくなってしまうことを学んだ．実際，式（6.4.41），(6.4.43）より，大きい Θ に対して $\delta_{Dq}^{\rm slow}/\delta_{\gamma q}^{\rm slow} \to -\Theta^2 \ln\Theta$ であるから，$\Theta^2\ln\Theta$ が $\bar{\rho}_R/\bar{\rho}_D$ と同程度の大きさになれば（そしてそれは $\bar{\rho}_\gamma/\bar{\rho}_D$ が式（6.4.28）で与えられる境界値より小さくなる時期に近い），式（6.4.41）–(6.4.44）を導く際に用いた仮定が成り立たなくなる．したがって，放射優勢期の早期（$q^2t^2/a^2 \ll \bar{\rho}_R/\bar{\rho}_D$）に成り立つ式（6.4.41）–(6.4.44）と，メサロ方程式（6.4.35）が使える放射優勢期の後期と物質優勢期の結果をうまくつなげなくてはならない．

暗黒物質密度の摂動は，放射優勢期に地平線のずっと内側にあれば，$\bar{\rho}_R/\bar{\rho}_D$ が式（6.4.28）の境界値より小さくなる時刻前後の摂動の時間依存性が同じなため，簡単に扱うことができる．この時刻前の $\delta_{Dq}^{\rm slow}$ は式（6.4.43）で与えられる．この時刻後の重力場の摂動は暗黒物質に支配され，暗黒物質密度の摂動は式（6.4.36）で与えられるメサロ方程式の解の線形結合となる．放射優勢期（$y \ll 1$）のメサロ方程式の解は以下で与えられる．

$$\delta_{Dq}^{(1)} \longrightarrow 1\,, \quad \delta_{Dq}^{(2)} \longrightarrow -\ln(y/4) - 3\,. \tag{6.4.49}$$

これら 2 つの解の線形結合のうち，式（6.4.43）になめらかにつながるものは，

$$\delta_{Dq}^{\rm slow} = 6\mathcal{R}_q^0\left\{\left[-\frac{7}{2}+\gamma+\ln\left(\frac{4q\sqrt{2}}{\sqrt{3}H_{\rm EQ}a_{\rm EQ}}\right)\right]\delta_{Dq}^{(1)} - \delta_{Dq}^{(2)}\right\} \tag{6.4.50}$$

となる．ここで，$H_{\rm EQ}$，$a_{\rm EQ}$ はそれぞれ物質と放射の密度が等しくなる時刻での膨張率とロバートソン–ウォーカースケール因子である（$t = 1/2H = y^2/\sqrt{2}H_{\rm EQ}$ を用いた）．重力場の摂動，放射の速度ポテンシャル，および放射密度の摂動の遅い解は，式（6.4.30），(6.4.27），(6.4.31）を順番に用いることで以下のように得られる．

$$\psi_q^{\rm slow} = -\dot{\delta}_{Dq}^{\rm slow}\,, \tag{6.4.51}$$

$$\delta u_{\gamma q}^{\rm slow} = -(a^2/q^2)\dot{\delta}_{Dq}^{\rm slow}\,, \tag{6.4.52}$$

$$\delta_{\gamma q}^{\rm slow} = \frac{3a}{q^2}\frac{d}{dt}\left(a(1+R)\frac{d}{dt}\delta_{Dq}^{\rm slow}\right)\,. \tag{6.4.53}$$

特に，物質優勢期では $y \gg 1,\ \delta_{Dq}^{(1)} \to 3y/2$，$\delta_{Dq}^{(2)} \to 4/15y^{3/2}$ だから，式（6.4.50）–（6.4.53）は以下のようになる．

$$\delta_{Dq}^{\text{slow}} \longrightarrow \frac{9\mathcal{R}_q^0 a}{a_{\text{EQ}}}\left[-\frac{7}{2}+\gamma+\ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right)\right], \tag{6.4.54}$$

$$\psi_q^{\text{slow}} \longrightarrow -\frac{6\mathcal{R}_q^0 a}{a_{\text{EQ}}t}\left[-\frac{7}{2}+\gamma+\ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right)\right]. \tag{6.4.55}$$

$$\delta u_{\gamma q}^{\text{slow}} \longrightarrow -\frac{6\mathcal{R}_q^0 a^3}{a_{\text{EQ}}tq^2}\left[-\frac{7}{2}+\gamma+\ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right)\right], \tag{6.4.56}$$

$$\delta_{\gamma q}^{\text{slow}} \longrightarrow \frac{6\mathcal{R}_q^o a^3(1+3R)}{a_{\text{EQ}}t^2q^2}\left[-\frac{7}{2}+\gamma+\ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right)\right]. \tag{6.4.57}$$

ここで，再び無次元波数，

$$\kappa \equiv \frac{q\sqrt{2}}{a_{\text{EQ}}H_{\text{EQ}}} = \frac{(q/a_0)\sqrt{\Omega_R}}{H_0\Omega_M} = \frac{19.3(q/a_0)[\text{Mpc}^{-1}]}{\Omega_M h^2}, \tag{6.4.58}$$

を導入した（関係式 $H_{\text{EQ}} = \sqrt{2}(H_0\sqrt{\Omega_M})(a_0/a_{\text{EQ}})^{3/2}$，$a_0/a_{\text{EQ}} = \Omega_M/\Omega_R$ を用いた）．これは，6.2 節で導入された波数 q_{EQ}（物質と放射の密度が等しくなる時刻に地平線の中に入ってくる摂動の波数）を用いれば $\kappa = \sqrt{2}q/q_{\text{EQ}}$ と書けるから，本節で議論している短波長領域は $\kappa \gg 1$ に相当する．

速い解と遅い解の寄与を加えれば，再結合の時刻まで成り立つ次の完全な解が得られる．

$$\begin{aligned}\delta_{Dq} \longrightarrow &\frac{9\mathcal{R}_q^0 a}{a_{\text{EQ}}}\left[-\frac{7}{2}+\gamma+\ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right)\right]\\ &+48\pi G\bar{\rho}_\gamma(2+R)(1+R)^{3/4}(a/q)^2\mathcal{R}_q^o\\ &\times e^{-\int_0^t \Gamma dt}\cos\left(\int_0^t \frac{q\,dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right),\end{aligned} \tag{6.4.59}$$

$$\begin{aligned}\psi_q \longrightarrow &-\frac{6\mathcal{R}_q^0 a}{a_{\text{EQ}}t}\left[-\frac{7}{2}+\gamma+\ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right)\right]\\ &+16\sqrt{3}\pi G\bar{\rho}_\gamma(2+R)(1+R)^{1/4}(a/q)\mathcal{R}_q^o\\ &\times e^{-\int_0^t \Gamma dt}\sin\left(\int_0^t \frac{q\,dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right),\end{aligned} \tag{6.4.60}$$

$$\delta u_{\gamma q} \longrightarrow -\frac{6\mathcal{R}_q^0 a^3}{a_{\text{EQ}}tq^2}\left[-\frac{7}{2}+\gamma+\ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$+\frac{a\sqrt{3}\mathcal{R}_q^o}{q(1+R)^{3/4}}\,e^{-\int_0^t \Gamma dt}\,\sin\left(\int_0^t \frac{q\,dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right), \tag{6.4.61}$$

$$\begin{aligned}\delta_{Bq}=\delta_{\gamma q}\longrightarrow&\frac{6\mathcal{R}_q^o a^3(1+3R)}{a_{\rm EQ}t^2q^2}\left[-\frac{7}{2}+\gamma+\ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right)\right]\\&-\frac{3\mathcal{R}_q^o}{(1+R)^{1/4}}e^{-\int_0^t \Gamma dt}\cos\left(\int_0^t \frac{q\,dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right),\end{aligned} \tag{6.4.62}$$

ここで，Γ と κ はそれぞれ式（6.4.25）と（6.4.58）で与えられる．

式（6.4.59）–(6.4.62）で与えられる摂動のそれぞれは，速い解か遅い解のどちらかに支配される．まず δ_{Dq} と ψ_q を考えよう．式（6.4.48），(6.4.47）と式（6.4.54），(6.4.55）を比較すると，δ_{Dq} と ψ_q に対する速い解と遅い解の寄与の比は以下の程度の大きさであることがわかる．

$$\frac{\delta_{Dq}^{\rm fast}}{\delta_{Dq}^{\rm slow}}\sim\frac{a^2H^2}{q^2}\left(\frac{\bar{\rho}_R}{\bar{\rho}_M}\right)^2, \qquad \frac{\psi_q^{\rm fast}}{\psi_q^{\rm slow}}\sim\frac{aH}{q}\left(\frac{\bar{\rho}_R}{\bar{\rho}_M}\right)^2. \tag{6.4.63}$$

本節では波長が十分短く，摂動は放射優勢期に地平線の内側へ入ってくると仮定しているのだから，これらの比は物質と放射の密度が等しくなる時刻では 1 よりもずっと小さい．その後，δ_{Dq} の速い解と遅い解の比は $1/a^3$ に比例して減少し，ψ_q の速い解と遅い解の比は $1/a^{5/2}$ に比例して減少する．したがって，物質優勢期では良い近似で $\delta_{Dq}=\delta_{Dq}^{\rm slow}$，$\psi_q=\psi_q^{\rm slow}$ として良い．ただし，式（6.4.59），(6.4.60）で与えられる速い解は q の振動関数を含んでおり，これらは 8.1 節でバリオン音響振動を考えるときに重要となる．

宇宙マイクロ波背景放射異方性の計算には $\delta_{\gamma q}$ と $\delta u_{\gamma q}$ も必要となる．式（6.4.45），(6.4.46）と式（6.4.57），(6.4.56）を比較すると，$\delta_{\gamma q}$ と $\delta u_{\gamma q}$ に対する速い解と遅い解の寄与の比は（速い解の減衰を除けば）以下の程度の大きさであることがわかる．

$$\frac{\delta_{\gamma q}^{\rm fast}}{\delta_{\gamma q}^{\rm slow}}\sim\frac{q^2}{a^2H^2}\frac{\bar{\rho}_R}{\bar{\rho}_M}, \qquad \frac{\delta u_{\gamma q}^{\rm fast}}{\delta u_{\gamma q}^{\rm slow}}\sim\frac{q}{aH}\frac{\bar{\rho}_R}{\bar{\rho}_M}. \tag{6.4.64}$$

これらの比は，摂動が地平線に入る頃には 1 よりずっと大きく，物質と放射の密度が等しくなる時刻までは 1 よりずっと大きいままである．その後，$\delta_{\gamma q}$ の速い解と遅い解の比は同じくらいの大きさを保つが，$\delta u_{\gamma q}$ の速い解と遅い解の比は

$1/\sqrt{a}$ に比例して減少する．したがって，波長が地平線よりも短くなると，$\delta_{\gamma q}$ の遅い解は速い解よりも小さく，物質優勢期の後期になるまでは $\delta u_{\gamma q}$ の遅い解も速い解より小さい．しかし，ここでは遅い解と速い解のいずれも無視せず置いておく．なぜなら，速い解は減衰の効果を受けるが，遅い解は受けないからである．さらに，7.2 節において宇宙マイクロ波背景放射の多重極展開係数 C_ℓ を ℓ の関数として計算する際，比較的小さい δ_{Rq} の遅い解が，速い解には存在しない特徴的な効果を持つことを学ぶからである．

6.5　スカラー型摂動——内挿と輸送関数

6.3 節，6.4 節では，物質と放射の密度が等しくなる時刻よりずっと後に地平線に入る長波長摂動，およびそれよりもかなり前に地平線に入る短波長摂動の解析解を求めた．あと残っているのは，物質と放射の密度が等しくなる時刻付近で地平線に入る摂動である．この波長を持つ摂動は，宇宙マイクロ波背景放射異方性の多重極展開係数で $\ell = 200$ あたりに現れる最初の音響ピークに最も大きく寄与する．本節では，観測的に最も興味がある物質優勢期の結果に注目し，6.3，6.4 節で導いた結果を内挿することでこの波長を持つゆらぎの表式を構築する．

まず，バリオン密度と減衰の効果を無視する極限では，物質優勢期中すべての波長で成り立つ厳密解が存在する．これを用いれば，内挿がどのようなものになるか，おおよその見当をつけることができる．ニュートリノも無視すれば，この極限で物質優勢期の摂動の進化を記述する方程式は，式（6.3.17），(6.3.18)，(6.3.20)，(6.3.21）で $R = 0$ として得られる．

$$\frac{d}{dt}\left(t^{4/3}\psi_q\right) = -\frac{2}{3}t^{-2/3}\delta_{Dq}\ , \tag{6.5.1}$$

$$\dot{\delta}_{\gamma q} - (q^2/a^2)\delta u_{\gamma q} = -\psi_q\ , \tag{6.5.2}$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q\ , \tag{6.5.3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-2/3}\delta u_{\gamma q}\right) = -\frac{1}{3}t^{-2/3}\delta_{\gamma q}\ , \tag{6.5.4}$$

ここで $a \propto t^{2/3}$ である．これらは 4 つの厳密解を持ち，そのうち 3 つは非常に単純である．

解 1：

$$\delta_{Dq} = \frac{3q^2t^2}{2a^2}\ , \quad \psi_q = -\frac{q^2 t}{a^2}\ , \delta_{\gamma q} = 1\ , \quad \delta u_{\gamma q} = -t\ .$$

解 2：

$$\delta_{Dq} = \psi_q = 0\ , \quad \delta_{\gamma q} = -\cos\left(q\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a}\right)\ , \quad \delta u_{\gamma q} = \frac{a}{\sqrt{3}q}\sin\left(q\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a}\right)\ .$$

解 3：

$$\delta_{Dq} = \psi_q = 0\ , \quad \delta_{\gamma q} = \sin\left(q\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a}\right)\ , \quad \delta u_{\gamma q} = \frac{a}{\sqrt{3}q}\cos\left(q\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a}\right)\ .$$

4 つ目の解はより複雑だが，これは $\delta_{Dq} \propto 1/t$，$\psi_q \propto 1/t^2$ に比例して減衰する解である．これから見るように，初期条件は最初の 3 つの解の線形結合で表すことができるから，4 つ目の解は考えなくても良い．

一般性を失うことなく，より早期の解をうまく再現する解 1，2，3 の線形結合を以下のような単純な形で書くことができる[*1]．

$$\delta_{Dq} = \frac{9q^2t^2\mathcal{R}_q^o\mathcal{T}(\kappa)}{10a^2}, \tag{6.5.5}$$

$$\psi_q = -\frac{3q^2t\mathcal{R}_q^o\mathcal{T}(\kappa)}{5a^2}, \tag{6.5.6}$$

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{\nu q} = \frac{3\mathcal{R}_q^o}{5}\left[\mathcal{T}(\kappa) - \mathcal{S}(\kappa)\cos\left(q\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a} + \Delta(\kappa)\right)\right]\ , \tag{6.5.7}$$

$$\delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = \frac{3t\mathcal{R}_q^o}{5}\left[-\mathcal{T}(\kappa) + \mathcal{S}(\kappa)\frac{a}{\sqrt{3}qt}\sin\left(q\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a} + \Delta(\kappa)\right)\right], \tag{6.5.8}$$

ここで，$\mathcal{S}(\kappa)$，$\mathcal{T}(\kappa)$，$\Delta(\kappa)$ は時間に依存しない無次元関数で，6.2 節と 6.4 節で導入した無次元波数 κ のみの関数である．

$$\kappa \equiv \frac{q\sqrt{2}}{a_{\rm EQ}H_{\rm EQ}} = \frac{(q/a_0)\sqrt{\Omega_R}}{H_0\Omega_M} = \frac{19.3(q/a_0)[{\rm Mpc}^{-1}]}{\Omega_M h^2}\ , \tag{6.5.9}$$

ここで，$a_{\rm EQ}$ と $H_{\rm EQ}$ はそれぞれ，物質密度と放射密度が等しくなる時刻でのロバートソン–ウォーカースケール因子と宇宙の膨張率である．これらの関数は**遷移**

[*1] これより，時刻のゼロ点を放射優勢期に $a \propto t^{1/2}$ となるようにとる．これは，解 1 と解 2 で用いた時刻のゼロ点（物質優勢期に $a \propto t^{2/3}$ となるようにとったもの）とは異なるが，この違いが積分 $\int_0^t dt/a$ に与える寄与は単に定数となるから，$\Delta(\kappa)$ に吸収することができる．

関数として知られている（これらの関数が κ にしか依存できない理由は，これらが空間座標の規格化に依存せず，さらに無次元であることによる）．6.3 節，6.4 節で用いた長波長領域と短波長領域の分割は κ で表すことができる．物質優勢期には，$t = 2/3H = (2\sqrt{2}/3H_{\mathrm{EQ}})(a/a_{\mathrm{EQ}})^{3/2}$，$\bar{\rho}_R/\bar{\rho}_M = a_{\mathrm{EQ}}/a$ であるから，

$$\frac{t^2q^2}{a^2}\frac{\bar{\rho}_R}{\bar{\rho}_M} = \frac{4\kappa^2}{9}$$

を得る．したがって，κ が 1 よりずっと小さいか大きいかに応じて t^2q^2/a^2 が $\bar{\rho}_M/\bar{\rho}_R$ よりずっと小さいか大きくなる．

解 1，2，3 の線形結合を式（6.5.5）–（6.5.8）の形に書いた理由は，係数 $\mathcal{S}(\kappa)$，$\mathcal{T}(\kappa)$，$\Delta(\kappa)$ が $\kappa \ll 1$ のときに単純な値となることによる．$\bar{\rho}_B = 0$ のときには，以前得たそこそこ長い波長領域の解（$t^2q^2/a^2 \ll \bar{\rho}_M/\bar{\rho}_R$ を満たす解，言い換えれば $\kappa \ll 1$ の極限）である式（6.3.23），（6.3.24），（6.3.35），（6.3.36）は式（6.5.5）–（6.5.8）と無矛盾であり，この極限での係数は以下で与えられる[*2]．

$$\mathcal{T}(\kappa) \longrightarrow 1\,, \quad \mathcal{S}(\kappa) \longrightarrow 1\,, \quad \Delta(\kappa) \longrightarrow 2\kappa/\sqrt{3}\,. \qquad (6.5.10)$$

（非常に長い波長の極限は $t^2q^2/a^2 \ll R$ に対応するが，ここでは $R = 0$ としているため扱えない．）

同様に，$\bar{\rho}_B = 0$ かつ $\Gamma = 0$ のときには，以前得た短波長領域の解（$t^2q^2/a^2 \gg \bar{\rho}_M/\bar{\rho}_R$ を満たす解，言い換えれば $\kappa \gg 1$ の極限）である式（6.4.59）–（6.4.62）は式（6.5.5）–（6.5.8）と無矛盾であり，この極限での係数は以下で与えられる[*3]．

$$\mathcal{T}(\kappa) \longrightarrow \frac{45}{2\kappa^2}\left[-\frac{7}{2} + \gamma + \ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right)\right]\,, \quad \mathcal{S}(\kappa) \longrightarrow 5\,, \quad \Delta(\kappa) \longrightarrow 0\,. \qquad (6.5.11)$$

8 章で見るように，大きな κ で $\mathcal{T}(\kappa)$ が減少することは，様々な波長における暗黒物質密度のゆらぎの強度を決める上で非常に重要である．（暗黒物質密度のゆらぎの進化の歴史を追うことで，この減少を定性的に理解することができる．式（6.2.27）より，宇宙が放射に支配され，かつ波長が地平線の外側にある時期の δ_{Dq} は t に比例して成長する．$\kappa \ll 1$ のとき，ゆらぎの成長は宇宙が物質優勢に

[*2] $\Delta(\kappa)$ の極限の値 $2\kappa/\sqrt{3}$ は，（$R \ll 1$ のときの）式（6.3.34）の位相 $\sqrt{3}qt/a = 2\kappa\sqrt{y}/\sqrt{3}$ と式（6.5.7）と（6.5.8）の位相 $q\int_0^t dt/\sqrt{3}a = 2\kappa[\sqrt{1+y}-1]/\sqrt{3}$ との，$y \equiv \bar{\rho}_M/\bar{\rho}_R \gg 1$ での差として得られる．

[*3] $\mathcal{T}(\kappa)$ の結果は，S. Weinberg, *Astrophys. J.* **581**, 810 (2002) [astro-ph/0207375] で与えられた．メサロ方程式（6.4.35）により，大きな波数 k での遷移関数が $\ln k/k^2$ のように減少することは，W. Hu, N. Sugiyama, *Astrophys. J.* **444**, 489 (1995) によって指摘された．

なるまで続き，その後は式 (6.3.13)，(6.3.23) が示すように波長が地平線の外でも中でも δ_{Dq} は $t^{2/3}$ に比例して成長する．逆に $\kappa \gg 1$ のときは，t に比例する δ_{Dq} の成長は波長が地平線に入るまでしか続かず——もちろんこの場合，波長が地平線に入るのは放射優勢期である——，その後は式 (6.4.50) が示すように δ_{Dq} は時間に対して対数的にしか成長できない．しかし，宇宙が物質優勢になれば式 (6.4.54) が示すように $t^{2/3}$ に比例して成長するようになる．この振る舞いは $\kappa \ll 1$ の場合と同じである．t に比例する成長が終わるのは $q/a \approx 1/t$ から得られる時刻で，$a \propto \sqrt{t}$ から $t \propto 1/q^2$ が得られる．したがって，物質と放射の密度が等しくなる時刻までゆらぎが成長できた量は $\ln q/q^2$ に比例することがわかる．これは確かに $\mathcal{T}(\kappa)$ の漸近的な振る舞いを説明する．すなわち，$\kappa \gg 1$ で $\mathcal{T}(\kappa)$ が小さくなる理由は，δ_{Dq} が減衰するからではなく，むしろ，地平線に入ってから物質と放射の密度が等しくなる時刻までは δ_{Dq} がたいして**成長できない**ことによる.)

κ が 1 程度の大きさのときはこれら 2 つの極限を内挿する必要があるが，これはほぼ「手で」できる．$\kappa \ll 1$ と $\kappa \gg 1$ をなめらかにつなぐ内挿であれば，どのようなものでも宇宙マイクロ波背景放射異方性の計算でそこそこ良い結果が得られる．より精度が必要な場合は，連立方程式 (6.2.9)–(6.2.15) を ($\bar{\rho}_B = 0$ として) 一般の波長と一般の $y \equiv \bar{\rho}_M/\bar{\rho}_R$ の値に対して数値的に解かなくてはいけない．数値計算の $y \ll 1$ での初期条件は 6.2 節で求めたものを用い，チェックとして $y \gg 1$ での数値解を式 (6.5.5)–(6.5.8) と比較する．これらの方程式を，y を独立変数とし，さらに摂動を以下のように書くことで書き直す.

$$\delta_{Dq} = \kappa^2 \mathcal{R}_q^0 d(y)/4 \,, \quad \delta_{\gamma q} = \delta_{\nu q} = \kappa^2 \mathcal{R}_q^0 r(y)/4 \,,$$
$$\psi_q = (\kappa^2 H_{\rm EQ}/4\sqrt{2})\mathcal{R}_q^0 f(y) \,, \quad \delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = (\kappa^2 \sqrt{2}/4\, H_{\rm EQ})\mathcal{R}_q^0 g(y) \,.$$

すると，式 (6.2.9)–(6.2.15) は以下のように無次元形式となる.

$$\sqrt{1+y}\frac{d}{dy}\Big(y^2\, f(y)\Big) = -\frac{3d(y)}{2} - \frac{4\,r(y)}{y},$$
$$\sqrt{1+y}\frac{d}{dy}d(y) = -y\, f(y) \,,$$
$$\sqrt{1+y}\frac{d}{dy}r(y) - \frac{\kappa^2}{y}g(y) = -y\, f(y) \,,$$
$$\sqrt{1+y}\frac{d}{dy}\left(\frac{g(y)}{y}\right) = -\frac{1}{3}r(y) \,.$$

この表記では，式 (6.2.27)–(6.2.29) で与えられる初期条件は以下のようになる.

$$d(y) \longrightarrow r(y) \longrightarrow y^2 ,$$

$$f(y) \longrightarrow -2 , \qquad g(y) \longrightarrow -\frac{y^4}{9} .$$

これらの方程式を数値的に解いて得られた遷移関数を表6.1（90ページ）で与える．$y \gg 1$ での数値解は式（6.5.5)–(6.5.8）と合致する*4．この表を見れば，数値計算の結果が $\kappa \ll 1$ と $\kappa \gg 1$ の極限においてそれぞれ確かに式（6.5.10）と（6.5.11）で与えられる解析解と一致することを確認できる．ただし，式（6.5.11）で与えられる漸近的な結果を得るには，κ を非常に大きくしなければならない．

7章, 8章で学ぶように，宇宙マイクロ波背景放射の異方性や大規模構造の相関関数は1つ，あるいは複数の遷移関数を含む積分で与えられるから，遷移関数に対して近似的な解析的表式を得ておくのが便利である．ダイカスが求めた「フィッティング公式」*5は，$\kappa \ll 1$，$\kappa \gg 1$ の極限でそれぞれ式（6.5.10），(6.5.11）で与えられる漸近的な解と一致し，(大きな κ での $\Delta(\kappa)$ を除けば）中間的な κ でも表6.1の数値解と2%より良い精度で一致する．

$$\mathcal{T}(\kappa) \simeq \frac{\ln[1+(0.124\,\kappa)^2]}{(0.124\,\kappa)^2}\left[\frac{1+(1.257\,\kappa)^2+(0.4452\,\kappa)^4+(0.2197\,\kappa)^6}{1+(1.606\,\kappa)^2+(0.8568\,\kappa)^4+(0.3927\,\kappa)^6}\right]^{1/2} , \tag{6.5.12}$$

$$\mathcal{S}(\kappa) \simeq \left[\frac{1+(1.209\,\kappa)^2+(0.5116\,\kappa)^4+5^{1/2}(0.1657\,\kappa)^6}{1+(0.9459\,\kappa)^2+(0.4249\,\kappa)^4+(0.1657\,\kappa)^6}\right]^2 , \tag{6.5.13}$$

$$\Delta(\kappa) \simeq \left[\frac{(1.1547\,\kappa)^2+(0.5986\,\kappa)^4+(0.2578\,\kappa)^6}{1+(1.723\,\kappa)^2+(0.8707\,\kappa)^4+(0.4581\,\kappa)^6+(0.2204\,\kappa)^8}\right] . \tag{6.5.14}$$

これらの遷移関数を図6.1（91ページ）に示す．ニュートリノの非等方ストレスの効果も含めた $\mathcal{T}(\kappa)$ のフィッティング公式がアイゼンシュタインとフーにより与えられており*6，それはCAMBプログラムの数値計算と一致する．式（6.5.12）と表6.1で与える $\mathcal{T}(\kappa)$ はニュートリノの非等方ストレスを無視しているから，CAMBの結果と比べて4%ほど小さい．

次に，減衰の効果とゼロでないバリオンと光子の密度比の効果をどのように取り入れるかを考えなくてはならない．式（6.3.23），(6.3.24）および式（6.4.59），(6.4.60）を見れば，短波長あるいは長波長の極限において δ_{Dq} や ψ_q の表式の中

*4 この数値計算を行ってくれたデュエイン・ダイカスに感謝する．

*5 デュエイン・ダイカスによる私信．

*6 D. J. Eisenstein, W. Hu, *Astrophys. J.* **496**, 605 (1998).

表 6.1　スカラー型摂動の遷移関数

κ	$\mathcal{S}$	$\mathcal{T}$	Δ	κ	$\mathcal{S}$	$\mathcal{T}$	Δ
0.1	1.0167	0.9948	0.1207	10	3.9895	0.1608	0.3270
0.2	1.0551	0.9780	0.2240	11	4.0546	0.1440	0.3147
0.3	1.1147	0.9569	0.3156	12	4.1172	0.1298	0.2962
0.4	1.1891	0.9339	0.3852	13	4.1841	0.1178	0.2850
0.5	1.2680	0.9101	0.4423	14	4.2175	0.1075	0.2747
0.6	1.3529	0.8860	0.4800	15	4.2676	0.0985	0.2604
0.7	1.4388	0.8620	0.5148	16	4.3135	0.0907	0.2541
0.8	1.5195	0.8384	0.5336	17	4.3336	0.0838	0.2438
0.9	1.6081	0.8154	0.5531	18	4.3796	0.0777	0.2339
1.0	1.6801	0.7930	0.5637	19	4.4043	0.0723	0.2296
1.2	1.8330	0.7502	0.5784	20	4.4233	0.0675	0.2195
1.4	1.9777	0.7104	0.5854	25	4.5271	0.0496	0.1920
1.6	2.1126	0.6734	0.5842	30	4.6051	0.0383	0.1713
1.8	2.2354	0.6391	0.5782	35	4.6650	0.0305	0.1542
2.0	2.3451	0.6074	0.5700	40	4.7087	0.0249	0.1396
2.5	2.5895	0.5378	0.5537	45	4.7389	0.0209	0.1276
3.0	2.7839	0.4798	0.5334	50	4.7605	0.0177	0.1182
3.5	2.9473	0.4311	0.5094	55	4.7794	0.0153	0.1111
4.0	3.0970	0.3898	0.4854	60	4.7992	0.0134	0.1053
4.5	3.2346	0.3545	0.4659	65	4.8192	0.0118	0.0997
5.0	3.3506	0.3241	0.4509	70	4.8365	0.0105	0.0940
5.5	3.4114	0.2976	0.4367	75	4.8487	0.0094	0.0885
6.0	3.5181	0.2726	0.4203	80	4.8563	0.0084	0.0838
6.5	3.5953	0.2531	0.4029	85	4.8622	0.0077	0.0803
7.0	3.6754	0.2361	0.3884	90	4.8695	0.0070	0.0776
7.5	3.7473	0.2200	0.3782	95	4.8792	0.0064	0.0751
8.0	3.8015	0.2056	0.3695	100	4.8895	0.0059	0.0722
8.5	3.8432	0.1927	0.3590				
9.0	3.8865	0.1810	0.3465				
9.5	3.9380	0.1704	0.3350				

で値が最も大きくなる項は減衰にもバリオンにも影響されないことがわかるから，それら最大の項だけを扱うならば単に式（6.5.5），（6.5.6）を用いれば良い．

$$\delta_{Dq} = \frac{9q^2 t^2 \mathcal{R}_q^o \mathcal{T}(\kappa)}{10a^2}, \tag{6.5.15}$$

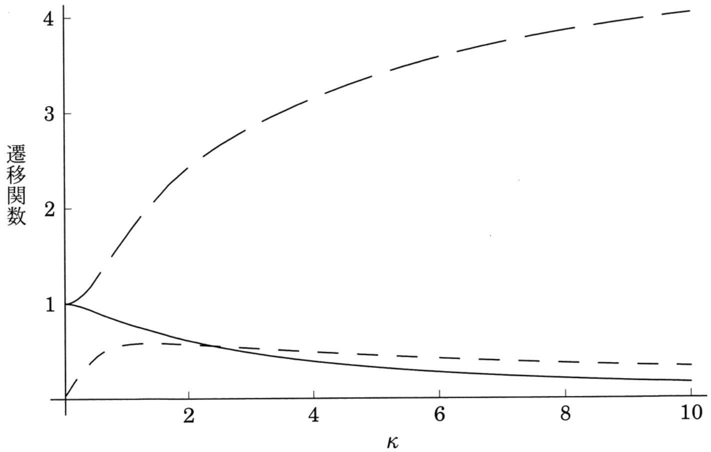


図 6.1 遷移関数 $\mathcal{T}(\kappa)$（実線），$\mathcal{S}(\kappa)$（長い破線），$\Delta(\kappa)$（短い破線）を無次元波数 κ の関数として示す.

$$\psi_q = -\frac{3q^2 t \mathcal{R}_q^o \mathcal{T}(\kappa)}{5a^2}. \tag{6.5.16}$$

式（6.4.61），(6.4.62）で与えられる $\delta u_{\gamma q}$，$\delta_{\gamma q}$ の短波長領域の表式は，減衰の効果によって正弦，余弦の項に因子 $\exp(-\int_0^t \Gamma dt)$ がかかっている．この因子は式（6.3.36），(6.3.35）で与えられる長波長の表式には含まれていないが，$\Gamma \propto q^2$ であることを考えれば長波長領域での因子は 1 として良い．以上から，すべての波長において減衰の効果を含めるには，式（6.5.7），(6.5.8）の正弦や余弦に $\exp(-\int_0^t \Gamma dt)$ をかけるだけで良いことがわかる．最後に，短波長領域の表式（6.4.62），(6.4.61）と長波長領域の表式（6.3.35），(6.3.36）の両方において，ゼロでないバリオン密度の効果によって $\delta_{\gamma q}$ の振動していない部分には $1+3R$ が，$\delta_{\gamma q}$ の正弦関数には $(1+R)^{-1/4}$ がそれぞれかかり，$\delta u_{\gamma q}$ の正弦関数には $(1+R)^{-3/4}$ がかかっているから，式（6.5.7），(6.5.8）において同じことをすればすべての波長においてゼロでないバリオンと光子の密度比の効果を取り入れられるだろう．

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{Bq} = \frac{3\mathcal{R}_q^o}{5}\Bigg[\mathcal{T}(\kappa)(1+3R)$$
$$-(1+R)^{-1/4}\, e^{-\int_0^t \Gamma dt}\mathcal{S}(\kappa)\cos\left(\int_0^t \frac{q\,dt}{a\sqrt{3(1+R)}} + \Delta(\kappa)\right)\Bigg], \quad (6.5.17)$$

$$\delta u_{\gamma q} = \delta u_{Bq} = \frac{3\mathcal{R}_q^o}{5}\Bigg[-t\mathcal{T}(\kappa)$$
$$+\frac{a}{\sqrt{3}q(1+R)^{3/4}}\, e^{-\int_0^t \Gamma dt}\mathcal{S}(\kappa)\sin\left(\int_0^t \frac{q\,dt}{a\sqrt{3(1+R)}} + \Delta(\kappa)\right)\Bigg]. \quad (6.5.18)$$

繰り返しになるが，これらの結果は 6.4 節で与えた短波長領域の表式，および 6.3 節で与えた長波長領域の表式（そこでは Γ は無視できる）と一致しており，減衰とバリオン密度の効果を無視すれば，本節で与えたすべての波長領域で成り立つ表式とも一致している．

ここで，関数 $\mathcal{T}(\kappa)$ についてもう少し述べておこう．通常，遷移関数といえばこの関数のことを指す．この遷移関数は，以下で定義する変数 Q で書くのが慣例となっている．

$$Q \equiv \frac{q}{a_0} \times \frac{1\ \mathrm{Mpc}}{\Omega_M h^2}\,. \quad (6.5.19)$$

式（6.5.9）と比べれば，この変数は $\kappa/19.3$ と等しいことがわかる．この変数を用いて書くと $\mathcal{T}(\kappa)$ の極限の式（6.5.10），（6.5.11）はそれぞれ以下のようになる．

$$\mathcal{T}(\kappa) \to \begin{cases} 1 & Q \to 0 \\ \dfrac{\ln(2.40\,Q)}{(4.07\,Q)^2} & Q \to \infty. \end{cases} \quad (6.5.20)$$

暗黒物質の密度ゆらぎの発展方程式を数値計算で解いた結果を，大きな値の Q に近似的に表した式は以下で与えられる[*7]．

$$\mathcal{T}_{\mathrm{BBKS}}(\kappa) \simeq \frac{\ln(1+2.34Q)}{2.34Q}$$
$$\times \left[1+3.89Q+(16.1Q)^2+(5.46Q)^3+(6.71Q)^4\right]^{-1/4}. \quad (6.5.21)$$

これは Q が非常に大きいときには $\ln(2.34Q)/(3.96\,Q)^2$ となり，解析的な結果

[*7] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser, A. S. Szalay, *Astrophys. J.* **304**, 15 (1986).

(6.5.20) と素晴らしくよく一致している．しかし，BBKS（脚注 7 の著者の頭文字を取ったもの）が与えた遷移関数の表式（6.5.21）は，$Q=0$ における規格化は正しいものの，$Q \ll 1$ における遷移関数の振る舞いを良く記述できていない．式（6.5.21）の冪級数展開は Q の偶数次に加えて奇数次も含んでいるが，これは遷移関数が 3 元ベクトル $\boldsymbol{q}$ の解析関数であるという要請に反している．ダイカスのフィッティング公式（6.5.12）は，遷移関数が $\boldsymbol{q}=0$ で 3 元ベクトル $\boldsymbol{q}$ に関して解析的であるように構築されており，実際，表 6.1 に与えられる数値解を BBKS の表式（6.5.21）よりも精度良く再現する．本書における宇宙マイクロ波背景放射異方性の解析には，式（6.5.21）ではなく式（6.5.12）を用いる．

ゼロでない $R=3\bar{\rho}_B/4\bar{\rho}_\gamma$ の効果は取り入れたものの，これまでの結果はすべて $\beta \equiv \bar{\rho}_B/\bar{\rho}_M \ll 1$ を仮定して得られたものである．ゼロでない β の値による遷移関数の補正は 10%程度で，$\kappa \gg 1$ では β の最低次までの解析解が得られている[*8]．一般の κ では，β のすべての次数で成り立つ数値解がいくつかの β の値に対して求められている[*9]．大規模構造の計算に遷移関数を使う際には，遷移関数のフィッティング公式に簡単な修正を施すのが通例となっている．ピーコックとドッズ[*10]は，$\kappa=(k\sqrt{\Omega_R}/H_0\Omega_M)\exp(\Omega_B)$ を用いれば，有限のバリオン密度の場合でも同じフィッティング公式が使えると提案した．これはある限定的な宇宙論パラメータの範囲内ではうまくいくが，そもそも遷移関数がこのような Ω_B 依存性を持つことは物理的に不可能なことである．遷移関数を決める物理過程は放射優勢期のものであり，それが，$\bar{\rho}_B$ のような我々がたまたま現在時刻で測定する宇宙論パラメータに依存するはずがない．κ を別にすれば，遷移関数が依存できる量は定数である $\beta \equiv \bar{\rho}_B/\bar{\rho}_M=\Omega_B/\Omega_M$ や，（現在時刻の放射の温度がわかっていれば）任意の温度での物質密度を与える $\Omega_M h^2$ だけのはずである．実際，杉山[*11]により，補正因子 $\exp(\Omega_B)$ がうまくいくのは Ω_M が 1 に近いときのみであることが示されている．Ω_M が小さい値を取る場合にも適用できる補正因子として，杉山は $\exp(\Omega_B+\Omega_B/\Omega_M)$ を提案したが，これもまた $\exp(\Omega_B)$ と同様な理由で物理的に不可能なことである．これらの修正因子が抱えるもう一つの困難は，小さな波数ではバリオン密度による補正が消えなければいけないのに，そうなっ

*8 S. Weinberg，脚注 3 を参照．

*9 J. A. Holtzman, *Astrophys. J. Suppl.* **71**, 1 (1989).

*10 J. A. Peacock, S.J. Dodds, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **267**, 1020 (1994).

*11 N. Sugiyama, *Astrophys. J.* **100**, 281 (1995).

ていないことである.（光子–バリオン流体の圧力が無視できるような小さな波数では，バリオンは冷たい暗黒物質とまったく同じように振る舞う.）これらすべての物理的要請を満たすバリオンの補正因子が，アイゼンシュタインとフー[*6]によって提案されている．すなわち，遷移関数は以下で与えられる κ を用いて計算する．

$$\kappa = \left(\frac{k\sqrt{\Omega_R}}{H_0\Omega_M}\right)\left[\alpha + \frac{1-\alpha}{1+(0.43\,k\,s)^4}\right]^{-1} , \tag{6.5.22}$$

ここで，

$$\alpha = 1 - 0.328\ \ln(431\,\Omega_M h^2)\,\beta + 0.38\ \ln(22.3\,\Omega_M h^2)\,\beta^2$$

で，s は最終散乱の時刻 $t = t_L$ での音速の地平線を（k のように）現在時刻まで伸ばしたもの，

$$s \equiv a(t_0)\int_0^{t_L} \frac{v_s\,dt}{a(t)} = (1+z_L)d_H ,$$

である．なお，d_H は式（2.6.32）[訳注 1]で与えられる．

6.6 テンソル型摂動

次にテンソル型摂動を考える．これはスカラー型摂動に比べてずっと簡単に扱える．スカラー型摂動には 5 つもの節が必要であったが，テンソル型摂動はこの 1 節で済む．スカラー型摂動の時にやったように，まず始めに（CMBfast のようなコンピュータプログラムでも使われている）完全な方程式系を書き下したあと，近似を施していく．

冷たい暗黒物質とバリオンプラズマ

すでに述べたように，冷たい暗黒物質やバリオンプラズマの粒子の運動速度は小さいので非等方ストレスには寄与しない．テンソル型摂動には密度や速度の摂動は存在しないので，暗黒物質の摂動もバリオンプラズマの摂動もここでは解く必要がない．

訳注 1

$$d_H \equiv a_L \int_0^{t_L} \frac{dt}{a\sqrt{3(1+R)}} = R_L \int_0^{t_L} \frac{dt}{R\sqrt{3(1+R)}}$$

$$= \frac{2}{H_0\sqrt{3R_L\Omega_M}(1+z_L)^{3/2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+R_L}+\sqrt{R_{\rm EQ}+R_L}}{1+\sqrt{R_{\rm EQ}}}\right).$$

重力

5.1 節の結果によれば，重力場のテンソル型摂動は以下の形をとる．

$$\delta g_{ij}(\boldsymbol{x},t) = a^2(t)\, D_{ij}(\boldsymbol{x},t)\ , \tag{6.6.1}$$

ここで $D_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ は波動方程式（5.1.53）を満たす．

$$\ddot{D}_{ij} + 3H\dot{D}_{ij} - a^{-2}\nabla^2 D_{ij} = 16\pi G\pi^T_{ij}\ , \tag{6.6.2}$$

そしてトレースと横波条件はそれぞれ以下のように与えられる．

$$D_{ii} = 0\ , \qquad \partial_i D_{ij} = 0\ . \tag{6.6.3}$$

後に，非等方ストレステンソル π^T_{ij} が $\dot{D}_{ij}$ の線形汎関数であることを見るから，式（6.6.2）は 2 つの独立解を持つ．摂動が地平線の外にある間は非等方ストレステンソル π^T_{ij} も左辺第 3 項 $a^{-2}\nabla^2 D_{ij}$ も無視できるから，式（6.6.2）は以下のようになる．

$$\ddot{D}_{ij} + 3H\dot{D}_{ij} = 0\ .$$

したがって，地平線の外での解の 1 つは定数解で，もう 1 つは $\int a^{-3}dt$（放射優勢期には $t^{-1/2}$）に比例して減衰する解である．興味あるすべての波数の摂動は，宇宙が何倍にも膨張する間地平線の外にあるから，減衰解は無視できる．よって，定数解のみを考えれば良い．すると計量の摂動と非等方ストレスは以下の形に書ける．

$$D_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\lambda=\pm 2}\int d^3q\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\, e_{ij}(\hat{q},\lambda)\, \mathcal{D}_q(t)\ , \tag{6.6.4}$$

$$\pi^T_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\lambda=\pm 2}\int d^3q\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\, e_{ij}(\hat{q},\lambda)\, \pi^T_q(t)\ . \tag{6.6.5}$$

ここで $\beta(\boldsymbol{q},\lambda)$ は波数 $\boldsymbol{q}$ とヘリシティλ を持つ減衰しない解に対する確率パラメータ，$e_{ij}(\hat{q},\lambda)$ は 5.2 節で定義した偏光テンソル（$e_{ii} = q_i e_{ij} = 0$ を満たす），そして $\mathcal{D}_q(t)$ は以下の波動方程式の解である．

$$\ddot{\mathcal{D}}_q + 3H\dot{\mathcal{D}}_q + a^{-2}q^2\mathcal{D}_q = 16\pi G\pi^T_q\ . \tag{6.6.6}$$

この式の解は後に導出する．

光子

光子の密度行列のテンソル型摂動 $\delta n^{ij}(\boldsymbol{x},t)$ を記述するボルツマン方程式は，式（H.35）から以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\,\delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial t}+\frac{\hat{p}_k}{a(t)}\frac{\partial\,\delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial x^k}+\frac{2\dot{a}(t)}{a(t)}\,\delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\\&\quad-\frac{1}{4a^2(t)}p\bar{n}'_\gamma(p)\hat{p}_k\hat{p}_l\,\dot{D}_{kl}(\boldsymbol{x},t)\left(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j\right)\\&\quad=-\omega_c(t)\,\delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)+\frac{3\omega_c(t)}{8\pi}\int d^2\hat{p}_1\\&\qquad\times\Big[\delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t)-\hat{p}_i\hat{p}_k\,\delta n_\gamma^{kj}(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t)-\hat{p}_j\hat{p}_k\,\delta n_\gamma^{ik}(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t)\\&\qquad\quad+\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_l\,\delta n_\gamma^{kl}(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t)\Big]\,,\end{aligned}\tag{6.6.7}$$

ここで計量の摂動に式（6.6.1）を用いた．スカラー型摂動の場合の式（6.1.13）と同様に，$\delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ の代わりに以下の摂動量を考えることにする．

$$a^4(t)\,\bar{\rho}_\gamma(t)\,J_{ij}(\boldsymbol{x},\hat{p},t)\equiv a^2(t)\int_0^\infty \delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},p\hat{p},t)\,4\pi p^3\,dp\,. \tag{6.6.8}$$

そして，以下の形の解を探すことにする．

$$J_{ij}(\boldsymbol{x},\hat{p},t)=\sum_{\lambda=\pm2}\int d^3q\;e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t,\lambda)\,. \tag{6.6.9}$$

すると，ボルツマン方程式（6.6.7）は，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\,J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t,\lambda)}{\partial t}+i\frac{\boldsymbol{q}\cdot\hat{p}}{a(t)}J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t,\lambda)\\&\quad+\hat{p}_k\hat{p}_l\,e_{kl}(\hat{q},\lambda)\,\dot{\mathcal{D}}_q(t)\left(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j\right)\\&\quad=-\omega_c(t)\,J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t,\lambda)+\frac{3\omega_c(t)}{2}\\&\qquad\times\Big[\mathcal{J}_{ij}(\boldsymbol{q},t,\lambda)-\hat{p}_i\hat{p}_k\,\mathcal{J}_{kj}(\boldsymbol{q},t,\lambda)-\hat{p}_j\hat{p}_k\,\mathcal{J}_{ik}(\boldsymbol{q},t,\lambda)\\&\qquad\quad+\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_l\,\mathcal{J}_{kl}(\boldsymbol{q},t,\lambda)\Big]\end{aligned}\tag{6.6.10}$$

となる．ここで，

$$\mathcal{J}_{ij}(\boldsymbol{q},t,\lambda)\equiv\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}\,J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t,\lambda) \tag{6.6.11}$$

である．さらに，あるヘリシティλを持つ$J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t,\lambda)$は同じ$\lambda$を持つ偏光テンソルの成分$e_{kl}(\hat{q},\lambda)$の線形結合で書けなくてはならず，また$\hat{q}_k\,e_{kl}(\hat{q},\lambda)$と$e_{kk}(\hat{q},\lambda)$はともにゼロであるから，回転不変性から許される唯一の$\mathcal{J}_{ij}(\boldsymbol{q},t,\lambda)$の形は単に$e_{ij}(\hat{q},\lambda)$に$q\equiv|\boldsymbol{q}|$と$t$に依存する任意関数をかけたものとなる．この関係式は，慣例的に以下のように書かれる．

$$\mathcal{J}_{ij}(\boldsymbol{q},t,\lambda)=-\frac{2}{3}e_{ij}(\hat{q},\lambda)\,\Psi(q,t)\,. \tag{6.6.12}$$

回転不変性より，強度行列の摂動は以下の形に書ける．

$$\begin{aligned}J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t,\lambda)&=\frac{1}{2}\Big(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j\Big)\,\hat{p}_k\hat{p}_l\,e_{kl}(\hat{q},\lambda)\\&\times\Big(\Delta_T^{(T)}(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)+\Delta_P^{(T)}(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)\Big)\\&+\Big(e_{ij}(\hat{q},\lambda)-\hat{p}_i\hat{p}_k e_{kj}(\hat{q},\lambda)-\hat{p}_j\hat{p}_k e_{ik}(\hat{q},\lambda)+\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_l\,e_{kl}(\hat{q},\lambda)\Big)\\&\times\Delta_P^{(T)}(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t).\end{aligned} \tag{6.6.13}$$

（ここで，上付き添字Tは「テンソル（tensor）」を表すが，下付き添字Tは「温度（temperature）」を表すことに注意しよう．係数はJ_{ii}がΔ_Tに比例し，かつ偏光がΔ_Pに比例するように選んだ.）対称性のみを考えれば3つ目の項として$(\hat{q}_i-\hat{p}_i(\hat{p}\cdot\hat{q}))(\hat{q}_j-\hat{p}_j(\hat{p}\cdot\hat{q}))\hat{p}_k\hat{p}_l e_{kl}$に比例する項も許されるが，これはトムソン散乱では生成されないため，ボルツマン方程式に現れない．式（6.6.13）を式（6.6.10）に用いれば，$\Delta_T^{(T)}$と$\Delta_P^{(T)}$に対するボルツマン方程式がそれぞれ以下のように導かれる．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\Delta_T^{(T)}(q,\mu,t)+i\,a^{-1}(t)\,q\mu\,\Delta_T^{(T)}(q,\mu,t)\\&\quad=-2\dot{\mathcal{D}}_q(t)-\omega_c(t)\,\Delta_T^{(T)}(q,\mu,t)+\omega_c(t)\,\Psi(q,t)\,,\end{aligned} \tag{6.6.14}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\Delta_P^{(T)}(q,\mu,t)+i\,a^{-1}(t)q\mu\,\Delta_P^{(T)}(q,\mu,t)\\&\quad=-\omega_c(t)\,\Delta_P^{(T)}(q,\mu,t)-\omega_c(t)\,\Psi(q,t)\,.\end{aligned} \tag{6.6.15}$$

関数$\Delta_T^{(T)}$，$\Delta_P^{(T)}$はルジャンドル多項式で展開できる．

$$\Delta_T^{(T)}(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)=\sum_{\ell=0}^{\infty}i^{-\ell}(2\ell+1)\,P_\ell(\hat{q}\cdot\hat{p})\,\Delta_{T,\ell}^{(T)}(q,t)\,, \tag{6.6.16}$$

$$\Delta_P^{(T)}(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)=\sum_{\ell=0}^{\infty}i^{-\ell}(2\ell+1)\,P_\ell(\hat{q}\cdot\hat{p})\,\Delta_{P,\ell}^{(T)}(q,t)\,. \tag{6.6.17}$$

漸化式，

$$zP_\ell(z) = \frac{\ell+1}{2\ell+1}P_{\ell+1}(z) + \frac{\ell}{2\ell+1}P_{\ell-1}(z)$$

を用いれば，ボルツマン方程式（6.6.14），(6.6.15) は以下のようになる．

$$\dot{\Delta}^{(T)}_{T,\ell} + \frac{q}{a(2\ell+1)}\Big((\ell+1)\Delta^{(T)}_{T,\ell+1} - \ell\Delta^{(T)}_{T,\ell-1}\Big)$$
$$= \Big(-2\dot{\mathcal{D}}_q + \omega_c\Psi\Big)\delta_{\ell,0} - \omega_c\Delta^{(T)}_{T,\ell}\,, \tag{6.6.18}$$
$$\dot{\Delta}^{(T)}_{P,\ell} + \frac{q}{a(2\ell+1)}\Big((\ell+1)\Delta^{(T)}_{P,\ell+1} - \ell\Delta^{(T)}_{P,\ell-1}\Big)$$
$$= -\omega_c\Psi\,\delta_{\ell,0} - \omega_c\Delta^{(T)}_{P,\ell}\,. \tag{6.6.19}$$

部分波を用いて右辺の $\Psi(q,t)$ を計算するため，まず式（6.6.13）を $\hat{p}$ に渡って積分する．それには以下の公式を使う．

$$\int d^2\hat{p}\; f(\hat{p}\cdot\hat{q})\,\hat{p}_i\hat{p}_k e_{jk}(\hat{q}) = \frac{1}{2}e_{ij}(\hat{q})\int d^2\hat{p}\; f(\hat{p}\cdot\hat{q})\Big(1-(\hat{p}\cdot\hat{q})^2\Big)\,,$$
$$\int d^2\hat{p}\; f(\hat{p}\cdot\hat{q})\,\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}) = \frac{1}{4}e_{ij}(\hat{q})\int d^2\hat{p}\; f(\hat{p}\cdot\hat{q})\Big(1-(\hat{p}\cdot\hat{q})^2\Big)^2\,,$$

ここで f は $\hat{p}\cdot\hat{q}$ の任意関数，e_{ij} は $\hat{q}_i e_{ij}=0$，$e_{ii}=0$ を満たすトレースがゼロの対称行列で，$\hat{q}$ の任意関数である．積分から以下の結果が得られる．

$$\Psi(q,t) = -\frac{3}{2}\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}\Bigg[-\frac{1}{8}\Big(1-(\hat{p}\cdot\hat{q})^2\Big)^2\Delta^{(T)}_T(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)$$
$$+\left((\hat{p}\cdot\hat{q})^2 + \frac{1}{8}\Big(1-(\hat{p}\cdot\hat{q})^2\Big)^2\right)\Delta^{(T)}_P(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)\Bigg]\,. \tag{6.6.20}$$

式（6.6.16），(6.6.17) で与えられる部分波展開を代入すれば，以下の結果が得られる[*1]．

$$\Psi(q,t) = \frac{1}{10}\Delta^{(T)}_{T,0}(q,t) + \frac{1}{7}\Delta^{(T)}_{T,2}(q,t) + \frac{3}{70}\Delta^{(T)}_{T,4}(q,t) - \frac{3}{5}\Delta^{(T)}_{P,0}(q,t)$$
$$+\frac{6}{7}\Delta^{(T)}_{P,2}(q,t) - \frac{3}{70}\Delta^{(T)}_{P,4}(q,t)\,. \tag{6.6.21}$$

式（6.6.18），(6.6.19) は閉じた連立微分方程式で，重力場の摂動 $\mathcal{D}_q(t)$ から生成される部分波の振幅を記述する．もちろん，実際にこれらの解を求めるには，部分波展開をある最大の ℓ の値で止めなければいけない．

---

*1 R. Crittenden, J. R. Bond, R. L. Davis, G. Efstathiou, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 324 (1993) [astro-ph/9303014].

宇宙マイクロ波背景放射の異方性は観測可能なので，この解はそれ自身興味のある量である．背景放射の異方性は 7 章で扱う．この解はまた，テンソル型の非等方ストレスの計算にも必要となる．テンソル型摂動では，エネルギー–運動量テンソルにおける光子のゼロでない寄与は式（6.1.10）の空間–空間成分のみに現れる．

$$\begin{aligned}\delta T^i_{\gamma j}(\boldsymbol{x},t) &= a^{-4}(t)\int d^3p\, a^2(t)\delta n^{kk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\, p\hat{p}_i\hat{p}_j \\ &= \bar{\rho}_\gamma(t)\sum_\lambda\int d^3q\,\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}J_{kk}(\boldsymbol{q},\hat{p},t,\lambda)\hat{p}_i\hat{p}_j \\ &= \bar{\rho}_\gamma(t)\sum_\lambda\int d^3q\,\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}e_{kl}(\hat{q},\lambda) \\ &\quad\times\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}\,\Delta^{(T)}_T(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_l \\ &= \bar{\rho}_\gamma(t)\sum_\lambda\int d^3q\,\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}e_{ij}(\hat{q},\lambda) \\ &\quad\times\frac{1}{4}\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}\,\Delta^{(T)}_T(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)\left(1-(\hat{p}\cdot\hat{q})^2\right)^2 .\end{aligned} \tag{6.6.22}$$

テンソル型摂動は圧力の摂動を含まないので，式（5.1.43）からこれは非等方ストレステンソル $\pi^T_{\gamma\,ij}(\boldsymbol{x},t)$ と等しいことがわかる．式（6.6.22）と式（6.6.5）を比べれば，以下の結果を得る．

$$\begin{aligned}\pi^T_{\gamma\,q}(t) &= \frac{\bar{\rho}_\gamma(t)}{4}\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}\,\Delta^{(T)}_T(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)\left(1-(\hat{p}\cdot\hat{q})^2\right)^2 \\ &= 2\bar{\rho}_\gamma(t)\left[\frac{1}{15}\Delta^{(T)}_{T,0}(q,t)+\frac{2}{21}\Delta^{(T)}_{T,2}(q,t)+\frac{1}{35}\Delta^{(T)}_{T,4}(q,t)\right] .\end{aligned} \tag{6.6.23}$$

式（6.6.21）と（6.6.23）に現れる，$\ell = 4$ までの部分波の振幅を精度良く計算するには，部分波振幅のボルツマン方程式をより大きな ℓ の値まで（経験的には $\ell = 10$ まで）解かなければいけない．このようにして Ψ を計算できれば，式（6.6.10）の「視線方向積分」解，

$$\begin{aligned}J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t,\lambda) &= \int_{t_1}^t dt'\,\exp\left(-i\boldsymbol{q}\cdot\hat{p}\int_{t'}^t\frac{dt''}{a(t'')}-\int_{t'}^t dt''\,\omega_c(t'')\right) \\ &\times\Bigg[-\hat{p}_k\hat{p}_l\left(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j\right)e_{kl}(\hat{q},\lambda)\,\dot{\mathcal{D}}_q(t')-\omega_c(t')\,\Psi(q,t') \\ &\quad\left(e_{ij}(\hat{q},\lambda)-\hat{p}_i\hat{p}_k e_{kj}(\hat{q},\lambda)-\hat{p}_j\hat{p}_k e_{ik}(\hat{q},\lambda)+\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_l e_{kl}(\hat{q},\lambda)\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{6.6.24}$$

を用いて，もっと大きな ℓ の値まで含めた $J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t,\lambda)$ を計算することができる．ここで，t_1 は再結合よりもずっと早期の時刻で，$\omega_c(t_1)\gg H(t_1)$ となるように選ぶ．すると，$J_{ij}(\boldsymbol{q},\hat{p},t_1,\lambda)$ に比例する項は無視できる．式（6.6.13）で定義される温度と偏光の摂動の振幅を用いれば，視線方向積分は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}\Delta_T^{(T)}(q,\mu,t) = -\Delta_P^{(T)}(q,\mu,t) - 2\int_{t_1}^{t} dt' \exp\Bigg[-iq\mu\int_{t'}^{t}\frac{dt''}{a(t'')} \\ - \int_{t'}^{t}\omega_c(t'')\,dt''\Bigg]\times\dot{\mathcal{D}}_q(t')\,, \qquad (6.6.25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_P^{(T)}(q,\mu,t) = -\int_{t_1}^{t} dt'\ \exp\left[-iq\mu\int_{t'}^{t}\frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^{t}\omega_c(t'')\,dt''\right] \\ \times\,\omega_c(t')\,\Psi(q,t')\,. \qquad (6.6.26)\end{aligned}$$

この視線方向積分を用いれば，ある有限の ℓ で止める部分波展開を用いずに解を求めることができる[*2]．式（6.6.24）を $\hat{p}$ に渡って解析的に積分すれば，$\Psi(q,t)$ の積分方程式が得られる．両辺の e_{ij} の係数を等しく置けば，積分方程式は，

$$\begin{aligned}\Psi(q,t) = \frac{3}{2}\int_{t_1}^{t} dt' \exp\left[-\int_{t'}^{t}\omega_c(t'')\,dt''\right] \\ \times\left[-2\dot{\mathcal{D}}_q(t')K\left(q\int_{t'}^{t}\frac{dt''}{a(t'')}\right) + \omega_c(t')F\left(q\int_{t'}^{t}\frac{dt''}{a(t'')}\right)\Psi(q,t')\right],\end{aligned} \qquad (6.6.27)$$

ここで $K(v)$，$F(v)$ は以下で定義される関数である．

$$K(v)\equiv j_2(v)/v^2\,,\quad F(v)\equiv j_0(v)-2j_1(v)/v+2j_2(v)/v^2\,. \qquad (6.6.28)$$

式（6.6.27）は反復法を用いるか，ヴォルテラ型積分方程式に適した数値計算を用いることで効率よく解くことができる．このようにして $\Psi(q,t)$ が求まれば，式（6.6.24）の数値積分を行うことで光子の強度行列が求まる．

ニュートリノ

ニュートリノの位相空間密度の摂動 $\delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ を記述するボルツマン方程式は式（H.14）で与えられる．

---

*2 S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **74**, 063517 (2006) [astro-ph/0607076]; D. Baskaran, L. P. Grishchuk, A. G. Polnarev, *Phys. Rev. D* **74**, 083008 (2006) [gr-qc/0605100].

$$\frac{\partial\delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial t}+\frac{\hat{p}_i}{a(t)}\frac{\partial\delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial x^i}=\frac{p\bar{n}'(p)}{2}\hat{p}_i\hat{p}_j\,\dot{D}_{ij}(\boldsymbol{x},t)\,, \tag{6.6.29}$$

ここで，計量の摂動として式（6.6.1）を用いた．スカラー型摂動の場合の式（6.1.42）と同様に，δn_ν の代わりに無次元の摂動量 J を扱うのが便利である．

$$a^4(t)\bar{\rho}_\nu(t)J(\boldsymbol{x},\hat{p},t)\equiv N_\nu\int_0^\infty \delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\,4\pi p^3\,dp\,, \tag{6.6.30}$$

ここで N_ν はニュートリノの種類数で，反ニュートリノも別個に数える．また，$\bar{\rho}_\nu\equiv N_\nu\,a^{-4}\int 4\pi p^3\bar{n}_\nu(p)$ である．J が従うボルツマン方程式は

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{x},\hat{p},t)}{\partial t}+\frac{\hat{p}_i}{a(t)}\frac{\partial J(\boldsymbol{x},\hat{p},t)}{\partial x^i}=-2\hat{p}_i\hat{p}_j\,\dot{D}_{ij}(\boldsymbol{x},t)\,, \tag{6.6.31}$$

で，D_{ij} は式（6.6.4）で与えられる．以下の形で与えられる解を探そう．

$$J(\boldsymbol{x},\hat{p},t)=\sum_{\lambda=\pm2}\int d^3q\;e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,e_{ij}(\hat{q},\lambda)\hat{p}_i\hat{p}_j\varDelta_\nu^{(T)}(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)\,. \tag{6.6.32}$$

すると，式（6.6.29）は $\varDelta_\nu^{(T)}$ を記述する方程式となる．

$$\dot{\varDelta}_\nu^{(T)}(q,\mu,t)+\frac{iq\mu}{a(t)}\varDelta_\nu^{(T)}(q,\mu,t)=-2\dot{\mathcal{D}}_q(t). \tag{6.6.33}$$

この方程式は部分波展開で解けて，

$$\varDelta_\nu^{(T)}(q,\mu,t)=\sum_\ell i^{-\ell}(2\ell+1)P_\ell(\mu)\varDelta_{\nu,\ell}^{(T)}(q,t)\,, \tag{6.6.34}$$

$\varDelta_{\nu,\ell}^{(T)}(q,t)$ は以下の式を満たす．

$$\dot{\varDelta}_{\nu,\ell}^{(T)}+\frac{q}{a(2\ell+1)}\Big((\ell+1)\varDelta_{\nu,\ell+1}^{(T)}-\ell\varDelta_{T,\ell-1}^{(T)}\Big)=-2\dot{\mathcal{D}}_q(t)\,\delta_{\ell 0}\,. \tag{6.6.35}$$

もちろん，この連立方程式を解くにはどこか任意の ℓ で展開を止める必要がある．しかし，そうする代わりに，視線方向積分を用いて式（6.6.33）の解を直接求めることもできる．

$$\varDelta_\nu^{(T)}(q,\mu,t)=-2\int_{t_1}^t dt'\;\exp\left(-iq\mu\int_{t'}^t\frac{dt''}{a(t'')}\right)\dot{\mathcal{D}}_q(t')\,. \tag{6.6.36}$$

ここで，時刻 t_1 はニュートリノと物質の相互作用が切れた時期（$T\approx 10^{10}$ K）の直後になるように選ぶ．すると，この時刻でのニュートリノの分布関数はまだ局所熱平衡状態の分布で与えられる．この場合，分布関数の摂動はニュートリノの

温度の摂動 δT_ν と運動速度 $\delta \boldsymbol{u}_\nu$ のみから生じるが，これらはテンソル型摂動ではない．したがって，式（6.6.36）の右辺の初期値の項 $\Delta_\nu^{(T)}(q,\mu,t_1)$ は無視できる．

宇宙背景ニュートリノの角度分布が測定できるようになるのはまだまだ先の話なので，δn_ν の計算結果を使う場所はエネルギー–運動量テンソルの成分の計算のみに限られる．テンソル型摂動でゼロでない成分は $\delta T^i_{\nu j}$ のみである．これは光子のときと同じ式（6.6.22）で与えられるが，$\Delta_T^{(T)}$ は $\Delta_\nu^{(T)}$ に置き換える．

$$
\begin{aligned}
\delta T^i_{\nu j}(\boldsymbol{x},t) &= a^{-4}(t)\int d^3p\,\delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\,p\hat{p}_i\hat{p}_j \\
&= \bar{\rho}_\nu(t)\sum_\lambda\int d^3q\,\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}J(\boldsymbol{q},\hat{p},t,\lambda)\hat{p}_i\hat{p}_j \\
&= \bar{\rho}_\nu(t)\sum_\lambda\int d^3q\,\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}e_{kl}(\hat{q},\lambda) \\
&\quad\times\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}\,\Delta_\nu^{(T)}(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_l \\
&= \bar{\rho}_\nu(t)\sum_\lambda\int d^3q\,\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}e_{ij}(\hat{q},\lambda) \\
&\quad\times\frac{1}{4}\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}\,\Delta_\nu^{(T)}(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)\left(1-(\hat{p}\cdot\hat{q})^2\right)^2 .
\end{aligned}
\tag{6.6.37}
$$

これは非等方ストレステンソル π^T_{ij} に対するニュートリノの寄与である．この結果を式（6.6.5）と比べれば，非等方ストレステンソルとして以下の式を得る．

$$
\pi^T_{\nu\,q}(t) = \frac{\bar{\rho}_\nu(t)}{4}\int\frac{d^2\hat{p}}{4\pi}\,\Delta_\nu^{(T)}(q,\hat{p}\cdot\hat{q},t)\left(1-(\hat{p}\cdot\hat{q})^2\right)^2 . \tag{6.6.38}
$$

光子の場合と同様に，これは部分波展開を用いて書ける．

$$
\pi^T_{\nu\,q}(t) = 2\bar{\rho}_\nu(t)\left[\frac{1}{15}\Delta^{(T)}_{\nu,0}(q,t)+\frac{2}{21}\Delta^{(T)}_{\nu,2}(q,t)+\frac{1}{35}\Delta^{(T)}_{\nu,4}(q,t)\right] . \tag{6.6.39}
$$

しかし，ニュートリノの場合は式（6.6.36）で与えられる解を用いる方が簡単になる．式（6.6.36），(6.1.55）を式（6.6.35）の 3 つ目の表式に用い，さらに式（6.6.5）と比較すれば以下の結果を得る*3．

$$
\pi^T_{\nu\,q}(t) = -4\bar{\rho}_\gamma(t)\int_{t_1}^t dt' K\left(q\int_{t'}^t\frac{dt''}{a(t'')}\right)\dot{\mathcal{D}}_q(t') , \tag{6.6.40}
$$

ここで，

$$
K(v) \equiv j_2(v)/v^2 = -\frac{\sin v}{v^3}-\frac{3\,\cos v}{v^4}+\frac{3\,\sin v}{v^5} \tag{6.6.41}
$$

*3 S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **69**, 023503 (2004) [astro-ph/0306304].

である．この結果は，放射優勢期に地平線の中に入って来る重力波が受ける減衰を計算する際に必要となる．

これでテンソル型摂動を記述する微分方程式をすべて導いたから，$\mathcal{D}_q(t)$ の計算に移ろう．これは宇宙マイクロ波背景放射のテンソル型異方性を計算する際に必要となる最も基本的な量である．まず始めに，テンソル型非等方ストレスを無視しよう．非等方ストレスの効果は本節の終わりで考慮する．非等方ストレスの効果は，宇宙のエネルギー密度が1つかそれ以上の完全流体によって支配されている期間，つまり宇宙の歴史の大部分において無視できるし，その効果は常に小さい．この近似を用いれば，計量のテンソル型摂動 D_{ij} のフーリエ成分を記述する場の方程式（6.6.6）は以下のように簡単化される．

$$\ddot{\mathcal{D}}_q(t) + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathcal{D}}_q(t) + \frac{q^2}{a^2}\mathcal{D}_q(t) = 0\,. \tag{6.6.42}$$

本節の最初の方で述べたように，$q/a \ll \dot{a}/a$ となるような非常に早期には解の1つは定数でもう1つは減衰するから，この期間が十分長く続けば減衰解は無視できる．したがって，初期条件は早期の $\mathcal{D}_q(t)$ が定数 $\mathcal{D}_q^o$ となるように選ぶ．

後期の $\mathcal{D}_q(t)$ の進化を扱うには，再び独立変数を t から $y \equiv a/a_{\rm EQ} = \bar{\rho}_M/\bar{\rho}_R$ に変えるのが便利である．ここで $a_{\rm EQ}$ は物質と放射の密度が等しくなる時刻でのロバートソン–ウォーカースケール因子を表す．宇宙のエネルギー密度が放射と非相対論的物質に支配されていると仮定すれば[*4]，式（6.3.11）は以下の形に書ける．

$$\frac{H_{\rm EQ}\,dt}{\sqrt{2}} = \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y}}\,, \tag{6.6.43}$$

$H_{\rm EQ}$ は物質密度と放射密度が等しくなる時刻での宇宙膨張率である．式（6.6.42）より，

$$(1+y)\frac{d^2\mathcal{D}_q}{dy^2} + \left(\frac{2(1+y)}{y} + \frac{1}{2}\right)\frac{d\mathcal{D}_q}{dy} + \kappa^2\mathcal{D}_q = 0, \tag{6.6.44}$$

ここで κ は式（6.5.9）で与えられる次の無次元の波数を表す．

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{2}q}{a_{\rm EQ}H_{\rm EQ}} = \frac{(q/a_0)\sqrt{\Omega_R}}{H_0\Omega_M} = \frac{19.3(q/a_0)[{\rm Mpc}^{-1}]}{\Omega_M h^2}\,. \tag{6.6.45}$$

[*4] より一般的な仮定のもとでのテンソル型摂動の振幅の進化は，L. A. Boyle, P. J. Steinhardt [astro-ph/0512014] で考慮されている．

そして，初期条件は $y \ll 1$ に対して $\mathcal{D}_q \to \mathcal{D}_q^o$ となる．スカラー型摂動の場合と同様に，2 つの極限 $\kappa \ll 1$，$\kappa \gg 1$ では解析解を求めることができる．

まず始めに $\kappa \gg 1$ の場合を考えよう．この極限では，物質と放射の密度が等しくなる時刻にすでに $q/a \gg \dot{a}/a$ であるから，摂動は放射優勢期の初めのほうで地平線の中に入る．よって，$\kappa \gg 1$ には 2 つの部分的に重なる時期がある．つまり，1 つは放射優勢期の早期で摂動が地平線の外側にある期間と，もう 1 つは摂動が地平線の中に十分入ってから現在までの期間である．この両方の期間において解析解を求めることができる．そしてこれらの期間は重なるから，重なった時期に解析解をつなげてやれば，後期の重力波の振幅と，摂動が地平線の外にあった頃の初期条件を関係づけることができる．

まず，宇宙が放射優勢のとき（$y \ll 1$）には，式（6.6.44）は，

$$\frac{d^2\mathcal{D}_q}{dy^2} + \left(\frac{2}{y}\right)\frac{d\mathcal{D}_q}{dy} + \kappa^2\mathcal{D}_q = 0 \tag{6.6.46}$$

となる．$y \to 0$ で定数 $\mathcal{D}_q^o$ になる解は，

$$D_q = \frac{\sin(\kappa y)}{\kappa y}\,\mathcal{D}_q^o \tag{6.6.47}$$

で与えられる．

次に，摂動が地平線のずっと内側にある場合，つまり $q/a \gg H$ の場合を考えよう．この場合の解は WKB 近似を用いて求められる．解は任意の時間依存性を持つ $a(t)$ に対して得られるから，これから導く結果は真空のエネルギーがある場合でも適用できる（解は真空のエネルギーが一定であるかないかに関わらず成り立つ）．この目的のためには，式（6.6.42）を 1 階微分を含まない標準的な形に書き直さなければいけない．新しい独立変数を以下のように定義しよう[*5]．

$$x \equiv \int a^{-3}(t)\,dt\ .$$

すると，式（6.6.42）は以下のようになる．

$$\frac{d^2\mathcal{D}_q}{dx^2} + q^2 a^4 \mathcal{D}_q = 0\ . \tag{6.6.48}$$

[*5] 式（6.6.42）の 1 階微分の項を消去する標準的な方法は，独立変数ではなく従属変数を変える方法である．たとえば，V. S. Mukhanov, H. A. Feldman, R. H. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992); K. Ng, A. Speliotopoulos, *Phys. Rev. D* **52**, 2112 (1995) を見よ．より最近の文献は，J. R. Pritchard, M. Kamionkowski, *Ann. Phys.* **318**, 2 (2005)．本節で得られる結果は，この標準的な方法で得られるものよりもずっと単純になる．なぜなら，従属変数ではなく独立変数を変えることにより，転回点のない WKB 解が得られるからである．

解を $\mathcal{D}_q = A\exp(\pm iq\int a^2\,dx)$ と書き，式（6.6.48）で q^2 と q に比例する項のみを残す．すると $dA/dx = -(A/2a^2)da^2/dx$ を得るから，$A \propto 1/a$ となる．よって $\mathcal{D}_q$ の WKB 解は $a^{-1}\exp(\pm iq\int a^2\,dx) = a^{-1}\exp(\pm iq\int a^{-1}\,dt)$ で与えられる．因子 $1/a$ があることから重力波のエネルギー密度が a^{-4} に比例して減少することが導かれる．因子 $1/a$ は個々の重力子の赤方偏移を表し，因子 a^{-3} は宇宙膨張に伴う重力子の数密度の減少から生じる[*6]．

2 つの WKB 解の正しい線形結合を求めるには，これらを式（6.6.47）で与えられる放射優勢期の解と比べなければいけない．この作業は $q/a \gg H$ **かつ** $y \ll 1$ である時期に行う．放射優勢期には真空のエネルギーはおそらく無視できるから，$q/aH = \kappa\, a_{\rm EQ}H_{\rm EQ}/\sqrt{2}aH = \kappa y$ となる．$\kappa \gg 1$ のとき，$y \ll 1$ であっても $\kappa y \gg 1$ であるような y が存在する．そのような y の範囲では，

$$q\int \frac{dt}{a} = q\int \frac{da}{Ha^2} = \kappa\int \frac{y\,da}{a} = \kappa y$$

であるから，（$y \propto a$ を思い出せば）式（6.6.47）と合う $a^{-1}\exp(+iq\int a^{-1}\,dt)$ と $a^{-1}\exp(-iq\int a^{-1}\,dt)$ の線形結合は以下で与えられることがわかる．

$$\mathcal{D}_q = \frac{1}{\kappa y}\sin\left(q\int_0^t \frac{dt'}{a(t')}\right)\mathcal{D}_q^o\,. \tag{6.6.49}$$

繰り返すが，これは地平線のずっと内側での解で，宇宙の組成が何であろうが成り立つ．現在に近い時刻では，

$$\mathcal{D}_q = \frac{\sqrt{\Omega_R H_0^2}}{k}\sin\left(\eta + k(t-t_0)\right)\mathcal{D}_q^o \tag{6.6.50}$$

となり，$k \equiv q/a_0$，$\eta \equiv ka_0\int_0^{t_0} dt/a(t)$ である．

宇宙論的な重力波は，直接的に検出できるかもしれない[*7]．この方法で検出

[*6] G&C の 15.10 節を見よ．

[*7] 最近の研究については，N. Seto, S. Kawamura, T. Nakamura, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 221103 (2001) [astro-ph/0108011]; A. Buonanno [gr-qc/0303085]; A. Cooray [astro-ph/0503118]; T. L. Smith, M. Kamionkowski, A. Cooray, *Phys. Rev. D* **73**, 023504 (2006) [astro-ph/0506422]; G. Efstathiou, S. Chongchitnan, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **163**, 204 (2006) [astro-ph/0603118]; B. Friedman, A. Cooray, A. Melchiorri, *Phys. Rev. D* **74**, 123509 (2006) [astro-ph/0610220] を参照のこと．

できるテンソル型摂動は必ず（これまで考えてきた）$\kappa \gg 1$ を持つから，再結合の時刻よりもずっと早期に地平線の中に入ってきたはずである．したがって，これらを使えば非常に早期の宇宙を直接観測し，通常の粒子加速器では到達できないような高エネルギーの物理を探求できるかもしれない．既存の地上レーザー干渉計型重力波天文台（LIGO = Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory）は，100 Hz 程度の周波数を持つ重力波に感度がある．この周波数を持つ摂動は宇宙の温度が約 10^8 GeV 程度の頃に地平線の中に入ってきたが，LIGO は宇宙論的な重力波を検出するのに必要な感度を備えていない．しかし，レーザー干渉計を宇宙に打ち上げることで宇宙論的重力波を検出できるかもしれない．たとえば，2 つの重力波検出器が考慮されている．アメリカ合衆国のビッグバンオブザーバー（Big Bang Observer）と日本のデシヘルツ帯レーザー干渉計型重力波天文台（Decihertz Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory）である．両方とも 0.01 から 0.1 Hz の周波数を持つ重力波に感度があり，式（6.6.43）によれば $qc/2\pi a_0 = 10^{-2}$ Hz を持つ重力波は，$\kappa = 1.3 \times 10^{15}/\Omega_M h^2 \gg 1$ を持つ．このような検出器が測定する重力波の波長は十分短く，宇宙の温度が 10^4 から 10^5 GeV の間に地平線の中に入ってきた摂動に対応する．この場合，さまざまな対消滅のエネルギー閾値で物質の状態方程式が変わり，それに伴って $a(t)$ の時間依存性が変わることからテンソル型摂動のスペクトルに特徴的なパターンが生じる*8．原始テンソル型スペクトルの形についての適当な仮定のもとでは，テンソル型摂動の振幅が短波長で直接検出できるほど十分に大きければ，長波長でも宇宙マイクロ波背景放射の偏光に対する効果を通じて間接的に検出できるだろうと考えられている*9．これは 7.4 節で議論する．

宇宙論的重力波が宇宙マイクロ波背景放射に与える影響を計算するには，1 程度，あるいは 1 以下の κ の値も考えねばならない．そこで，解析解を求めることのできるもう 1 つの極限 $\kappa \ll 1$ を考えよう．この場合，物質と放射の密度が等しくなる時刻ではまだ $q/a \ll \dot{a}/a$ であるから摂動は地平線の外にあり，十分に物質優勢な宇宙（$y \gg 1$）でも $\mathcal{D}_q(t)$ は定数 $\mathcal{D}_q^0$ のままである．この極限 $y \gg 1$ では，κ の値が何であっても式（6.6.42）は以下の形になる．

---

*8 Y. Watanabe, E. Komatsu, *Phys. Rev. D* **73**, 123515 (2006) [astro-ph/0604176].

*9 Smith, Kamionkowski, Cooray, 脚注 7 を参照.

$$y\frac{d^2\mathcal{D}_q}{dy^2}+\frac{5}{2}\frac{d\mathcal{D}_q}{dy}+\kappa^2\mathcal{D}_q=0\,. \tag{6.6.51}$$

これは 2 つの独立解を持ち，$\kappa\sqrt{y}$ の関数として以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}\frac{2j_1(2\kappa\sqrt{y})}{\kappa\sqrt{y}}&=\frac{-\cos\left(2\kappa\sqrt{y}\right)}{\kappa^2 y}+\frac{\sin\left(2\kappa\sqrt{y}\right)}{2\kappa^3y^{3/2}},\\ -\frac{2n_1(2\kappa\sqrt{y})}{\kappa\sqrt{y}}&=\frac{\sin\left(2\kappa\sqrt{y}\right)}{\kappa^2 y}+\frac{\cos\left(2\kappa\sqrt{y}\right)}{2\kappa^3y^{3/2}}\,.\end{aligned} \tag{6.6.52}$$

物質優勢期には $q/aH=\kappa a_{\mathrm{EQ}}H_{\mathrm{EQ}}/\sqrt{2}aH=\kappa\sqrt{y}$ であるから，$\kappa\sqrt{y}\ll 1$ のときの解が定数 $\mathcal{D}_q^o$ に近づくという条件を課さなくてはならない．この条件を満たすには，$\kappa\sqrt{y}\to 0$ で特異点となる 2 番目の解を捨てる必要がある．一方，1 番目の解は定数 4/3 に近づくから，$\kappa\ll 1$ のときの正しい解は，

$$\mathcal{D}_q\longrightarrow\frac{3\,\mathcal{D}_q^o}{4}\left(\frac{-\cos\left(2\kappa\sqrt{y}\right)}{\kappa^2 y}+\frac{\sin\left(2\kappa\sqrt{y}\right)}{2\kappa^3y^{3/2}}\right) \tag{6.6.53}$$

である．（式（6.6.51）は $y\gg 1$ のときにのみ適用できるが，式（6.6.53）は $\kappa\ll 1$ とすべての y に対して成り立つことに注意しよう．なぜなら，式（6.6.53）は $\kappa\sqrt{y}\ll 1$ であれば正しい結果 $\mathcal{D}_q(t)=\mathcal{D}_q^o$ を与えるが，この条件は $\kappa\ll 1$ であれば $y\gg 1$ も許すためである．）

$\kappa\gg 1$ と $\kappa\ll 1$ の場合の結果を内挿するのは物質優勢期 $y\gg 1$ が一番簡単である．これは物質と放射の相互作用が切れる時刻 $y\approx 3$ ではまだそれほど良い近似ではないが，その後は良い近似となる．この場合テンソル型摂動は式（6.6.51）で記述され，一般解は式（6.6.52）で与えられる 2 つの解の線形結合で与えられる．任意の κ に対し，これは以下のような便利な形に書ける．

$$\mathcal{D}_q=\frac{3\,\mathcal{D}_q^o\,\mathcal{U}(\kappa)}{4\,\kappa^2}\left(\frac{-\cos\left(2\kappa\sqrt{y}+\varXi(\kappa)\right)}{y}+\frac{\sin\left(2\kappa\sqrt{y}+\varXi(\kappa)\right)}{2\kappa y^{3/2}}\right)\,, \tag{6.6.54}$$

ここで $\mathcal{U}$，$\varXi$ は実数で，κ の任意関数を表す．式（6.6.53）より，$\kappa\ll 1$ のときには，

$$\mathcal{U}(\kappa)\longrightarrow 1\,,\quad \varXi(\kappa)/\kappa^3\longrightarrow 0 \tag{6.6.55}$$

であることがわかる．これが解を式（6.6.54）で与えられる形に書いた理由であ

る．また，$y \gg 1$ では式（6.6.49）は，

$$\mathcal{D}_q = \frac{\sin\left(2\kappa(\sqrt{1+y}-1)\right)}{\kappa y}\mathcal{D}_q^o \tag{6.6.56}$$

となり，したがって $\kappa \gg 1$ では，

$$\mathcal{U}(\kappa) \longrightarrow \frac{4\kappa}{3}, \quad \Xi(\kappa) \longrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\kappa \tag{6.6.57}$$

となる．一般の κ に対する $\mathcal{U}(\kappa)$ と $\Xi(\kappa)$ の値を求めるには，コンピュータによる計算で式（6.6.44）の解を求める必要がある．その結果を表 6.2 に与える[*10]．式（6.6.55），(6.6.57）で与えられる解析的な極限は，それぞれ $\kappa \ll 1$，$\kappa \gg 1$ の場合のコンピュータによる計算結果と良く一致しているのがわかる．

ここで，非等方ストレスの効果について考えよう[*11]．非等方ストレステンソルは光子とニュートリノの寄与の和で書けるが，再結合の時期以前では光子の平均自由行程が短く，それ以降では光子による全エネルギー密度への寄与が小さいため，光子による非等方ストレスへの寄与は小さい．よって，ニュートリノ（反ニュートリノも含む）の寄与だけが残る．ニュートリノは宇宙の温度が 10^{10} K 程度以下に下がってからは基本的に無衝突で運動し[*12]，宇宙の温度が 10^4 K 程度になって冷たい暗黒物質の密度が重要になるまでは宇宙のエネルギー密度のかなりの部分を占めていた．テンソル型非等方ストレステンソルは式（6.6.40）で与えられるから，重力場の方程式（6.6.6）は以下のように積分–微分方程式となる[*13]．

$$\ddot{\mathcal{D}}_q(t) + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathcal{D}}_q(t) + \frac{q^2}{a^2}\mathcal{D}_q(t) = -64\pi G\bar{\rho}_\nu(t)\int_0^t K\left(q\int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')}\right)\dot{\mathcal{D}}_q(t')\,dt', \tag{6.6.58}$$

$K(v)$ は式（6.6.41）で与えられる．非等方ストレスがあるにも関わらず，$q/a \ll H$ における解の 1 つは $\mathcal{D}_q(t)$ が時間に依存しない解であることに着目しよう．こ

[*10] デュエイン・ダイカスによる私信．

[*11] S. Weinberg, 脚注 3 を参照．早期のコンピュータによる計算結果については，J. R. Bond, in *Cosmology and Large Scale Structure, Les Houches Session* LX, eds. R. Schaeffer, J. Silk, J. Zinn-Justin, Elsevier (1996) を見よ．

[*12] 電子–陽電子の対消滅の時刻以前に地平線に入ってきたような非常に短波長の摂動に対しては，ニュートリノ同士，あるいはニュートリノと電子や陽電子との衝突も含めなくてはいけない．これは M. Lattanzi, G. Montani, *Mod. Phys. Lett. A* **20**, 2607 (2005) [astro-ph/0508364] によって考慮されている．

[*13] この積分の下限は原理的にはニュートリノと他の物質との相互作用が切れた時刻（温度にして約 10^{10} K）に取るべきであるが，良い近似で $t = 0$ としても良い．この時刻ゼロは放射優勢期のスケール因子を $a \propto t^{1/2}$ と書くことで定義される．

表 6.2 テンソル型摂動の遷移関数

κ	$\mathcal{U}$	Ξ	κ	$\mathcal{U}$	Ξ
0.001	1.0000	-2.991×10^{-11}	1.8	2.990	-2.418
0.002	1.0000	-9.557×10^{-10}	2.0	3.250	-2.781
0.003	1.0000	-7.239×10^{-9}	2.5	3.906	-3.706
0.004	1.0000	-9.236×10^{-8}	3.0	4.565	-4.646
0.005	1.0001	-9.236×10^{-8}	3.5	5.222	-5.597
0.006	1.0001	-2.286×10^{-7}	4.0	5.886	-6.555
0.007	1.0002	-4.908×10^{-7}	4.5	6.551	-7.518
0.008	1.0002	-9.498×10^{-7}	5.0	7.216	-8.484
0.009	1.0003	-1.697×10^{-6}	5.5	7.878	-9.453
0.01	1.0004	-2.847×10^{-6}	6.0	8.541	-10.425
0.02	1.0016	-7.848×10^{-5}	6.5	9.208	-11.398
0.03	1.0037	-4.655×10^{-4}	7.0	9.875	-12.372
0.04	1.0065	-1.397×10^{-3}	7.5	10.538	-13.347
0.05	1.0095	-2.809×10^{-3}	8.0	11.201	-14.324
0.06	1.0128	-4.397×10^{-3}	8.5	11.869	-15.302
0.07	1.0165	-6.023×10^{-3}	9.0	12.538	-16.279
0.08	1.0210	-7.929×10^{-3}	10.0	13.863	-18.237
0.09	1.0260	-1.044×10^{-2}	11.0	15.202	-20.196
0.1	1.0310	-1.352×10^{-2}	12.0	16.526	-22.157
0.2	1.0960	-5.802×10^{-2}	13.0	17.867	-24.119
0.3	1.1800	-0.1293	14.0	19.190	-26.081
0.4	1.2766	-0.2223	15.0	20.532	-28.044
0.5	1.3816	-0.3327	16.0	21.854	-30.001
0.6	1.4926	-0.4568	17.0	23.197	-31.973
0.7	1.6079	-0.5919	18.0	24.52	-33.94
0.8	1.7265	-0.7357	19.0	25.86	-35.90
0.9	1.848	-0.8866	20.0	27.18	-37.87
1.0	1.970	-1.043	21.0	28.53	-39.83
1.1	2.095	-1.205	22.0	29.85	-41.80
1.2	2.220	-1.370	23.0	31.19	-43.77
1.4	2.474	-1.171	24.0	32.51	-45.73
1.6	2.731	-2.061	25.0	33.86	-47.70

れは 5.4 節で述べた一般的な定理と合致している．

この波動方程式は，放射優勢期の間（ただし e^+–e^- の対消滅の時刻よりはずっと後）に地平線の中に入ってくるような短波長，すなわち $\kappa \gg 1$，を持つ摂動に対しては特に単純になる．この時期のスケール因子が $a \propto \sqrt{t}$ となるように時刻ゼロを定義しよう．t の代わりに新しい変数，

$$u \equiv q \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \frac{2qt}{a(t)} \tag{6.6.59}$$

の関数として $\mathcal{D}_q$ を書くのが便利である．フリードマン方程式 $8\pi G\bar{\rho}/3 = H^2 = 1/4t^2$ を用いれば，放射優勢期における重力場の方程式（6.6.58）は，

$$\frac{d^2}{du^2}\mathcal{D}_q(u) + \frac{2}{u}\frac{d}{du}\mathcal{D}_q(u) + \mathcal{D}_q(u) = -\frac{24\, f_\nu}{u^2}\int_0^u K(u-u')\,\frac{d\,\mathcal{D}_q(u')}{du'}\,du' \tag{6.6.60}$$

と書け，f_ν は以下で定義される．

$$f_\nu \equiv \frac{\bar{\rho}_\nu}{\bar{\rho}_\nu + \bar{\rho}_\gamma} = \frac{3\cdot(7/8)\cdot(4/11)^{4/3}}{1+3\cdot(7/8)\cdot(4/11)^{4/3}} = 0.4052\ . \tag{6.6.61}$$

放射優勢期の後期になると因子 $1/u^2$ のために式 (6.6.60) の右辺が無視できるようになり，$\mathcal{D}_q(u)$ は斉次方程式の解に近づく．一般的には $\sin u/u$ と $\cos u/u$ の線形結合が解となると期待されるが，実際には解に $\cos u/u$ の項は現れない*14．式（6.6.60）の数値解を求めることより，もし $\mathcal{D}_q(u)$ が $u \ll 1$ において値 $\mathcal{D}_q^o$ を持つなら，$u \gg 1$ では（ただし，まだ放射優勢期にある），

$$\mathcal{D}_q(u) \to \mathcal{D}_q^o\,\alpha\,\frac{\sin(u)}{u} \tag{6.6.62}$$

が求まる．ここで $\alpha = 0.8026$ である．そして，これが式（6.6.47）に代わって後の重力波の振幅の進化に対する初期条件を与えるから，物質優勢期での振幅の減衰の効果は（δ を無視すれば）単に式（6.6.54）で与えられる結果に因子 α をかけるだけで良い*15．

より長波長の重力波の減衰の計算は，もっとずっと込み入っている．振動の位

---

*14 D. Dicus, W. Repko, *Phys. Rev.* **72**, 088302(2005) [astro-ph/0509096] により，解には $\cos u/u$ の項が現れないことが解析的に示された．彼らが求めた解析解は，急速に収束する球ベッセル関数の和である．S. Bashinsky, astro-ph/0505502 は，因果律を用いて $\cos u/u$ の項が存在しないことを非常に一般的に示した．

*15 ニュートリノの質量や化学ポテンシャルの効果は，K. Ichiki, M. Yamaguchi, J. Yokayama, *Pub. Astron. Soc. Pacific* **119**, 30 (2007) [hep-ph/0611121] によって考慮されている．

相がずれるため，脱結合の時刻での重力波の振幅に対する非等方ストレスの効果は波数に強く依存し，ある波数では減衰ではなく増幅が得られたりする．しかし，典型的には $\kappa = O(1)$ を持つ重力波の振幅は 5%程度減衰する．

減衰の効果は $\kappa \ll 1$ ではとにかく小さいため，物質優勢期での重力波の振幅は全波長に渡って式（6.6.54）に因子 $\alpha(\kappa)$ をかけたものとして十分良い近似となる．

$$\mathcal{D}_q = \frac{3\,\mathcal{D}_q^o \mathcal{U}(\kappa)\alpha(\kappa)}{4\,\kappa^2}\left(\frac{-\cos\left(2\kappa\sqrt{y}+\Xi(\kappa)\right)}{y}+\frac{\sin\left(2\kappa\sqrt{y}+\Xi(\kappa)\right)}{2\kappa y^{3/2}}\right), \tag{6.6.63}$$

ここで $\alpha(\kappa)$ は $\kappa \gg 1$ における極限値 $\alpha(\kappa) = 0.8026$ からなめらかに増加し，$\kappa \ll 1$ で $\alpha(\kappa) \simeq 1$ となるような適当な関数である．たとえば，$\alpha(\kappa) \simeq (1 + 0.8026\kappa)/(1+\kappa)$ のようなものが考えられる．宇宙論的な重力波に関係するすべての観測量は，この因子 $\alpha(\kappa)$ 分だけ減少する．

第7章
マイクロ波で観た空の異方性

さて，2.6 節で紹介した宇宙マイクロ波背景放射異方性の理論に立ち戻ろう．7.1 節では，観測される温度ゆらぎを記述する一般公式を導く．7.2 節と 7.3 節では，これらの結果を 6 章で与えた宇宙論的摂動の進化の解析と組み合わせ，スカラー型摂動とテンソル型摂動のそれぞれについて多重極展開係数の計算を簡単化する近似法を紹介する．7.4 節では，マイクロ波背景放射の偏光を扱う．

7.1 温度ゆらぎの一般公式

本節では，観測される温度ゆらぎにおけるスカラー型摂動とテンソル型摂動の寄与を記述する一般公式を導く．まず，6.1 節で導いた同期ゲージのボルツマン方程式の解を現在時刻まで持ってくるところから始める．この方法は，CMBfast や CAMB のようなコンピュータプログラムに組み込めば非常に正確な数値結果を出すが，温度ゆらぎの公式の導出もコンピュータプログラムの計算結果もその物理的意味は不透明である．そこで次に，熱平衡状態から完全な宇宙の晴れ上がり状態への遷移が最終散乱の時刻 t_L で瞬時に起こったとする近似を用いて結果を単純化する．この近似では，赤方偏移 10（約 4.6 億年）あたりで再電離された物質による光子の散乱は無視される．温度ゆらぎの相関関数で角波数 ℓ が 20 程度より大きい部分では再電離による補正が単純なので，これは 7.2 節で取り入れる．7.2 節では，不透明な宇宙から透明な宇宙へ遷移する間に生じる粘性減衰の効果，および t_L に渡って平均を取ることで生じる効果を取り入れることで，遷移が瞬間的だとする近似を一部改良する．（本節の最後で，光子の軌跡を t_L から現在時刻まで追うことにより，ボルツマン方程式を用いることなく，より一般的なゲージで同じ結果が得られることを示す．）本節で用いる瞬間脱結合近似は，他の近似

と組み合わせて 7.2 節で温度ゆらぎの多重極展開係数の解析的表式を導出するのに用いる．コンピュータが必要となる計算は，たった 1 つの数値積分のみである．

黒体放射のエネルギー密度は温度の 4 乗に比例するから，ある方向 $\hat{n}$ から到来する放射の温度ゆらぎと平均温度の比は，現在時刻 $t = t_0$ において我々の位置 $\boldsymbol{x} = 0$ で方向 $\hat{p} = -\hat{n}$ に伝播する光子のエネルギー密度の摂動とその平均密度の比に 1/4 をかけたものになる．すると，式（6.1.13），あるいは式（6.6.8）から，

$$\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} = \frac{1}{4} J_{ii}(\boldsymbol{x} = 0, -\hat{n}, t_0) \tag{7.1.1}$$

が得られる．ここで $J_{ij}(\boldsymbol{x}, \hat{p}, t)$ は無次元の密度行列で，スカラー型摂動の場合は式（6.1.13），テンソル型摂動の場合は式（6.6.8）で定義される．式（6.1.18），（6.1.20）で与えられるスカラー型摂動の分解，および式（6.6.9），(6.6.13）で与えられるテンソル型摂動の分解を用いれば，スカラー型摂動（S）とテンソル型摂動（T）による温度ゆらぎの寄与はそれぞれ，

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^{(S)} = \frac{1}{4} \int d^3q \, \alpha(\boldsymbol{q}) \, \Delta_T^{(S)}(q, -\hat{q}\cdot\hat{n}, t_0) \,, \tag{7.1.2}$$

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^{(T)} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3q \, \beta(\boldsymbol{q}, \lambda) \, \hat{n}_k \hat{n}_l \, e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \Delta_T^{(T)}(q, -\hat{q}\cdot\hat{n}, t_0) \tag{7.1.3}$$

と書ける．ここで，$\alpha(\boldsymbol{q})$ と $\beta(\boldsymbol{q}, \lambda)$ はスカラー型摂動とテンソル型摂動にそれぞれ支配的な寄与をすると仮定される単一のモードを記述する確率変数，$e_{kl}(\hat{q}, \lambda)$ は 6.6 節で定義した波数 $\boldsymbol{q}$ とヘリシティλ を持つ重力波を記述する偏光テンソル，そして $\Delta_T^{(S)}(q, \mu, t)$ と $\Delta_T^{(T)}(q, \mu, t)$ はそれぞれ式（6.1.20）と式（6.6.13）の分解に現れる振幅で，スカラー型摂動とテンソル型摂動による無次元密度行列 J_{ij} への寄与を表す．

天球上の温度変化の角度依存性を表すため，視線方向積分形式を用いる．これはスカラー型摂動の場合は式（6.1.37）と（6.1.38），テンソル型摂動の場合は式（6.6.25）と（6.6.26）で与えられるから，スカラー型摂動は，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^{(S)} = &\frac{1}{4} \int d^3q \, \alpha(\boldsymbol{q}) \\ &\times \int_{t_1}^{t_0} dt \, \exp\left[i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} - \int_t^{t_0} dt' \, \omega_c(t')\right]\end{aligned}$$

$$\times \Bigg[-2\dot{A}_q(t) + 2(\boldsymbol{q}\cdot\hat{n})^2 \dot{B}_q(t) + 3\omega_c(t)\varPhi(q,t)$$
$$- 4i(\boldsymbol{q}\cdot\hat{n})\,\omega_c(t)\,\delta u_{Bq}(t)/a(t)$$
$$+ \frac{3}{4}\Big(1-(\hat{q}\cdot\hat{n})^2\Big)\,\omega_c(t)\,\varPi(q,t)\Bigg] \tag{7.1.4}$$

と書け，テンソル型摂動は，

$$\Big(\frac{\varDelta T(\hat{n})}{T_0}\Big)^{(T)} = \frac{1}{4}\sum_{\lambda=\pm 2}\int d^3q\;\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,\hat{n}_k\hat{n}_l\,e_{kl}(\hat{q},\lambda)$$
$$\times \int_{t_1}^{t_0} dt\;\exp\left[i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')} - \int_t^{t_0} dt'\,\omega_c(t')\right]$$
$$\times \Big[-2\dot{\mathcal{D}}_q(t) + \omega_c(t)\,\varPsi(q,t)\Big] \tag{7.1.5}$$

と書ける．ここで，いくつかの事項を思い出しておこう．t_1 は再結合の時刻よりもずっと以前の時刻にとり，そこにある光子は現在時刻までに何度も散乱されるものとする．$\omega_c(t)$ は時刻 t での光子の衝突率，$A_q(t)$ と $B_q(t)$ は 5.2 節で定義した同期ゲージの計量のスカラー型摂動，$\varPhi(q,t)$ と $\varPi(q,t)$ は式（6.1.21）で定義したスカラー型摂動の源泉関数，$\delta u_{Bq}(t)$ はバリオンプラズマのスカラー型速度ポテンシャル，$\mathcal{D}_q(t)$ は 5.2 節で定義した重力波の振幅，そして $\varPsi(q,t)$ は式（6.6.11）と（6.6.12）で定義したテンソル型の源泉関数である．

スカラー型の温度ゆらぎを与える式（7.1.4）は，まだ最も便利な形には書かれていない．今の形では，最終散乱が瞬時に起こるとする極限を取ったときの式（7.1.4）の各項と，2.6 節で議論したザクス–ヴォルフェ効果，ドップラー効果，内的温度ゆらぎ，積分ザクス–ヴォルフェ効果といった温度ゆらぎの分解との対応がつかない．また，式（7.1.4）の各項は，式（5.3.39）–(5.3.42）の同期ゲージの条件を保存する限定的なゲージ変換に対してでさえ不変ではない．そこで，次の恒等式を用いて式（7.1.4）を書き換えよう．

$$\exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\right)(\boldsymbol{q}\cdot\hat{n})^2\dot{B}_q(t) =$$
$$-\exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\right)\frac{d}{dt}\Big(a^2(t)\ddot{B}_q(t) + a(t)\dot{a}(t)\,\dot{B}(t)\Big)$$
$$+\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\right)\right.$$

$$\times\Big[a^2(t)\ddot{B}_q(t)+a(t)\dot{a}(t)\dot{B}_q(t)+ia(t)\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\dot{B}_q(t)\Big]\Big\}\,. \tag{7.1.6}$$

これを式（7.1.4）に用いて部分積分すれば，スカラー型の温度ゆらぎの最終的な公式が得られる．

$$\Big(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\Big)^{(S)}=\Big(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\Big)^{(S)}_{\text{早期}}+\Big(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\Big)^{(S)}_{\text{ISW}}\,. \tag{7.1.7}$$

最初の「早期」項は，自由電子の数密度が大きい時期，つまり再結合以前と再電離以降の時期のみからの寄与を受ける．

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\Big)^{(S)}_{\text{早期}}&=\int d^3q\;\alpha(\boldsymbol{q})\\&\times\int_{t_1}^{t_0}dt\;\exp\Big[i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}-\int_t^{t_0}dt'\,\omega_c(t')\Big]\\&\times\omega_c(t)\Big[\frac{3}{4}\Phi(q,t)+\frac{3}{16}\Big(1-(\hat{q}\cdot\hat{n})^2\Big)\Pi(q,t)\\&\qquad-\frac{1}{2}a^2(t)\ddot{B}_q(t)-\frac{1}{2}a(t)\dot{a}(t)\dot{B}_q(t)\\&\qquad-i(\boldsymbol{q}\cdot\hat{n})\Big(\delta u_{Bq}(t)/a(t)+a(t)\dot{B}_q(t)/2\Big)\Big]\,.\end{aligned} \tag{7.1.8}$$

2 番目の「積分ザクス–ヴォルフェ（ISW = Integrated Sachs–Wolfe）」項は，t_1 から現在時刻に至るまでのすべての期間からの寄与を受ける．

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\Big)^{(S)}_{\text{ISW}}&=-\frac{1}{2}\int d^3q\;\alpha(\boldsymbol{q})\int_{t_1}^{t_0}dt\\&\qquad\times\exp\Big[i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}-\int_t^{t_0}dt'\,\omega_c(t')\Big]\\&\qquad\times\frac{d}{dt}\Big[A_q(t)+a^2(t)\ddot{B}_q(t)+a(t)\dot{a}(t)\dot{B}_q(t)\Big]\,.\end{aligned} \tag{7.1.9}$$

（ここで，$t=t_0$ における部分積分の表面項を無視しているが，これは表面項が $\hat{n}$ の線形関数なので，$\ell=0$ と $\ell=1$ を持つ部分波にしか寄与しないことによる．この表面項を「後期」項と呼ぶことにしよう．この項は後で異なる方法を用いて計算し，結果を式（7.1.38）に与える．）

式（7.1.9）で与えられる積分ザクス–ヴォルフェ項は，最終散乱から現在時刻まで伝播するマイクロ波光子の道筋上で，重力場が時間変動した場合に生じる効果を表す．2.6 節で既に述べたように，最終散乱から現在時刻まで（より正確に

は，透明度 $\exp\left(-\int_t^{t_0}\omega_c(t')dt'\right)$ が無視できない時刻 t で）重力場が冷たい暗黒物質のみから生じていれば，ISW 項はゼロとなる（ゲージ不変性の他に，この性質が式（7.1.4）を式（7.1.7）の形に書き換えるもう 1 つの利点である）．この近似のもとでは式（6.5.15），(6.5.16）より $\delta_{Dq}\propto t^{2/3}$，$\psi_q\propto t^{-1/3}$ が得られる．式（5.3.38）より $q^2A_q=8\pi a^2\bar{\rho}_D\delta_{Dq}-2Ha^2\psi_q$ であるが，これは物質優勢期では一定となるので $\dot{A}_q$ は式（7.1.9）に寄与しない．$\dot{A}_q$ が無視できれば，$\psi_q=-q^2\dot{B}_q$ となるから $\dot{B}_q\propto t^{-1/3}$ が得られ，式（7.1.9）中の $a^2\ddot{B}_q$ と $a\dot{a}\dot{B}_q$ は両方とも一定となる．したがって，これらの項も ISW 効果に寄与しない．この理由から，式（7.1.9）で与えられる ISW 効果は比較的小さい．早期の ISW 効果は最終散乱時刻での物質と放射の密度比に強く依存するので，温度ゆらぎの観測を用いて $\Omega_M h^2$ を測定する際の助けとなる．後期の ISW 効果は，暗黒物質の密度が真空のエネルギー密度を下回る，現在に近い時刻から主な寄与を受ける．遠い距離から見たときよりも近くから見たときの方が異方性の見込み角が大きいため，温度異方性の後期 ISW の項は $\ell<20$ 程度の比較的小さい ℓ を持つ温度ゆらぎの多重極展開係数 C_ℓ に寄与する．ℓ が 20 くらいから小さくなるにつれて $\ell(\ell+1)C_\ell$ の予言値が増加するのは，この積分ザクス–ヴォルフェ効果の寄与によるものである．この効果を現在の宇宙マイクロ波背景放射のデータから検出するのは容易ではない[*1]．

式（7.1.8）で与えられる「早期」項こそが，$\ell>20$ のスカラー型温度ゆらぎに寄与する最大の項である．式（7.1.8）の中で $\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}$ に比例する項はドップラー効果

[*1] R. G. Crittenden, N. Turok, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 575 (1996) [astro-ph/9510072] によって提唱されたように，ISW 効果は（同じく $\alpha(\boldsymbol{q})$ に比例する）物質分布の非一様性との相関を通して検出することができる．この効果は（7.2 節で議論する）ウィルキンソンマイクロ波異方性探査機（WMAP = Wilkinson Microwave Anisotropy Probe）のデータと様々なサーベイデータを相関させることで検出されている：P. Fosalba, E. Gaztañaga, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **350**, L37 (2004) [astro-ph/0305468]; P. Fosalba, E. Gaztañaga, F. Castander, *Astrophys. J.* **597**, L89 (2003) [astro-ph/0307249]; N. Afshordi, Y-S. Loh, M. A. Strauss [astro-ph/0308260]; S. P. Boughn, R. G. Crittenden, *New Astron. Rev.* **49**, 75 (2005) [astro-ph/0404470]; N. Padmanabhan, C. M. Hirata, U. Seljak, D. Schlegel, J. Brinkmann, D. P. Schneider, *Phys. Rev. D* **72**, 043525 (2005) [astro-ph/0410360]．より最近では，WMAP 衛星の 3 年間のデータと，スローン・デジタル・スカイサーベイ（Sloan Digital Sky Survey）から得られた銀河分布のデータ，およびアメリカ国立電波天文台超大型干渉電波望遠鏡群スカイサーベイ（NRAO VLA Sky Survey）から得られた電波銀河分布のデータを相互相関させることにより，それぞれ $0.7\leqq\Omega_\Lambda\leqq 0.82$ と $0.3\leqq\Omega_\Lambda\leqq 0.8$ が 95% の信頼度で得られている．詳しくは，A. Cabré *et al.* [astro-ph/0603690]; D. Pietrobon, A. Balbi, D. Marinucci, *Phys. Rev. D* **74**, 043524 (2006) [astro-ph/0606475] を見よ．ただ残念なことに，コスミック・バリアンス（宇宙論的分散）のため，この方法を用いた真空エネルギーの時間依存性の測定精度は限定的である．

を表すが[*2]，他の項は重力的な時間の遅れと内的温度ゆらぎの効果が合わさったものになる．

ここでちょっと立ち止まり，同期ゲージの条件を保存するような限定的なゲージ変換に対する不変性を確認してみよう．これらの変換は $\boldsymbol{x}$ の任意関数 τ を用いて $\Delta\dot{B}_q = -2\tau/a^2$，$\Delta\delta u_{Bq} = \tau$ と書ける変化を及ぼすから，式（7.1.8）で $i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}$ に比例するドップラー効果はそのままでゲージ不変である．また，$\Delta\Phi = -(4/3)\dot{\bar{T}}\tau/\bar{T} = (4/3)\dot{a}\tau/a$ かつ $\Delta\Pi = 0$ であるから[*3]，式（7.1.8）の残りの項もゲージ不変である．最後に，$\Delta A = -2\dot{a}\tau/a$ より，式（7.1.9）もまたこの限定的なゲージ変換に対して不変である．

1 次の摂動論を用いていることと光子の相互作用として純粋に弾性的なトムソン散乱のみを仮定していることを除けば，これらの結果は厳密なものである．(式（7.1.2）と（7.1.3）ではスカラー型摂動とテンソル型摂動がそれぞれ単一のモードによって支配されていると仮定しているが，異なるモードに渡る和を付け加えるのは自明である.）これらの結果はセルジェックとザルダリアーガによって与えられたものと等価[*4]で，CMBfast や CAMB といったコンピュータプログラムでも使われている．ここで，数値精度は少し悪くなるものの，もし熱平衡状態から宇宙の晴れ上がり状態への遷移が時刻 t_L で急激に起こったと近似すれば，これらの結果は非常に簡単化できる．

式（7.1.8）で与えられるスカラー型温度ゆらぎの「早期」項の被積分関数は，光子が最終散乱される確率分布に相当する因子 $P(t)$ を含んでいる．

$$P(t) = \omega_c(t)\exp\left(-\int_t^{t_0} dt'\,\omega_c(t')\right)\,. \tag{7.1.10}$$

[*2] 冷たい暗黒物質が常に静止しているゲージでは，冷たい暗黒物質に対する重力の効果は同時刻面の定義によって相殺される．したがってこのゲージでは，バリオンプラズマの速度摂動は重力ではなく圧力のみから生じる．式（7.1.8）で $\dot{B}_q$ に比例する重力の項がプラズマの速度ポテンシャルとともに現れているのはそのためである．異なるゲージでは，この項は重力から生じる光子–バリオンプラズマの速度を表している．

[*3] これらの結果は，摂動がないとき（無摂動時）の値が $\bar{s}$ であるようなスカラー量 s の摂動 δs がゲージ変換によって受ける変化 $\Delta\delta s = -\dot{\bar{s}}\tau$ を与えるゲージ変換則の式（5.3.43）を用いることで導ける．この変換則を用いる際，無摂動時の光子の分布は等方的で偏光もないことから，Φ と Π の式 (6.1.29)，(6.1.30）の中で無摂動時の値がゼロでない項は $\Delta^{(S)}_{T,0}/3$ だけであることに着目しよう．この項のゲージ変換性を調べるには，摂動 $\Delta^{(S)}_{T,0}$ が光子のエネルギー密度の摂動とその平均密度の比 $4\delta T/\bar{T}$ と等しくなるように $\Delta^{(S)}_{T,0}$ の無摂動時の値を決める必要がある．このようにして決められた無摂動時の値は $4\ln\bar{T}$ となる．

[*4] U. Seljak, M. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* **459**, 437 (1996) [astro-ph/9603033].

$\omega_c(t)$ が時刻 t_L で宇宙膨張率より大きな値から急激にゼロになったと仮定すれば，関数 $P(t)$ は t_L の前後の非常に狭い領域でのみゼロでない値を持つ．しかし，$P(t)$ は規格化された確率分布，

$$\int_{t_1}^{t_0} P(t)\,dt = 1 \tag{7.1.11}$$

であるから，式（7.1.8）の t に渡る積分は因子 $P(t)$ を落として $t = t_L$ とすることで評価できる．

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^{(S)}_{\text{早期}} &\simeq \int d^3q\,\alpha(\boldsymbol{q})\,\exp\left[i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_{t_L}^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\right]\\ &\times\left[\frac{3}{4}\varPhi(q,t_L)+\frac{3}{16}\Big(1-(\hat{q}\cdot\hat{n})\Big)^2\varPi(q,t_L)\right.\\ &\quad-\frac{1}{2}a^2(t)\ddot{B}_q(t_L)-\frac{1}{2}a(t_L)\dot{a}(t_L)\dot{B}_q(t_L)\\ &\quad\left.-i(\boldsymbol{q}\cdot\hat{n})\Big(\delta u_q(t_L)/a(t_L)+a(t_L)\dot{B}_q(t_L)/2\Big)\right].\end{aligned} \tag{7.1.12}$$

同じく，式（7.1.9）において $\omega_c(t)$ が $t < t_L$ での大きな値から急激に減少し，$t > t_L$ で無視できるほど小さな値になったと仮定しよう．すると式（7.1.9）の因子 $\exp\left(-\int_t^{t_0} dt'\,\omega_c(t')\right)$ は $t < t_L$ における微小な値から急激に増加して $t > t_L$ で 1 となるから，式（7.1.9）は以下のように近似できる．

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^{(S)}_{\text{ISW}} &\simeq -\frac{1}{2}\int d^3q\,\alpha(\boldsymbol{q})\int_{t_L}^{t_0}dt\,\exp\left[i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\right]\\ &\times\frac{d}{dt}\left[A_q(t)+a^2(t)\ddot{B}_q(t)+a(t)\dot{a}(t)\dot{B}_q(t)\right].\end{aligned} \tag{7.1.13}$$

同じ近似を式（7.1.5）のテンソル型摂動に適用すれば以下の結果を得る．

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^{(T)} &\simeq \frac{1}{4}\sum_{\lambda=\pm2}\int d^3q\,\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,\hat{n}_k\hat{n}_l\,e_{kl}(\hat{q},\lambda)\\ &\times\left[-2\int_{t_L}^{t_0}dt\,\dot{\mathcal{D}}_q(t)\,\exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\right)\right.\\ &\quad\left.+\varPsi(q,t_L)\,\exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_{t_L}^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\right)\right].\end{aligned} \tag{7.1.14}$$

さらに，局所的熱平衡状態では光子は無偏光でその運動量分布は等方的であるか

ら，$\Delta_{P,\ell}^{(S)}$，$\Delta_{P,\ell}^{(T)}$，$\Delta_{T,\ell}^{(T)}$ はすべての ℓ でゼロとなり，$\Delta_{T,\ell}^{(S)}$ は $\ell=0$ 以外のすべての ℓ でゼロとなる．したがって，源泉関数の式（6.1.29），（6.1.30），（6.6.21）より，局所的熱平衡状態では $\Pi=\Psi=0$ かつ $\Phi=\Delta_{T,0}^{(S)}/3=4\delta T/3\bar{T}$ であることが導かれる[*5]．以上より，非常に大きな衝突頻度から非常に小さな衝突頻度への急激な遷移を仮定すれば，式（7.1.12）と（7.1.14）は以下のように簡単化できる．スカラー型温度ゆらぎは，

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^{(S)}_{\text{早期}} \simeq \int d^3q\ \alpha(\boldsymbol{q})\ \exp\left[i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_{t_L}^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\right] \times\left[F(q)+i(\hat{q}\cdot\hat{n})G(q)\right] \tag{7.1.15}$$

ここで $F(q)$ と $G(q)$ は，

$$F(q)=\frac{\delta T_q(t_L)}{\bar{T}(t_L)}-\frac{1}{2}a^2(t)\ddot{B}_q(t_L)-\frac{1}{2}a(t_L)\dot{a}(t_L)\dot{B}_q(t_L), \tag{7.1.16}$$

$$G(q)=-q\Big(\delta u_{\gamma q}(t_L)/a(t_L)+a(t_L)\dot{B}_q(t_L)/2\Big) \tag{7.1.17}$$

で定義される形状因子である．テンソル型温度ゆらぎは，

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^{(T)} \simeq -\frac{1}{2}\sum_{\lambda=\pm 2}\int d^3q\ \beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,\hat{n}_k\hat{n}_l\,e_{kl}(\hat{q},\lambda) \times\int_{t_L}^{t_0}dt\ \dot{\mathcal{D}}_q(t)\ \exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\right) \tag{7.1.18}$$

となる．

＊＊＊

さて，今度は 6.1 節のボルツマン方程式による定式化を用いず，光子の軌跡を追うことでスカラー型とテンソル型の温度ゆらぎの公式を導いてみよう．これまでと同様，時刻 t_L で宇宙の不透明度が突然減少したという近似を用いる．このやり方は簡単なので，導出はより一般なゲージで行う．その後，導かれた結果が

[*5] これは，ボルツマン方程式（6.1.27），(6.1.28)，(6.6.18)，(6.6.19）で $\omega_c\to\infty$ の極限を取ることで形式的に導くことができる．ボルツマン方程式から，

$$\Delta_{P,\ell}^{(S)}=\frac{1}{2}\Pi(\delta_{\ell 0}+\delta_{\ell 2}),\quad \Delta_{T,\ell}^{(S)}=\Big(3\Phi+\frac{1}{2}\Pi\Big)\delta_{\ell 0}+\frac{1}{2}\Pi\delta_{\ell 2},$$
$$\Delta_{T,\ell}^{(T)}=\delta_{\ell 0}\Psi,\quad \Delta_{P,\ell}^{(T)}=-\delta_{\ell 0}\Psi$$

が得られるから，源泉関数の式（6.1.29），(6.1.30)，(6.6.21）から $\Phi=\Phi-\Pi/12$，$\Pi=3\Pi/5$，$\Psi=7\Psi/10$ が得られ，これより $\Pi=\Psi=0$，$\Phi=\Delta_{T,0}^{(S)}/3$ が要請される．

スカラー型摂動の同期ゲージの式（7.1.15）と（7.1.13），およびテンソル型摂動の式（7.1.18）と合致することを確認する．同期ゲージのボルツマン方程式を用いた導出法に満足している読者は，本節の残りを読み飛ばしても構わない．

まず，スカラー型摂動にもテンソル型摂動にもあてはまるいくつかの一般論から始めよう．スカラー型摂動の場合は，$g_{i0}=0$ を満たすあらゆるゲージ（ニュートンゲージと同期ゲージを含む）に適用できる．引き続き無摂動時の空間曲率を無視すれば，$g_{i0}=0$ を満たすあらゆるゲージでの摂動を含む計量は以下の形に書ける．

$$g_{00}=-1-E(\boldsymbol{x},t)\ ,\quad g_{i0}=0\ ,\quad g_{ij}=a^2(t)\delta_{ij}+h_{ij}(\boldsymbol{x},t)\ . \tag{7.1.19}$$

ある方向 $\hat{n}$ からロバートソン–ウォーカー座標系の原点に向かって到来する光線が持つ共動動径座標 r は，以下の式を通じて t と関係している．

$$0=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=-\Big(1+E(r\hat{n},t)\Big)dt^2+\big(a^2(t)+h_{rr}(r\hat{n},t)\big)\,dr^2\ . \tag{7.1.20}$$

少し書き直せば，

$$\frac{dr}{dt}=-\left(\frac{a^2+h_{rr}}{1+E}\right)^{-1/2}\simeq-\frac{1}{a}+\frac{h_{rr}}{2a^3}-\frac{E}{2a}\ . \tag{7.1.21}$$

（摂動の 1 次では，動径方向からの光線の曲がりを気にする必要はない．なぜなら，$\bar{g}_{r\theta}=\bar{g}_{r\phi}=0$ であるから光線の曲がりは摂動の 1 次の効果でなくてはならず，その効果が $h_{ij}dx^idx^j$ に及ぼす影響は摂動の 2 次となることによる．）

ここで，宇宙が時刻 t_L（赤方偏移 $1+z_L\simeq 1090$（約 38 万年））で不透明な状態から突然透明な状態に遷移したとしよう．この近似から得られる式（7.1.21）の摂動 1 次の解は，

$$r(t)=s(t)+\int_{t_L}^{t}\frac{dt'}{a(t')}N\Big(s(t')\hat{n},t'\Big) \tag{7.1.22}$$

で，関数 N は次のように定義される．

$$N(\boldsymbol{x},t)\equiv\frac{1}{2}\left[\frac{h_{rr}(\boldsymbol{x},t)}{a^2(t)}-E(\boldsymbol{x},t)\right]\ . \tag{7.1.23}$$

$s(t)$ は動径座標のゼロ次解（無摂動時の解）で，$t=t_L$ での値は r_L である．

$$s(t)=r_L-\int_{t_L}^{t}\frac{dt'}{a(t')}=\int_{t}^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\ . \tag{7.1.24}$$

特に，時刻 t_0 で光線が $r=0$ に到達したとすれば，式（7.1.22）は以下のように書ける．

$$0 = s(t_0) + \int_{t_L}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} N\Big(s(t)\hat{n}, t\Big) = r_L + \int_{t_L}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \Big(N\Big(s(t)\hat{n}, t\Big) - 1\Big) \ . \quad (7.1.25)$$

時刻 t_L の最終散乱面から放射される光の波の隣り合う山の時間間隔 δt_L は時刻 t_0 で受け取る光の波の隣り合う山の時間間隔 δt_0 と関係しているが，その関係は式（7.1.25）の変分から得られる．

$$\begin{aligned} 0 = &\frac{\delta t_L}{a(t_L)} \left[1 - N\Big(r_L\hat{n}, t_L\Big) + \int_{t_L}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \Big(\frac{\partial N(r\hat{n}, t)}{\partial r}\Big)_{r=s(t)}\right] \\ &+ \delta t_L\, \delta u_\gamma^r(r_L\hat{n}, t_L) + \frac{\delta t_0}{a(t_0)} \Big[-1 + N(0, t_0)\Big] \, . \end{aligned} \quad (7.1.26)$$

（右辺の光子気体や光子–電子–核子流体が持つ動径速度 δu_γ^r を含む項は，式（7.1.25）の光源の動径座標 r_L の時間変化から生じる．式（7.1.26）を導く際，N の引数 $s(t)\hat{n}$ の t_0 に関する変分は考えないが，それは N がすでに摂動 1 次の量であるため，引数では摂動 0 次の t_0 と t_L の関係式を使えることによる．r_L を固定すれば，式（7.1.24）の最初の等号を用いて N の引数 $s(t)$ を（t_0 ではなく）t_L の関数として書ける．また，式（7.1.24）の最後の等号を用いれば，N の引数 $s(t)$ を（t_L ではなく）t_0 の関数として書くこともできるが，式（7.1.26）の角括弧内の 3 項目を導く際には N の引数 $s(t)$ を t_0 ではなく t_L の関数として表す方を選んだ.）式（7.1.25）の $N(s(t)\hat{n}, t)$ の全微分は，

$$\frac{d}{dt} N\Big(s(t)\hat{n}, t\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial t} N(r\hat{n}, t)\Big)_{r=s(t)} - \frac{1}{a(t)} \Big(\frac{\partial N(r\hat{n}, t)}{\partial r}\Big)_{r=s(t)}$$

と書けるから，式（7.1.26）は以下のようにも書ける．

$$\begin{aligned} 0 = &\frac{\delta t_L}{a(t_L)} \left[1 - N(0, t_0) + \int_{t_L}^{t_0} dt \, \Big\{\frac{\partial}{\partial t} N(r\hat{n}, t)\Big\}_{r=s(t)}\right] \\ &+ \delta t_L\, \delta u_\gamma^r(r_L\hat{n}, t_L) + \frac{\delta t_0}{a(t_0)} \Big[-1 + N(0, t_0)\Big] \, . \end{aligned} \quad (7.1.27)$$

この式から光が放射されたときと光を受け取ったときの光の波の隣り合う山の座標時間間隔の比が得られるが，本当に必要なのは**固有**時間間隔の比，

$$\delta\tau_L = \sqrt{1 + E(r_L, t_L)}\, \delta t_L \ , \qquad \delta\tau_0 = \sqrt{1 + E(0, t_0)}\, \delta t_0 \qquad (7.1.28)$$

で，これは光が放射されたときの周波数と光を受け取ったときの周波数の比を摂

動1次で次のように与える．

$$\frac{\nu_0}{\nu_L}=\frac{\delta\tau_L}{\delta\tau_0}=\frac{a(t_L)}{a(t_0)}\Big[1+\frac{1}{2}\Big(E(r_L\hat{n},t_L)-E(0,t_0)\Big) - \int_{t_L}^{t_0}\Big\{\frac{\partial}{\partial t}N(r\hat{n},t)\Big\}_{r=s(t)}dt - a(t_L)\,\delta u_\gamma^r(r_L\hat{n},t)\Big]\,. \tag{7.1.29}$$

$\hat{n}$ の方向から到来する光を t_0 で観測したときの温度は，

$$T(\hat{n})=(\nu_0/\nu_L)\Big(\bar{T}(t_L)+\delta T(r_L\hat{n},t_L)\Big)$$

で与えられる．ここで，時刻 t_L ですでに存在している温度ゆらぎを考慮するため項 δT を足しておいた．同様に，摂動がないときにすべての方向で観測される温度は，

$$T_0=\Big(a(t_L)/a(t_0)\Big)\bar{T}(t_L)$$

であるから，方向 $\hat{n}$ から到来する放射の温度の，無摂動時の値からの相対的なずれは以下で与えられる[*6]．

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}&\equiv\frac{T(\hat{n})-T_0}{T_0}=\frac{\nu_0}{a(t_L)\nu_L/a(t_0)}-1+\frac{\delta T(r_L\hat{n},t_L)}{\bar{T}(t_L)}\\&=\frac{1}{2}\Big(E(r_L\hat{n},t_L)-E(0,t_0)\Big)-\int_{t_L}^{t_0}dt\,\Big\{\frac{\partial}{\partial t}N\Big(r\hat{n},t\Big)\Big\}_{r=s(t)}\\&\quad-a(t_L)\,\delta u_\gamma^r(r_L\hat{n},t_L)+\frac{\delta T(r_L\hat{n},t_L)}{\bar{T}(t_L)}\,.\end{aligned} \tag{7.1.30}$$

テンソル型摂動とスカラー型摂動は互いに相関していないので，これらの C_ℓ の寄与は独立に扱うことにしよう．

$h_{i0}=0$ を満たすあらゆるゲージにおいて，計量のスカラー型摂動は式（5.1.31）–（5.1.33）から以下のように与えられる．

$$h_{00}=-E\,,\qquad h_{ij}=a^2\left[A\delta_{ij}+\frac{\partial^2 B}{\partial x^i\partial x^j}\right]\,. \tag{7.1.31}$$

また，スカラー型摂動では光子流体の動径速度は速度ポテンシャル δu_γ を用いて以下のように書ける．

$$\delta u_\gamma^r=\bar{g}^{r\mu}\frac{\partial\delta u_\gamma}{\partial x^\mu}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial\delta u_\gamma}{\partial r}\,. \tag{7.1.32}$$

---

*6 この結果は，R. K. Sachs, A. M. Wolfe, *Astrophys. J.* **147**, 73 (1967) によって最初に求められたものと基本的に同じ．

よって，式（7.1.30）よりスカラー型摂動の温度ゆらぎの寄与が以下のように与えられる．

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^S = \frac{1}{2}\Big(E(r_L\hat{n}, t_L) - E(0, t_0)\Big) - \int_{t_L}^{t_0} dt \left\{\frac{\partial}{\partial t} N\Big(r\hat{n}, t\Big)\right\}_{r=s(t)} - \frac{1}{a(t_L)} \left(\frac{\partial\, \delta u_\gamma(r\hat{n}, t_L)}{\partial r}\right)_{r=r_L} + \frac{\delta T(r_L\hat{n}, t_L)}{\bar{T}(t_L)}\,, \tag{7.1.33}$$

ここで N は，

$$N = \frac{1}{2}\left[A + \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - E\right] \tag{7.1.34}$$

である．

式（7.1.33）は，まだ我々の目的のために最も便利な形には書けていない．式（7.1.33）で与えられる全温度ゆらぎは $g_{i0} = 0$ を保存する限定的なゲージ変換に対して不変であるが，個々の項は不変ではない．$(\partial N/\partial t)_{r=s(t)}$ の積分の項でさえ不変ではない．そこで，積分の項がそれ自身でゲージ不変になるように式（7.1.33）を書き換えた方がずっと便利になる．

この目的のため，式（7.1.6）に対応する次の恒等式を用いる．

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial^2 \dot{B}(r\hat{n}, t)}{\partial r^2}\right\}_{r=s(t)} \\
&= -\frac{d}{dt}\left[\left\{a^2(t)\ddot{B}(r\hat{n}, t) + a(t)\dot{a}(t)\dot{B}(r\hat{n}, t) + a(t)\frac{\partial \dot{B}(r\hat{n}, t)}{\partial r}\right\}_{r=s(t)}\right] \\
&\quad + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\Big(a^2(t)\ddot{B}(r\hat{n}, t) + a(t)\dot{a}(t)\dot{B}(r\hat{n}, t)\Big)\right\}_{r=s(t)}\,.
\end{aligned}$$

式（7.1.34）と組み合わせれば，式（7.1.33）の被積分関数は次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial}{\partial t} N\Big(r\hat{n}, t\Big)\right\}_{r=s(t)} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\{a^2(t)\ddot{B}(r\hat{n}, t) + a(t)\dot{a}(t)\dot{B}(r\hat{n}, t) + a(t)\frac{\partial \dot{B}(r\hat{n}, t)}{\partial r}\right\}_{r=s(t)}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Big(a^2(t)\ddot{B}(r\hat{n}, t) + a(t)\dot{a}(t)\dot{B}(r\hat{n}, t) \right. \\
&\quad \left. + A(r\hat{n}, t) - E(r\hat{n}, t)\Big)\right\}_{r=s(t)}\,.
\end{aligned} \tag{7.1.35}$$

すると式（7.1.33）のスカラー型温度ゆらぎは，

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^S = \left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^S_{\text{早期}} + \left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^S_{\text{後期}} + \left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^S_{\text{ISW}} \tag{7.1.36}$$

と書け，各々の項は，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^S_{\text{早期}} = &-\frac{1}{2}a^2(t_L)\ddot{B}(r_L\hat{n}, t_L) - \frac{1}{2}a(t_L)\dot{a}(t_L)\dot{B}(r_L\hat{n}, t_L)\\ &+\frac{1}{2}E(r_L\hat{n}, t_L) + \frac{\delta T(r_L\hat{n}, t_L)}{\bar{T}(t_L)}\\ &-a(t_L)\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}\dot{B}(r\hat{n}, t_L) + \frac{1}{a^2(t_L)}\delta u_\gamma(r\hat{n}, t_L)\right)\right]_{r=r_L},\end{aligned} \tag{7.1.37}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T}\right)^S_{\text{後期}} = &\frac{1}{2}a^2(t_0)\ddot{B}(0, t_0) + \frac{1}{2}a(t_0)\dot{a}(t_0)\dot{B}(0, t_0)\\ &-\frac{1}{2}E(0, t_0) + a(t_0)\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}\dot{B}(r\hat{n}, t_0) + \frac{\delta u_\gamma(r\hat{n}, t_0)}{a^2(t_0)}\right)\right]_{r=0},\end{aligned} \tag{7.1.38}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T}\right)^S_{\text{ISW}} = -\frac{1}{2}\int_{t_L}^{t_0} dt\,\Bigg[\frac{\partial}{\partial t}\Big(&a^2(t)\ddot{B}(r\hat{n}, t) + a(t)\dot{a}(t)\dot{B}(r\hat{n}, t)\\ &+A(r\hat{n}, t) - E(r\hat{n}, t)\Big)\Bigg]_{r=s(t)}\end{aligned} \tag{7.1.39}$$

となる．

式（7.1.38）の「後期」項（これは本節の最初の方では無視した項）は方向によらない項と $\hat{n}$ に比例する項の和で書けていて，観測者の位置での局所的な重力場と速度による異方性を表している．これは温度ゆらぎの相関関数の多重極展開で $\ell = 0$ と $\ell = 1$ を持つ項にしか寄与しないので，もし今から $\ell \geqq 2$ の角波数しか考えないなら無視して良い．

ここで，少なくとも条件 $g_{i0} = 0$（式（5.1.32）の記号表記では $F = 0$）を保存する限定的なゲージ変換に対し，ISW 効果の項，ドップラー効果の項，および残りの項がそれぞれ不変に保たれることを確認してみよう．式（5.3.13）よりこれらのゲージ変換は，

$$\varepsilon_0 = -a^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon^S}{a^2}\right)$$

で与えられるから，$\Delta\dot{B} = 2\varepsilon_0/a^2$ である．式（5.3.13）と（5.3.16）によれば，このゲージ変換によって重力と内的温度ゆらぎを含む項 $-a^2\ddot{B}/2$，$-a\dot{a}\dot{B}/2$，$E/2$，$\delta T/\bar{T}$ はそれぞれ $-a^2\partial(\varepsilon_0/a^2)/\partial t$, $-\dot{a}\varepsilon_0/a$，$\dot{\varepsilon}_0$，$\varepsilon_0\dot{\bar{T}}/\bar{T} = -\varepsilon_0\dot{a}/a$ だけ変化するから，これらの項の和は変化しない．ドップラー効果の項 $a\dot{B}/2$，$\delta u_\gamma/a$ はそれぞれ ε_0/a，$-\varepsilon_0/a$ だけ変化するから，やはり和は変化しない．そして積分ザクス–ヴォルフェ効果の被積分関数にある項 $a^2\ddot{B}$，$2a\dot{a}\dot{B}$，A，$-E$ はそれぞれ $2\dot{\varepsilon}_0 - 4\varepsilon_0\dot{a}/a$，$2\varepsilon_0\dot{a}/a$，$2\varepsilon_0\dot{a}/a$，$-2\dot{\varepsilon}_0$ だけ変化するから，やはり和は変化しない．以上で，積分ザクス–ヴォルフェ効果の項，ドップラー効果の項，そして重力と内的温度を合わせた項がそれぞれそれら自身でゲージ不変であることが確認できた．特に，これら 3 つの寄与のそれぞれに対し，ニュートンゲージと同期ゲージの両方で同じ結果が得られる．

ここで，最終散乱から現在の時刻までスカラー型のゆらぎの寄与が**単一の**モードによって支配されていたと仮定してみよう．すると（B, E, δu_γ, δT のような）任意の摂動 $X(\boldsymbol{x}, t)$ は，

$$X(\boldsymbol{x}, t) = \int d^3q\, \alpha(\boldsymbol{q})\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} X_q(t) \tag{7.1.40}$$

のように書ける．$\alpha(\boldsymbol{q})$ は（すべての X に対して等しい）確率変数で以下のように規格化されている．

$$\langle \alpha(\boldsymbol{q})\, \alpha^*(\boldsymbol{q}') \rangle = \delta^3(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}')\,. \tag{7.1.41}$$

すると式（7.1.37）と（7.1.39）から，

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^S_{\text{早期}} = \int d^3q\; \alpha(\boldsymbol{q})\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n} r(t_L)} \Big(F(q) + i\hat{q}\cdot\hat{n}\, G(q) \Big)\,, \tag{7.1.42}$$

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^S_{\text{ISW}} = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_L} dt \int d^3q\, \alpha(\boldsymbol{q})\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n} s(t)} \tag{7.1.43}$$

$$\times \frac{d}{dt}\Big(a^2(t)\ddot{B}_q(t) + a(t)\dot{a}(t)\dot{B}_q(t) + A_q(t) - E_q(t) \Big)$$

が得られ，形状因子 F と G は，

$$F(q) = -\frac{1}{2}a^2(t_L)\ddot{B}_q(t_L) - \frac{1}{2}a(t_L)\dot{a}(t_L)\dot{B}_q(t_L) + \frac{1}{2}E_q(t_L) + \frac{\delta T_q(t_L)}{\bar{T}(t_L)} \tag{7.1.44}$$

$$G(q) = -q\,\left(\frac{1}{2}\, a(t_L)\dot{B}_q(t_L) + \frac{1}{a(t_L)}\, \delta u_{\gamma q}(t_L) \right) \tag{7.1.45}$$

で与えられる．既に見たように，形状因子 $F(q)$，$G(q)$，およびISW項の被積分関数は，g_{i0} をゼロのままに保つゲージ変換に対してそれぞれ不変である．

同期ゲージでは $E_q = 0$ であるから，式（7.1.42）–（7.1.45）は以前導出した表式（7.1.15），（7.1.13），（7.1.17），（7.1.18）を再現する．ニュートンゲージでは $B = 0$，$E = 2\Phi$ であるから，形状因子は以下のようになる．

$$F(q) = \Phi_q(t_L) + \frac{\delta T_q(t_L)}{\bar{T}(t_L)} , \tag{7.1.46}$$

$$G(q) = -\frac{1}{a(t_L)}\delta u_{\gamma q}(t_L) . \tag{7.1.47}$$

（もちろん，ニュートンゲージの δT_q と $\delta u_{\gamma q}$ は，それぞれ同期ゲージのものとは異なる．）積分ザクス–ヴォルフェ効果は以下で与えられる．

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)_{\rm ISW} = -2\int_{t_L}^{t_0} dt \int d^3q\, \alpha(\boldsymbol{q})\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}s(t)}\dot{\Phi}_q(t) . \tag{7.1.48}$$

物質優勢期には Φ_q が時間に関して一定となるが，それを示すのは読者への練習問題としよう．したがって，同期ゲージのときに見たように，積分ザクス–ヴォルフェ効果は厳密な物質優勢宇宙からずれたときのみに生じる．

最後に，テンソル型摂動による温度ゆらぎへの寄与を考えよう．時刻 t_L で突然熱平衡状態から透明な宇宙へ遷移したという近似では，観測される温度異方性へのテンソル型摂動の寄与は N の定義式（7.1.23）の項 $h_{rr}/2a^2$ のみから生じる．式（5.1.33）を見れば，この項は $D_{rr}/2$ を含むことがわかる．これを式（7.1.29）に用いればテンソル型摂動による温度ゆらぎの寄与が以下のように与えられる．

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^T = -\frac{\hat{n}_i\hat{n}_j}{2}\int_{t_L}^{t_0} \left\{\frac{\partial}{\partial t}D_{ij}(r\hat{n},t)\right\}_{r=s(t)} dt . \tag{7.1.49}$$

重力波の振幅 $D_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ は式（5.2.21）のようにフーリエ積分，

$$D_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\lambda=\pm 2}\int d^3q\; e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\, e_{ij}(\hat{q},\lambda)\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,\mathcal{D}_q(t) \tag{7.1.50}$$

で書ける．ここで $\mathcal{D}_q(t)$ は波動方程式（5.2.16），

$$\ddot{\mathcal{D}}_q(t) + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathcal{D}}_q(t) + \frac{q^2}{a^2}\mathcal{D}_q(t) = 16\pi G\,\pi_q^T(t) \tag{7.1.51}$$

の支配的な解で，$e_{ij}(\hat{q},\lambda)$ は5.2節で定義した偏光テンソル，そして $\beta(\boldsymbol{q},\lambda)$ は式（5.2.22）を満足するように選ばれた確率変数である．以上より，テンソル型摂動

による温度ゆらぎは以下のように書ける．

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^T = -\frac{1}{2}\sum_{\lambda=\pm 2}\int d^3q\,\hat{n}_i\hat{n}_j e_{ij}(\hat{q},\lambda)\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\int_{t_L}^{t_0} dt\, e^{is(t)\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}}\,\dot{\mathcal{D}}_q(t)\,. \tag{7.1.52}$$

これは以前導いた式（7.1.18）と同じものである．7.3 節でテンソル型摂動による C_ℓ の計算に立ち戻るが，その前に 7.2 節でスカラー型摂動による C_ℓ を計算する．

7.2　温度の多重極展開の係数：スカラーモード

前節で導いた結果を用い，スカラー型摂動による温度ゆらぎの角度相関関数の多重極展開係数 $C^S_{TT,\ell}$ を計算しよう．

$$C_{TT,\ell} = \frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{n}\int d^2\hat{n}'\,P_\ell(\hat{n}\cdot\hat{n}')\,\langle\Delta T(\hat{n})\,\Delta T(\hat{n}')\rangle\,, \tag{7.2.1}$$

ここで，$\Delta T(\hat{n})$ は $\hat{n}$ の方向に観測される温度と平均温度の差を表す確率変数で，記号 $\langle\cdots\rangle$ はさまざまな観測者の場所に渡る平均値を表す．この平均は，我々が観測する特定の温度ゆらぎのパターンを生み出すようなさまざまな時系列に渡る平均とも等価である．（7.4 節のテーマである温度–偏光の相関関数や偏光–偏光の相関関数と区別するため，温度–温度の相関関数を表すラベルとして TT を付与した．）もちろんこれは実際に観測できる量ではない．実際に観測されるのは，

$$C^{\text{観測}}_{TT,\ell} = \frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{n}\int d^2\hat{n}'\,P_\ell(\hat{n}\cdot\hat{n}')\,\Delta T(\hat{n})\,\Delta T(\hat{n}')$$

である．しかし，2.6 節で示したように，コスミック・バリアンス（この式と式（7.2.1）との差の 2 乗平均値を平均値の 2 乗で割ったもの）は $2/(2\ell+1)$ で与えられるので，$\ell \gg 1$ ではコスミック・バリアンスは無視できる．本節では $C_{TT,\ell}$ のスカラー型摂動の寄与 $C^S_{TT,\ell}$ のみを考える．5.2 節で学んだようにテンソル型摂動とスカラー型摂動は互いに干渉しないため，テンソル型摂動の寄与は 7.3 節で別個に考えることにする．

まず始めに，6.1 節の運動学的理論を用いて 7.1 節で導いた結果を適用してみよう．ボルツマン方程式から得られる温度ゆらぎの公式は式（7.1.7）–（7.1.9）である．温度ゆらぎの部分波展開の係数を計算するには，平面波をルジャンドル多項式で展開したおなじみの式（2.6.16）[訳注 1]を球面調和関数の加法定理を用いて書

訳注 1　$e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} = \sum_\ell (2\ell+1)i^\ell P_\ell(\hat{q}\cdot\hat{n})\,j_\ell(qr).$

き換えたもの，

$$e^{i\hat{q}\cdot\hat{n}\rho} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^{\ell} j_{\ell}(\rho) Y_{\ell}^{m}(\hat{n}) Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) \tag{7.2.2}$$

が使える．これを式（7.1.7)–(7.1.9）に用い，因子 $i\hat{q}\cdot\hat{n}$ を球ベッセル関数 j_ℓ の微分で置き換えれば，$\hat{n}$ の方向で観測されるスカラー型の温度ゆらぎは以下の式で与えられる．

$$\Big(\Delta T(\hat{n})\Big)^{(S)} = \sum_{\ell m} a_{T,\ell m}^{S} Y_{\ell}^{m}(\hat{n}) \ , \tag{7.2.3}$$

$$\begin{aligned} a_{T,\ell m}^{S} &= 4\pi i^{\ell} T_0 \int d^3q \, \alpha(\boldsymbol{q}) \, Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) \int_{t_1}^{t_0} dt \\ &\quad \times \left[j_{\ell}\Big(q\, r(t)\Big) \, F(q,t) + j_{\ell}'\Big(q\, r(t)\Big) \, G(q,t) + j_{\ell}''\Big(q\, r(t)\Big) \, H(q,t) \right] . \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

ここで，$\alpha(\boldsymbol{q})$ は支配的なスカラーモードを表す確率変数で，式（5.2.7）を満たすように規格化されている．

$$\langle \alpha(\boldsymbol{q}) \, \alpha^*(\boldsymbol{q}') \rangle = \delta^3(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}') \ . \tag{7.2.5}$$

t_1 は再結合の時刻よりもずっと以前の時刻で，そこにある光子は現在時刻までに何度も散乱されるものとする．現在時刻 t_0 で我々が観測する光が発せられた時刻 t に対応する動径座標 $r(t)$ は，

$$r(t) \equiv \int_{t}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \ , \tag{7.2.6}$$

そして $F(q,t)$，$G(q,t)$，$H(q,t)$ は時間に依存する形状因子で，以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned} F(q,t) &= \exp\left[-\int_{t}^{t_0} \omega_c(t') \, dt' \right] \\ &\quad \times \Bigg\{ \omega_c(t) \, \bigg[\frac{3}{4} \Phi(q,t) + \frac{3}{16} \Pi(q,t) \\ &\quad - \frac{1}{2} a^2(t) \ddot{B}_q(t) - \frac{1}{2} a(t) \dot{a}(t) \dot{B}_q(t) \bigg] \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[A_q(t) + a^2(t) \ddot{B}_q(t) + a(t) \dot{a}(t) \dot{B}_q(t) \right] \Bigg\} \ , \end{aligned} \tag{7.2.7}$$

$$G(q,t) = -q \, \omega_c(t) \, \exp\left[-\int_{t}^{t_0} \omega_c(t') \, dt' \right]$$

$$\times \left[\delta u_{Bq}(t)/a(t) + a(t)\dot{B}_q(t)/2\right] , \tag{7.2.8}$$

$$H(q,t) = \frac{3}{16}\omega_c(t) \exp\left[-\int_t^{t_0} \omega_c(t')\, dt'\right] \Pi(q,t) . \tag{7.2.9}$$

記号をおさらいしておくと，$\omega_c(t)$ は時刻 t での光子の衝突率，$A_q(t)$ と $B_q(t)$ は 5.2 節で定義した同期ゲージの計量のスカラー型摂動，$\Phi(q,t)$ と $\Pi(q,t)$ は式（6.1.21）で定義したスカラー型摂動の源泉関数，そして $\delta u_{Bq}(t)$ はバリオンプラズマのスカラー型速度ポテンシャルを表す．また，偏光ではなく温度の部分波展開係数であることを示すため，2.6 節で導入した展開係数 $a_{\ell m}$ に下付き添字 T を付与した．さらに，テンソル型摂動とスカラー型摂動を区別するため，スカラー型摂動を示す上付き添字 S も付与した．

式（2.6.19）[訳注 2]で与えられるルジャンドル多項式の規格化直交性条件を用いれば，式（7.2.1）と式（7.2.3）–（7.2.5）からスカラー型温度ゆらぎの多重極展開係数が以下のように求まる[*1]．

$$\begin{aligned} C^S_{TT,\ell} &= 16\pi^2 T_0^2 \int_0^\infty q^2\, dq \\ &\quad \times \left| \int_{t_1}^{t_0} dt \left[j_\ell\Big(q\, r(t)\Big)\, F(q,t) \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + j'_\ell\Big(q\, r(t)\Big)\, G(q,t) + j''_\ell\Big(q\, r(t)\Big)\, H(q,t) \right] \right|^2 . \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

この公式は高精度の結果を与えるが，この方法で多重極展開係数 $C^S_{TT,\ell}$ を求めるコンピュータ計算の結果を見ても，特にわかったような気にはならない．そこで代わりに，いくつかの近似を行って $C^S_{TT,\ell}$ の解析的な公式を得ることにしよう．

まず，式（7.2.7）の最後の項で与えられる積分ザクス–ヴォルフェ効果を無視する．これは比較的小さな ℓ でのみ重要となるが，コスミック・バリアンスのため測定が難しい[訳注 3]．

次に，宇宙が突然，ある決まった時刻 t_L で完全に不透明な状態から完全に透

訳注 2　$\displaystyle\int d\Omega_{\hat{q}}\, P_\ell\,(\hat{n}\cdot\hat{q})\; P_{\ell'}\,(\hat{n}'\cdot\hat{q}) = \left(\frac{4\pi}{2\ell+1}\right)\delta_{\ell\,\ell'}\, P_\ell\,(\hat{n}\cdot\hat{n}')\,.$

*1　式（7.2.10）の球ベッセル関数の微分を含む項は，まず球ベッセル関数の微分を時間微分で書き，それを部分積分することで $j_\ell\Big(qr(t)\Big)$ に形状因子をかけた形に書き直すことができる．この結果は，M. Zaldarriaga, U. Seljak, *Phys. Rev. D* **55**, 1830 (1997) [astro-ph/9609170] の式 (16) と等価であるが，規格化は異なる．本書の源泉関数 Π，Φ はザルダリアーガとセルジェックの源泉関数を 4 倍したものに相当する．

明な状態に瞬時に遷移したと仮定し*2，また摂動は単一のモードに支配されているとする．すると温度ゆらぎは，次の式（7.1.15）の形となる．

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right) = \int d^3q\ \alpha(\boldsymbol{q})\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}r_L}\Big(F(q) + i\hat{q}\cdot\hat{n}\, G(q)\Big)\,. \tag{7.2.11}$$

7.1 節の後半で見たように，この式は最終散乱時刻以降の光子の軌跡を追うことでも導出できた（$r_L = r(t_L)$ は我々から見た最終散乱面までの共動距離を表す）．ここでは形状因子 $F(q)$，$G(q)$ に式（7.1.16），(7.1.17）を使わず，一般的な形状因子のままで議論を進める．その後，式（7.1.16），(7.1.17）で与えられるような特定の形状因子を用いた計算に立ち戻る．

式（7.2.11）に（7.2.2）を用い，ドップラー効果の項の $i\hat{q}\cdot\hat{n}$ を $\partial/\partial(qr_L)$ に置き換えれば再び式（7.2.3）で与えられる部分波展開の式を得るが，今回の $a^S_{T,\ell\, m}$ は以下で与えられる．

$$a^S_{T,\ell\, m} = 4\pi i^\ell T_0 \int d^3q\ \alpha(\boldsymbol{q}) Y_\ell^{m*}(\hat{q})\Big[j_\ell(qr_L)F(q) + j'_\ell(qr_L)G(q)\Big]\,. \tag{7.2.12}$$

これを式（7.2.1）に代入して式（7.2.5）を用いれば以下の多重極展開係数を得る．

$$C^S_{TT,\ell} = \frac{1}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell\, m}|^2 = 16\pi^2 T_0^2 \int_0^\infty q^2\, dq \times \Big[j_\ell(qr_L)F(q) + j'_\ell(qr_L)G(q)\Big]^2. \tag{7.2.13}$$

これは標準的な結果ではあるが，$C^S_{TT,\ell}$ がどのように ℓ に依存するかは依然として不透明なままである．そこでさらに近似するため，コスミック・バリアンスが無視できるような大きな ℓ に特化する．この場合，次の球ベッセル関数の近似式が使える*3．

$$j_\ell(\rho) \longrightarrow \begin{cases} \cos b\, \cos\left[\nu(\tan b - b) - \pi/4\right]/\nu\sqrt{\sin b} & \rho > \nu \\ 0 & \rho < \nu\,, \end{cases} \tag{7.2.14}$$

訳注 3 （130 ページ）宇宙膨張の真空のエネルギー密度の寄与が重要となる後期の積分ザクス–ヴォルフェ効果は小さな ℓ のみに寄与するが，最終散乱の時刻付近で宇宙がまだ完全に物質優勢でない（つまりまだ放射密度の寄与が残っている）ことから生じる早期の積分ザクス–ヴォルフェ効果は $\ell = 220$ に現れる $\ell(\ell+1)C^S_\ell$ の最初のピークに重要な寄与をする．図 7.1 の破線が $\ell = 220$ において実線よりも小さいのは早期の積分ザクス–ヴォルフェ効果を無視したことによる．早期の積分ザクス–ヴォルフェ効果の重要性の議論は，W. Hu, N. Sugiyama, *Astrophys. J.* **444**, 489 (1995) を見よ．

*2 この近似によって生じる不正確さを補正するため，後に時刻 t_L 以前の音響振動の減衰の効果を取り入れ，さらに最終散乱の時刻に渡って温度ゆらぎを平均化する．

*3 たとえば（A. Jeffrey によって翻訳され，拡張された）I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press (1980) の公式 8.453.1 を見よ．

ここで $\nu \equiv \ell + 1/2$，$\cos b \equiv \nu/\rho$，$0 \leqq b \leqq \pi/2$ とする．この近似式は $|\nu^2 - \rho^2| \gg \nu^{4/3}$ のときに成り立つから，$\ell \gg 1$ のときには式（7.2.13）の積分領域のほとんどでこの公式を使うことができる．さらに，$\rho > \nu \gg 1$ のときには式（7.2.14）の位相 $\nu(\tan b - b)$ は ρ とともに急激に増加する関数なので，式（7.2.13）の球ベッセル関数に作用する微分は主にこの位相に作用するとして良い．

$$j'_\ell(\rho) \longrightarrow \begin{cases} -\cos b\sqrt{\sin b}\,\sin\Big[\nu(\tan b - b) - \pi/4\Big]/\nu & \rho > \nu \\ 0 & \rho < \nu\,, \end{cases} \tag{7.2.15}$$

（式（7.2.14）の因子 $1/\sqrt{\sin b}$ に微分を作用させると $\rho = \nu$ において積分が発散するように見えるが，この発散は真の発散ではない．ρ が ν に非常に近づくと近似式（7.2.14）が破綻するだけで，特異点は存在しない）．式（7.2.13）にこれらの近似式を用い，積分変数を q から $b = \cos^{-1}(\nu/qr_L)$ に変えれば以下の式を得る．

$$\begin{aligned} C^S_{TT,\ell} = T_0^2\,\frac{16\pi^2\nu}{r_L^3}\int_0^{\pi/2}\frac{db}{\cos^2 b} &\\ \times\Bigg[F\left(\frac{\nu}{r_L\cos b}\right)\cos[\nu(\tan b - b) - \pi/4] &\\ -\sin b\,G\left(\frac{\nu}{r_L\cos b}\right)\sin[\nu(\tan b - b) - \pi/4]\Bigg]^2 . \end{aligned} \tag{7.2.16}$$

$\nu \gg 1$ のとき，関数 $\cos[\nu(\tan b - b) - \pi/4]$，$\sin[\nu(\tan b - b) - \pi/4]$ は急激に振動するから，$\cos^2[\nu(\tan b - b) - \pi/4]$ と $\sin^2[\nu(\tan b - b) - \pi/4]$ は平均化されて 1/2 となる．一方，$\cos[\nu(\tan b - b) - \pi/4]\sin[\nu(\tan b - b) - \pi/4]$ は平均化されてゼロになる．ℓ と $\nu = \ell + 1/2$ を区別せず，再び積分変数を b から $\beta = 1/\cos b$ に変えれば，式（7.2.16）は以下のようになる[*4]．

$$\begin{aligned} \ell(\ell+1)C^S_{TT,\ell} = T_0^2\,\frac{8\pi^2\ell^3}{r_L^3}\int_1^\infty\frac{\beta\,d\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} &\\ \times\left[F^2\left(\frac{\ell\beta}{r_L}\right) + \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2}G^2\left(\frac{\ell\beta}{r_L}\right)\right] . \end{aligned} \tag{7.2.17}$$

後に，形状因子 $F(q)$，$G(q)$ は大きな q で急激に小さくなることを見る．理由の 1

---

*4 より厳密だがもっと複雑な導出は，S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **64**, 123512 (2001) [astro-ph/0103281] で与えられている．$F(q)$ による寄与は，この文献以前に，J. R. Bond, "Theory and Observations of the Cosmic Background Radiation," in *Cosmology and Large Scale Structure*, eds. R. Schaeffer, J. Silk, M. Spiro, J. Zinn-Justin (1996) の 5.1.3 節で計算されている．

つは $|\mathcal{R}_q^o|^2$ がほぼ q^{-3} に比例して小さくなるためで，β に渡る積分は $\beta=\infty$ で収束する．さらに，実はこの積分は小さい β からの寄与に支配されている．F^2 の項の積分は $\beta\approx 1$，言い換えれば $q\approx \ell/r_L$，あるいは $q/a_L\approx \ell/d_A$ が最大の寄与をする．ここで $d_A=r_La_L$ は最終散乱面の角径距離を表す．一方，式（7.2.17）の G^2 にかかる因子 β^2-1 のため，この項の寄与は β が 1 に近くなると小さくなる．そのため，G^2 に比例するドップラー効果の多重極展開係数の寄与は比較的小さい．

形状因子 $F(q)$，$G(q)$ を詳しく計算せずとも，これらが最終散乱時刻でのバリオン密度や全物質密度に依存することはわかっている．現在時刻でのマイクロ波背景放射の温度がわかっていれば，これらの密度はそれぞれ Ω_Bh^2 と Ω_Mh^2 を用いて表せる．一方で，最終散乱時刻では空間曲率や暗黒エネルギーは（おそらく）無視できるから，形状因子は Ω_K や Ω_Λ や H_0 には依存しない．そのため，これらのパラメータは以下の意味で縮退している．Ω_K や Ω_Λ や H_0 の依存性はたった 1 つのパラメータ r_L（ロバートソン–ウォーカー座標での最終散乱面の半径）を通してしか現れない．もし，よくやられるように $\Omega_K=0$，すなわち $\Omega_\Lambda\simeq 1-\Omega_M$ を仮定すれば，温度ゆらぎから Ω_M と Ω_B に加えて H_0 の値も得られる．しかし，それは裏を返せば H_0 の情報が他から得られない限り温度ゆらぎのみから $\Omega_K=0$ を得ることができないということでもある．同様に，温度ゆらぎだけでは時間一定の真空エネルギーとクインテッセンス（1.12 節参照）を区別できない．さらに，r_L と ℓ は比 ℓ/r_L を通してのみ $\ell(\ell+1)C^S_{TT,\ell}$ に現れるので，Ω_K，Ω_Λ，H_0 の値は $\ell(\ell+1)C^S_{TT,\ell}$ の ℓ 依存性の**スケール**を変えることしかできない．たとえば，これらのパラメータは $\ell(\ell+1)C^S_{TT,\ell}$ に現れる複数のピークの位置を共通の因子だけ変化させるが，ピークの高さを変えることはできない．

次に，最終散乱時刻での重力場の摂動は冷たい暗黒物質密度の摂動によって支配されていると近似する．7.1 節で ISW 効果を議論した際にすでに述べたように，この場合 $\dot{A}_q$ はゼロとなる（式（5.3.38）の右辺の各項は時間に依存しない）．6 章で進化を追った場 ψ_q は一般的に $\psi_q\equiv(3\dot{A}_q-q^2\dot{B}_q)/2$ と定義されるから，$\dot{A}_q$ がゼロであれば $\dot{B}_q=-2\psi_q/q^2$ を得る．さらに，式（6.5.16）より $\psi_q\propto t^{-1/3}$ なので，$\ddot{B}_q=2\psi_q/3tq^2$ を得る．物質優勢期には $a\propto t^{2/3}$ であることを思い出せば，式（7.1.16）と（7.1.17）から形状因子が，

$$F(q)=\frac{1}{3}\delta_{\gamma q}(t_L)+\frac{a^2(t_L)\psi_q(t_L)}{3q^2t_L}, \tag{7.2.18}$$

$$G(q) = -q\delta u_{\gamma q}(t_L)/a(t_L) + a(t_L)\psi_q(t_L)/q \tag{7.2.19}$$

と得られる．ここで $\delta T_q/\bar{T} = \delta\rho_{\gamma q}/4\bar{\rho}_\gamma = \delta_{\gamma q}/3$ を用いた．

さらに次の近似として，6 章で行った摂動の進化の解析から得られた式（6.5.16），（6.5.17），（6.5.18）を用いる．これらの式はバリオン密度と暗黒物質密度の比を無視した結果得られたものである．

$$\psi_q(t_L) = -\frac{3q^2 t_L \mathcal{R}_q^o \mathcal{T}(\kappa)}{5\,a_L^2}\,, \tag{7.2.20}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\gamma q}(t_L) = \frac{3\mathcal{R}_q^o}{5}\Bigg[&\mathcal{T}(\kappa)(1+3R_L)\\ &-(1+R_L)^{-1/4}\,e^{-\int_0^{t_L}\Gamma dt}\,\mathcal{S}(\kappa)\\ &\times\cos\left(\int_0^{t_L}\frac{q\,dt}{a(t)\sqrt{3(1+R(t))}}+\Delta(\kappa)\right)\Bigg]\,,\end{aligned} \tag{7.2.21}$$

$$\begin{aligned}\delta u_{\gamma q}(t_L) = \frac{3\mathcal{R}_q^o}{5}\Bigg[&-t_L\mathcal{T}(\kappa)+\frac{a_L}{\sqrt{3}q(1+R_L)^{3/4}}\,e^{-\int_0^{t_L}\Gamma dt}\,\mathcal{S}(\kappa)\\ &\times\sin\left(\int_0^{t_L}\frac{q\,dt}{a(t)\sqrt{3(1+R(t))}}+\Delta(\kappa)\right)\Bigg]\,,\end{aligned} \tag{7.2.22}$$

ここで $R(t) \equiv 3\bar{\rho}_B(t)/4\bar{\rho}_\gamma(t)$，$R_L \equiv R(t_L)$，$a_L \equiv a(t_L)$ で，$\mathcal{T}(\kappa)$，$\mathcal{S}(\kappa)$，$\Delta(\kappa)$ は 6.5 節で定義して計算した遷移関数，$\kappa \equiv \sqrt{2}q/q_{\rm EQ}$ の $q_{\rm EQ}$ は物質と放射の密度が等しくなる時刻に地平線の中へ入って来る波数，そして $\Gamma(t)$ は式（6.4.25）で与えられる音波の減衰率を表す．式（7.2.20)–(7.2.22）を式（7.2.18），(7.2.19）に代入すれば，形状因子は以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}F(q) = \frac{\mathcal{R}_q^o}{5}\Bigg[&3\mathcal{T}(\kappa)R_L-(1+R_L)^{-1/4}\,e^{-\int_0^{t_L}\Gamma dt}\,\mathcal{S}(\kappa)\\ &\times\cos\left(\int_0^{t_L}\frac{q\,dt}{a(t)\sqrt{3(1+R(t))}}+\Delta(\kappa)\right)\Bigg]\,,\end{aligned} \tag{7.2.23}$$

$$\begin{aligned}G(q) = -&\frac{\sqrt{3}\mathcal{R}_q^o}{5(1+R_L)^{3/4}}\,e^{-\int_0^{t_L}\Gamma dt}\,\mathcal{S}(\kappa)\\ &\times\sin\left(\int_0^{t_L}\frac{q\,dt}{a(t)\sqrt{3(1+R(t))}}+\Delta(\kappa)\right)\,.\end{aligned} \tag{7.2.24}$$

ここで,「遅い」項は $G(q)$ の中で相殺して消えていることに着目しよう．もし仮に最終散乱時刻でのバリオン–光子比 R_L がゼロであれば，$F(q)$ の中の遅い項も完全に相殺する．

ここで，短波長領域の形状因子の「速い」項のみに生じる，ある効果を取り入れなくてはならない．これまでは最終散乱の時刻 t_L で宇宙の不透明度が一瞬にしてゼロになると仮定していたが，当然，不透明度の減少はある有限な時間範囲で起こる．したがって，形状因子はその時間範囲に渡って平均しなくてはならない．この平均化は遅い項にはわずかの違いしか生まないが，大きな波数では式 (7.2.23)，(7.2.24) の余弦と正弦が t_L とともに激しく振動するため，平均化によって速い項の寄与が大きく減少する．これは，**ランダウ減衰**として知られる現象と似ているが，ランダウ減衰は振動の**周期**が幅を持つことから生じるのに対し，今考えている減衰は振動が観測される**時刻**が幅を持つことから生じるところが異なる．

最終散乱の確率分布関数は時刻 t_L で鋭いピークを持つから，解析的な扱いを続けるためにこれをガウス関数で近似しよう．時刻 t と $t+dt$ の間で最終散乱が起こる確率を以下の形で与えよう．

$$P(t)dt = \frac{\exp[-(t-t_L)^2/2\sigma_t^2]\,dt}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} \,. \tag{7.2.25}$$

式 (7.2.23) と式 (7.2.24) で以下のような置換を行う．

$$\left\{\begin{array}{c}\cos\left(\int_0^{t_L}\omega\,dt+\Delta\right)\\ \sin\left(\int_0^{t_L}\omega\,dt+\Delta\right)\end{array}\right\} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}P(t)\,dt\left\{\begin{array}{c}\cos\left(\int_0^{t}\omega\,dt+\Delta\right)\\ \sin\left(\int_0^{t}\omega\,dt+\Delta\right)\end{array}\right\}\,, \tag{7.2.26}$$

ここで $\omega = q/a\sqrt{3(1+R)}$ を表す．分布関数 $P(t)$ は t_L で鋭いピークを持つので，正弦と余弦の引数を $t-t_L$ の 1 次まで展開してから積分する．

$$\int_0^t \omega\,dt \simeq \int_0^{t_L}\omega\,dt + \omega_L(t-t_L)\,.$$

これで式 (7.2.26) の積分を実行できる．

$$\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)\,dt\left\{\begin{array}{c}\cos\left(\int_0^{t}\omega\,dt+\Delta\right)\\ \sin\left(\int_0^{t}\omega\,dt+\Delta\right)\end{array}\right\}$$

$$\simeq \exp(-\omega_L^2\sigma_t^2/2)\begin{Bmatrix} \cos\left(\int_0^{t_L} \omega\, dt + \Delta\right) \\ \sin\left(\int_0^{t_L} \omega\, dt + \Delta\right) \end{Bmatrix} . \tag{7.2.27}$$

この結果より，平均化によって形状因子の速い項には減衰因子 $\exp(-\omega_L^2\sigma_t^2/2)$ が追加されることがわかる．$\varGamma$ と ω_L^2 は両方とも q^2 に比例するので，

$$\int_0^{t_L} \varGamma\, dt + \omega_L^2\sigma_t^2/2 = q^2 d_D^2/a_L^2 \tag{7.2.28}$$

と書くことにしよう．d_D は**減衰長**で，式（6.4.25）と式（7.2.27）から以下のように与えられる．

$$d_D^2 = d_{\text{シルク}}^2 + d_{\text{ランダウ}}^2 , \tag{7.2.29}$$

$$d_{\text{シルク}}^2 = a_L^2 \int_0^{t_L} \frac{t_\gamma}{6a^2(1+R)} \left\{ \frac{16}{15} + \frac{R^2}{(1+R)} \right\} dt , \tag{7.2.30}$$

$$d_{\text{ランダウ}}^2 = \frac{\sigma_t^2}{6(1+R_L)} , \tag{7.2.31}$$

ここで添え字の「シルク」,「ランダウ」はそれぞれシルク減衰，ランダウ減衰を，$t_\gamma = 1/\omega_c$ は光子の平均自由時間，R は $R \equiv 3\bar{\rho}_B/4\bar{\rho}_\gamma$ を表す．

シルク減衰の項を評価するため，$R \propto a$ より，

$$t_\gamma = \frac{1}{n_e\sigma_T c} = \frac{R^3}{n_{B0}R_0^3(1-Y)X\sigma_T c} \tag{7.2.32}$$

と書くことにしよう．$R_0 = 3\varOmega_B/4\varOmega_\gamma$ は R の現在時刻での値，$Y \simeq 0.24$ は最終散乱時刻付近で（電離されていない）中性ヘリウム原子に含まれる核子数が全核子数に対して占める割合，$n_{B0} = 3H_0^2\varOmega_B/8\pi G m_N$ は現在時刻でのバリオン数密度，そして $X(R)$ は 2.3 節で計算した電離度である．また，

$$dt = \frac{dR}{RH_0\sqrt{\varOmega_M(R_0/R)^3 + \varOmega_R(R_0/R)^4}} = \frac{R\,dR}{H_0\sqrt{\varOmega_M}R_0^{3/2}\sqrt{R_{\text{EQ}}+R}} \tag{7.2.33}$$

で $R_{\text{EQ}} \equiv \varOmega_R R_0/\varOmega_M = 3\varOmega_R\varOmega_B/4\varOmega_M\varOmega_\gamma$ は，物質と放射の密度が等しくなる時刻での R の値を表す．これらをすべて合わせれば，シルク減衰長が，

$$d^2_{\text{シルク}} = \frac{R_L^2}{6(1-Y)n_{B0}\sigma_T c H_0 \sqrt{\Omega_M} R_0^{9/2}} \times \int_0^{R_L} \frac{R^2\,dR}{X(R)\,(1+R)\sqrt{R_{\mathrm{EQ}}+R}} \left\{ \frac{16}{15} + \frac{R^2}{(1+R)} \right\} \tag{7.2.34}$$

と得られる．また，最終散乱時刻の標準偏差 σ_t は 2.3 節で計算した最終散乱時の温度の標準偏差 σ と $\sigma_t = 3t_L\sigma/2T_L$ のように関係しているので，ランダウ減衰長は次のように与えられる．

$$d^2_{\text{ランダウ}} = \frac{3\sigma^2 t_L^2}{8T_L^2(1+R_L)} \,. \tag{7.2.35}$$

以上の結果を用いれば，式（7.2.23），(7.2.24）の形状因子を波数の関数として書ける．

$$F(q) = \frac{\mathcal{R}_q^o}{5}\Big[3\mathcal{T}(qd_T/a_L)R_L - (1+R_L)^{-1/4}\mathcal{S}(qd_T/a_L)\,e^{-q^2 d_D^2/a_L^2}\,\cos\Big(qd_H/a_L + \varDelta(qd_T/a_L)\Big)\Big], \tag{7.2.36}$$

$$G(q) = -\frac{\sqrt{3}\mathcal{R}_q^o}{5(1+R_L)^{3/4}}\,e^{-q^2 d_D^2/a_L^2}\mathcal{S}(qd_T/a_L)\,\sin\Big(qd_H/a_L + \varDelta(qd_T/a_L)\Big)\,, \tag{7.2.37}$$

ここで，d_T は遷移関数の引数を $\kappa = qd_T/a_L$ と書いて定義する長さで，式（6.5.9）を用いれば以下のように書ける．

$$d_T = \frac{\sqrt{\Omega_R}}{(1+z_L)H_0\Omega_M} = \frac{0.0177}{\Omega_M h^2}\,\mathrm{Mpc}\,. \tag{7.2.38}$$

最後に，d_H は最終散乱時刻での音波の地平線の半径で，

$$d_H \equiv a_L \int_0^{t_L} \frac{dt}{a\sqrt{3(1+R)}} = \frac{2}{H_0\sqrt{3R_L\Omega_M}(1+z_L)^{3/2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+R_L}+\sqrt{R_{\mathrm{EQ}}+R_L}}{1+\sqrt{R_{\mathrm{EQ}}}}\right) \tag{7.2.39}$$

で与えられる．ここで再び $R_{\mathrm{EQ}} = 3\Omega_R\Omega_B/4\Omega_M\Omega_\gamma$，$R_L = 3\Omega_B/4\Omega_\gamma(1+z_L)$ である．

これらの形状因子を式（7.2.17）に代入する前に，もうひとつやっておくことがある．再結合の時刻に形成された中性水素は，10 程度の赤方偏移 $z_{再電離}$（宇宙誕生より約 4.6 億年）で第一世代の大質量星から放出される紫外線放射によって電離される．この電離によって再び自由になった電子は，小さいが無視できない程度の確率 $1 - \exp(-\tau_{再電離})$（ここで $\tau_{再電離}$ は電離プラズマの光学的厚さ）で宇宙マイクロ波背景放射の光子を散乱する．したがって，温度異方性 ΔT は 2 つの寄与の和となる．1 つは再電離で生じた自由電子に散乱されない光子の寄与で，これは散乱されない確率 $\exp(-\tau_{再電離})$ を今まで計算してきた異方性にかけたものに等しい．もう 1 つは散乱された光子の寄与である．散乱は $z_L \simeq 1090$ よりずっと小さい赤方偏移で起こるから，我々はずっと近い距離にある異方性を見ることになる．したがって，これは小さい ℓ を持つ異方性に影響する．以上より，コスミック・バリアンスのため観測の解釈が難しい小さな ℓ の領域を除けば，電離プラズマの散乱が $C^S_{TT,\ell}$ に及ぼす影響は，単に $\exp(-2\tau_{再電離})$ を $C^S_{TT,\ell}$ にかけるだけで考慮できる．だがそれは，温度異方性の観測だけでは再電離の確率と原始ゆらぎの振幅 $\mathcal{R}^o_q$ をうまく分離できないことを意味する．温度ゆらぎの観測のみから得られるのは，$|\mathcal{R}^o_q|^2 \exp(-2\tau_{再電離})$ の値である．再電離後の散乱から生成されるマイクロ波光子の偏光（これについては 7.4 節で学ぶ）の測定を使えばこれらを分離でき，$\exp(-2\tau_{再電離}) \approx 0.8$ が得られている．

原始ゆらぎの振幅 $\mathcal{R}^o_q$ は以下の形（あるいは以下と等価な形）でモデル化するのが慣例となっている．

$$|\mathcal{R}^o_q|^2 = N^2 q^{-3} \left(\frac{q/a_0}{k_{\mathcal{R}}}\right)^{n_S - 1}, \tag{7.2.40}$$

ここで，n_S がまた波数に依存する可能性がある．このモデル化が便利な理由は，

$$\left(\frac{\ell}{r_L}\right)^3 |\mathcal{R}^o_{\beta\ell/r_L}|^2 = \frac{N^2}{\beta^3} \left(\frac{\ell\beta}{k_{\mathcal{R}} d_A (1 + z_L)}\right)^{n_S - 1}$$

で，かつ後に見るように観測より n_S が 1 に近いとわかっている点である．$|\mathcal{R}^o_q|^2$ の規格化を決める因子は $N^2 k_{\mathcal{R}}^{1-n_S}$ のみで，$k_{\mathcal{R}}$ は任意に選ぶことができる．通常は $k_{\mathcal{R}} = 0.05\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ と選ばれることが多い．

以上より，コスミック・バリアンスと積分ザクス–ヴォルフェ効果が無視でき，式（7.2.17）を導く際に用いた近似が使え，再電離の効果を単純な因子 $\exp(-2\tau_{再電離})$ で取り入れることのできる（$\ell > 20$ 程度の）比較的大きな値の ℓ では，スカラー

型摂動の多重極展開係数の寄与だと通常呼ばれている量は,

$$\frac{\ell(\ell+1)C^S_{TT,\ell}}{2\pi} = \frac{4\pi T_0^2 N^2 e^{-2\tau_{\text{再電離}}}}{25} \int_1^\infty d\beta \left(\frac{\beta\ell}{\ell_{\mathcal{R}}}\right)^{n_S-1}$$
$$\times \Bigg\{ \frac{1}{\beta^2\sqrt{\beta^2-1}} \Big[3\mathcal{T}(\beta\ell/\ell_T)R_L$$
$$-(1+R_L)^{-1/4}\mathcal{S}(\beta\ell/\ell_T)\, e^{-\beta^2\ell^2/\ell_D^2} \cos\Big(\beta\ell/\ell_H + \Delta(\beta\ell/\ell_T)\Big)\Big]^2$$
$$+\frac{3\sqrt{\beta^2-1}}{\beta^4(1+R_L)^{3/2}} e^{-2\beta^2\ell^2/\ell_D^2}\mathcal{S}^2(\beta\ell/\ell_T)\sin^2\Big(\beta\ell/\ell_H + \Delta(\beta\ell/\ell_T)\Big)\Bigg\} \tag{7.2.41}$$

と求まる．ここで,

$$\ell_D \equiv d_A/d_D\ , \quad \ell_T \equiv d_A/d_T\ , \quad \ell_H \equiv d_A/d_H\ , \quad \ell_{\mathcal{R}} = (1+z_L)k_{\mathcal{R}}d_A\ , \tag{7.2.42}$$

また，d_A は以下で与えられる最終散乱面の角径距離を表す.

$$d_A \equiv r_L a_L = \frac{1}{\Omega_K^{1/2} H_0(1+z_L)} \sinh\left[\Omega_K^{1/2}\int_{1/(1+z_L)}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\Lambda x^4 + \Omega_K x^2 + \Omega_M x}}\right], \tag{7.2.43}$$

ただし $\Omega_K = 1-\Omega_\Lambda-\Omega_M$ で，Ω_R は無視した．もし，先で議論したように β に渡る積分が $\beta\approx 1$ の寄与に支配されていると仮定し，ドップラー効果の項を無視し，当面のところは遷移関数 $\mathcal{T}$ に比例する項を無視すれば，式（7.2.41）より $C^S_{TT,\ell}$ は $\chi(\ell)=\pi, 2\pi, 3\pi$ 等にピークを持つことがわかる．ここで $\chi(\ell) = \ell/\ell_H + \Delta(\ell/\ell_T)$ は $\beta=1$ のときの式（7.2.41）の余弦の位相を表す．バリオンプラズマの慣性から生じる項 $3\mathcal{T}R_L$（符号は正）の存在により，$\chi=\pi, 3\pi$ 等余弦が負の場所ではピークが高くなってピークの位置も少しずれるが，$\chi=2\pi, 4\pi$ 等余弦が正の場所ではピークが低くなる．ℓ が大きいところでは，シルク減衰とランダウ減衰を合わせた因子 $\exp(-\beta^2\ell^2/d_D^2)$ によって，これらのピークはすべて減衰する．これらの予想されるピーク構造，つまりピークの高さが徐々に低くなり，奇数番目のピークが偶数番目のピークよりも若干高くなるという構造は，数値計算の結果にも見られる．

これで，$C^S_{TT,\ell}$ に現れる量がさまざまな宇宙論パラメータにどう依存するのか

を理解できるようになった．マイクロ波背景放射の現在時刻の平均温度は正確に測定されているので固定し（これから $\Omega_\gamma h^2$ と $\Omega_R h^2 = \Omega_\gamma h^2 + \Omega_\nu h^2$ の値が決まる），宇宙論パラメータ依存性が弱い t_L，z_L，σ の値も固定すれば，以下の宇宙論パラメータ依存性が残る．

- $R_L \propto \Omega_B h^2$.
- $d^2_{シルク}$ を与える式 (7.2.34) の積分は $\Omega_B h^2$ と $\Omega_M h^2$ の複雑な関数となっているが，依存性はあまり強くない．積分を除けば $d^2_{シルク}$ は $(\Omega_B h^2)^{-7/2}(\Omega_M h^2)^{-1/2}$ に比例している．
- $d^2_{ランダウ}$ は因子 $(1+R_L)^{-1}$ を通して $\Omega_B h^2$ に依存する．
- $d_T \propto (\Omega_M h^2)^{-1}$.
- ゆっくりとしか変化しない対数的な依存性を除けば，

$$d_H \propto (\Omega_B h^2)^{-1/2}(\Omega_M h^2)^{-1/2}$$

である．

- $\Omega_B h^2$ と $\Omega_M h^2$ の依存性を除けば，d_A だけが H_0，Ω_Λ，Ω_M，Ω_B，あるいは Ω_K に依存する（観測から許される Ω_Λ や Ω_K の値を採用すれば，時間一定の真空エネルギーや空間曲率が再結合の時刻以前に与える影響はまったく無視できるので，これらが $C^S_{TT,\ell}$ に及ぼす影響は再結合の時刻以降の光の伝播への影響，つまり d_A への影響を通したものに限られる）．

これまでに行ってきた様々な近似が実際のところどの程度良いものであるかを確認するため，CBI（Cosmic Background Imager, 宇宙背景放射撮像機），ACBAR（The Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver, 分角ボロメータアレイ受信機），それから WMAP 衛星の 1 年目の観測（これに関しては後により詳しく述べる）でマイクロ波背景放射のデータから求めた宇宙論パラメータの値[*5]を用い，$C^S_{TT,\ell}$ を計算してみる．これらの宇宙論パラメータの値は，公開されていてすぐ手に入るコンピュータ計算の結果[*6] に使われたものと同じである．具体的な値は，

$$\Omega_M h^2 = 0.13299\,, \quad \Omega_B h^2 = 0.02238\,, \quad h = 0.71992\,, \quad \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M \tag{7.2.44}$$

[*5] D.N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003) [astro-ph/0302209].

[*6] `http://lambda.gsfc.nasa.gov/data/map/powspec/wmap_lcdm_pl_model_yr1_v1.txt`

および[*7],

$$n_S = 0.95820\,, \quad k_{\mathcal{R}} = 0.05\ \mathrm{Mpc}^{-1}\,, \quad N^2 = 1.736 \times 10^{-10}\,,$$
$$e^{-2\tau_{\text{再電離}}} = 0.80209 \tag{7.2.45}$$

である．現在時刻の温度は $T_0 = 2.725\,\mathrm{K}$ を用い，これから $\Omega_\gamma h^2 = 2.47 \times 10^{-5}$ が得られる．質量のないニュートリノのフレーバー数は 3 つとし，これから $\Omega_R h^2 = 1.6813\Omega_\gamma h^2 = 4.15 \times 10^{-5}$ を得る．また，2.3 節で $\Omega_B h^2 = 0.02$，$\Omega_M h^2 = 0.15$ を用いて計算した再結合をうまく記述する以下のパラメータを採用する（他の宇宙論パラメータ依存性はあまり強くない）．

$$1 + z_L = 1090\,, \quad \sigma = 262\ \mathrm{K}\,, \quad t_L = 370000\ \text{年}. \tag{7.2.46}$$

式（7.2.44）の $\Omega_M h^2$，$\Omega_B h^2$ の値に対しては，

$$R_0 = 679.6\,, \quad R_L = 0.6234\,, \quad R_{\mathrm{EQ}} = 0.2121 \tag{7.2.47}$$

なので，式（7.2.38），(7.2.39），(7.2.43）から，

$$d_T = 0.1331\ \mathrm{Mpc}\,, \quad d_H = 0.1351\ \mathrm{Mpc}\,, \quad d_A = 12.99\ \mathrm{Mpc} \tag{7.2.48}$$

が得られる．式（7.2.34），(7.2.35），(7.2.29）で定義した減衰長は，

$$d_{\text{シルク}} = 0.006555\ \mathrm{Mpc}\,, \quad d_{\text{ランダウ}} = 0.004809\ \mathrm{Mpc}\,, \quad d_D = 0.008130\ \mathrm{Mpc} \tag{7.2.49}$$

である．最後に，式（7.2.42）で定義され，式（7.2.41）に現れるパラメータの値は，

$$\ell_T = 97.60\,, \quad \ell_H = 96.15\,, \quad \ell_D = 1598\,, \quad \ell_{\mathcal{R}} = 708 \tag{7.2.50}$$

で，積分全体にかかる因子は，

$$\frac{4\pi T_0^2 N^2 e^{-2\tau_{\text{再電離}}}}{25} = 519.7\ \mu\mathrm{K}^2\,. \tag{7.2.51}$$

これらの値を用いれば，式（7.2.41）に脚注 6 の宇宙論パラメータを代入した表式は，

[*7] パラメータ N^2 は，しばしば「振幅」と呼ばれる量 A と $4\pi N^2 \equiv 20{,}000\pi A/9T_{\gamma 0}(\mu K)^2 = 2.95 \times 10^{-9} A$ のように関係している．たとえば，L. Verde *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 195 (2003) [astro-ph/0302218] を見よ．ちなみに，フーリエ積分を書く際に用いられる規格化因子の違いにより，この論文で用いられている量 $\mathcal{R}_k$ は本書の $\mathcal{R}^o_{a_0 k}$ に因子 $(2\pi)^{3/2}$ をかけたものに等しい．脚注 6 の文献では $A = 0.73935$ を用いており，これは式（7.2.45）の N^2 の値に対応する．

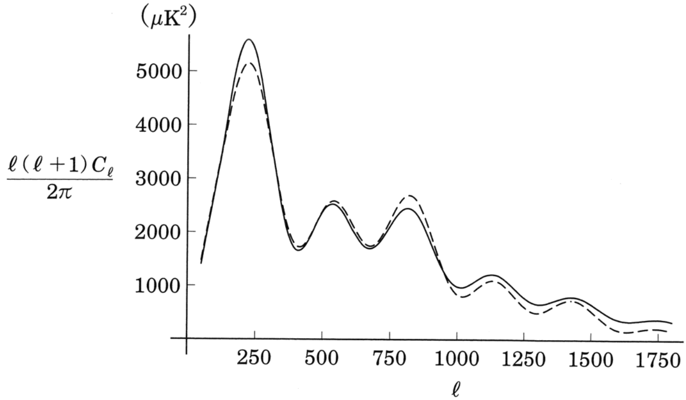


図 7.1　スカラー型温度ゆらぎの多重極展開係数 $\ell(\ell+1)C_\ell^S/2\pi$ を ℓ の関数として示す．宇宙論パラメータは式（7.2.44）と（7.2.45）の値を用いた．流体近似 の式（7.2.41）に基づく計算結果は破線で表し，式（7.2.10）に基づく脚注 6 のより正確なコンピュータ計算の結果は実線で表す．

$$\frac{\ell(\ell+1)C^S_{TT,\ell}}{2\pi} = 519.7\ \mu K^2 \int_1^\infty d\beta\ \left(\frac{\beta\ell}{708}\right)^{-0.0418}$$
$$\times \left\{ \frac{1}{\beta^2\sqrt{\beta^2-1}} \Big[3(0.6234)\mathcal{T}(\beta\ell/97.6) - (1.6234)^{-1/4}\mathcal{S}(\beta\ell/97.6)\, e^{-(\beta\ell/1598)^2}\ \cos\Big(\beta\ell/96.15 + \mathit{\Delta}(\beta\ell/97.6)\Big)\Big]^2 \right.$$
$$+ \frac{3\sqrt{\beta^2-1}}{\beta^4(1.6234)^{3/2}} e^{-2(\beta\ell/1598)^2} \mathcal{S}^2(\beta\ell/97.6)$$
$$\left. \times \sin^2\Big(\beta\ell/96.15 + \mathit{\Delta}(\beta\ell/97.6)\Big)\right\} \tag{7.2.52}$$

と書ける．β に渡る積分は非常に速く収束するから，$\beta = 5$ を積分の上限値にして計算して良い．たとえ上限値を $\beta = 50$ まで上げても，無視できるほど小さな違いしか生じない．

図 7.1 で上の積分から得られた計算結果を，式（7.2.10）に基づく正確なボルツマン方程式の数値計算の結果（脚注 6）と比較する．流体近似が非常に良い結果を表すのがよくわかる．脚注 6 のコンピュータによる計算結果のように，最初のピークが 1 番高く，続く 2 つのピークはほぼ同じ高さで，その後のピークの

表 7.1 式（7.2.52）および脚注 6 の計算から得られた，$\ell(\ell+1)C^S_{TT,\ell}/2\pi$の最初の 5 つのピークの位置に対応する ℓ の値の比較.

式（7.2.52）	220	541	821	1134	1425
脚注 6	219	536	813	1127	1425

表 7.2 式（7.2.52）および脚注 6 の計算から得られた，表 7.1 に示されるピークの位置での $\ell(\ell+1)C^S_{TT,\ell}/2\pi$ の値の比較（単位は μK^2）.

式（7.2.52）	5155	2694	2783	1126	746
脚注 6	5591	2525	2451	1221	806

高さはどんどん低くなっている．比較を定量的にするため，表 7.1 と表 7.2 に式（7.2.52）と脚注 6 の結果から得られたピークの位置とピークの高さの比較をそれぞれ載せておく．すべての場合において，式（7.2.52）から得られたピークの高さはより正確なコンピュータ計算から得られたものと 10%以内の精度で合致している．式（7.2.52）から得られたピークの位置に至っては戸惑うほど精度が良く，1%もずれていない．

本節の計算が成功を収めたことよりまずわかるのは，宇宙論的摂動の進化はだいたい流体力学的であるということである．つまり，脚注 6 のコンピュータ計算に使われたような完全な連立ボルツマン方程式を用いずとも，摂動の進化は流体力学の方程式でよく記述できるという点である．実をいえば，シルク減衰率を計算するときに電離ガス中の光子のボルツマン方程式を解いて得られた剪断粘性率と熱伝導率を用いたので，厳密にいえば我々の計算でもボルツマン方程式を間接的に使ってはいるが，摂動の進化を求めるのに再びボルツマン方程式を解かずともそれほど困らない．

この比較によって確認された一般公式（7.2.4）の精度の範囲内で，$C_{TT,\ell}$ の測定から何が学べるのか考えてみよう．

- 式（7.2.41）より，たとえばピークの位置やピークの高さの**比**で特徴づけられる関数 $\ell(\ell+1)C^S_{TT,\ell}$ の**形**は 4 つの量にのみ依存する．つまり，d_D，d_H，d_T，n_S である．また，現在時刻の放射温度と質量のないニュートリノの種類数を固定

すれば，3 つの長さ d_D，d_H，d_T は 2 つの宇宙論パラメータ $\Omega_B h^2$，$\Omega_M h^2$ のみに依存する．これらが関数 $\ell(\ell+1)C^S_{TT,\ell}$ の形から得られる情報である．

- この関数の ℓ 依存性が持つ特定のスケール（たとえば，ある 1 つのピークが持つ ℓ の値）の測定は，これら 2 つの宇宙論パラメータに加えて d_A にも依存する．そして d_A は $\Omega_B h^2$，$\Omega_M h^2$ だけでなく h と Ω_Λ にも依存する．したがって，（積分ザクス–ヴォルフェ効果を含めなければ）$C^S_{TT,\ell}$ の測定のみを用いて h と Ω_Λ を分離して決定することは不可能である．そこで，よく仮定されるように単純に宇宙が空間的に平坦であるとすれば，良い近似で $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$ となり，$C^S_{TT,\ell}$ の測定から h，および $\Omega_B h^2$，$\Omega_M h^2$ を決定できる．
- 関数 $\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}$ が $\ell \gg 1$ で持つ大きさ（たとえば，ある 1 つのピークが持つ高さ）の測定では $N^2 \exp(-2\tau_{再電離})$ しか得られないから，すでに述べたように，この測定を用いて N^2 と $\tau_{再電離}$ を分離して決定することはできない．7.4 節で学ぶように，この曖昧さは宇宙マイクロ波背景放射の偏光を測定することで解消できる．

宇宙マイクロ波背景放射の異方性が COBE チームによって最初に発見されたのは 2.6 節で述べた通りである．しかし，COBE は $\ell \approx 200$ にある最初の音響ピークの位置よりもずっと小さな ℓ での異方性の情報しか与えなかった．この発見の後，多くの気球観測や地上観測が行われ[*8]，最初の音響ピークの存在に関しては確かな証拠が得られた．また，他のピークに関してもそれなりのデータが得られ，たとえば CBI チームは 5 番目のピークの位置 $\ell \approx 1400$ を超えるような値の ℓ まで測定を伸ばした．その後すぐ，ウィルキンソンマイクロ波異方性探査機（WMAP）として知られる驚くべき人工衛星の観測により，約 $\ell \approx 600$ までの測定の精度が大幅に改善された[*9]．

この WMAP 衛星は 2001 年 6 月 30 日に打ち上げられた後，地球を周回しつつ

[*8] いくつかの実験チームを挙げると，ARCHEOPS: A. Benoit *et al.*, *Astron. Astrophys.* **399**, L19, L25 (2003) [astro-ph/0210305, 0210306]; QMAP & MAT/TOCO: A. Miller *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **140**, 115 (2002) [astro-ph/0108030]; BOOMERanG: J. E. Ruhl *et al.*, *Astrophys. J.* **599**, 786 (2003) [astro-ph/0212229]; MAXIMA: A. T. Lee *et al. Astrophys. J.* **561**, L1 (2001); DASI: N. W. Halverson *et al.*, *Astrophys. J.* **568**, 38 (2002) [astro-ph/0104489]; CBI: T. J. Pearson *et al.*, *Astrophys. J.* **591**, 556 (2003) [astro-ph/0205388]; ACBAR: C. L. Kuo *et al.*, *Astrophys. J.* **600**, 32 (2004) [astro-ph/0212289]; VSA: C. Dickinson *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **353**, 732 (2004) [astro-ph/0402498].

[*9] C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003) [astro-ph/0302207]．初年度の観測結果に関する詳細は，*Astrophys. J. Suppl.* の同じ巻に掲載されている他の論文を参照.

月に何度も接近して月の運動から運動エネルギーをもらい，最終的にラグランジュ2（L2）点として知られる平衡点を周回する軌道に辿り着いた．L2 点は太陽から見て地球を挟んだ向こう側に位置しており，太陽を周回する．地球からの距離は 1.5×10^6 km である．この場所では，衛星に搭載された検出器が向く方向を太陽，地球，月から放出されるマイクロ波の影響から常に遠ざけることができる．WMAP 衛星は背中合わせに取り付けられた 2 枚のマイクロ波受信アンテナ（大きさは $1.4\,\mathrm{m} \times 1.6\,\mathrm{m}$）を持ち，放射冷却によって約 90 K まで冷やされ，マイクロ波背景放射の天球上の場所による温度の違いと偏光を全天に渡って測定する．

1 年間の観測の後，$\ell \simeq 600$ までの $C_{TT,\ell}$ が高精度で測定された．不定性のほとんどはコスミック・バリアンスと前景放射の影響によるものである[*10]．これらの測定を，ここまで学んできた "ΛCDM" モデル（宇宙は空間的に平坦で，その組成は光子，3 種類の質量のないニュートリノ，バリオン，冷たい暗黒物質と時間一定の真空エネルギーからなり，原始ゆらぎは純粋に断熱的かつ式（7.2.40）で与えられるスペクトルを持ち，n_S は波数に依存しない）の予言と比較することで，以下の宇宙論パラメータが導かれた[*11]．

- $\Omega_B h^2 = 0.024 \pm 0.001$
- $\Omega_M h^2 = 0.14 \pm 0.02$
- $h = 0.72 \pm 0.05$
- $|N|^2 = (2.1 \pm 0.2) \times 10^{-10}$
- $n_S = 0.99 \pm 0.04$
- $\tau_{\text{再電離}} = 0.166^{+0.076}_{-0.071}$

（偏光の測定結果は，ここでは主に再電離されたプラズマの光学的厚さ $\tau_{\text{再電離}}$ を決定するために使われた[*12]．これは，$C^S_{TT,\ell}$ の測定結果から得られた $|N|^2 \exp(-2\tau_{\text{再電離}})$ の値で $|N|^2$ を求めるときに必要なものである．）

2006 年の 3 月，WMAP チームは 2 年目と 3 年目の観測結果を発表した[*13]．図 7.2（146 ページ）に $\ell(\ell+1)C^S_{TT,\ell}/2\pi$ の測定データ，およびデータによく合う

[*10] G. Hinshaw *et al.*, *Astrophys. J.* **148**, 135 (2003) [astro-ph/0302217].

[*11] D.N. Spergel *et al.*，脚注 5 を参照．不定性は 68%の信頼領域を表す．

[*12] A. Kogut *et al.*, *Astrophys. J.* **148**, 161 (2003) [astro-ph/0302213].

[*13] 温度と偏光の測定結果はそれぞれ，G. Hinshaw *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 288 (2007) [astro-ph/0603451] と L. Page *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 335 (2007) [astro-ph/0603450] に与えられている．

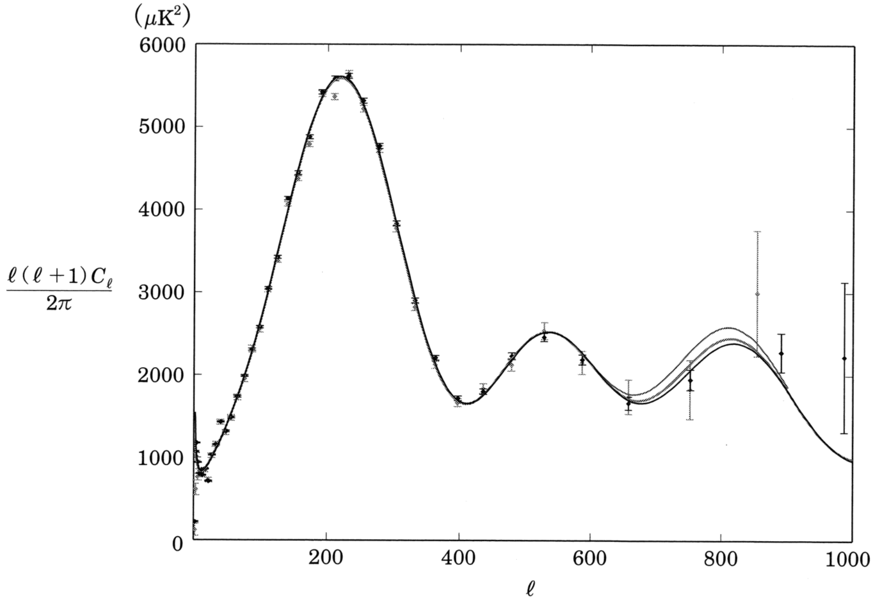


図 7.2　温度ゆらぎの多重極展開係数 $\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi$ の理論曲線と WMAP 衛星から得られた観測データの比較を ℓ の関数として示す．D. N. Spergel *et al.*, astro-ph/0603449 から抜粋．黒く塗りつぶされたデータ点は WMAP の 3 年間の観測データを，薄い灰色のデータ点は 1 年目の観測データを示す．1 番下の曲線は WMAP 3 年間のデータによく合う理論曲線，1 番上の曲線は WMAP 1 年目のデータによく合う理論曲線，そして中間の曲線は WMAP 1 年目のデータと地上実験 CBI，ACBAR のデータによく合う理論曲線を示す．

（テンソル型摂動がゼロの場合の）ΛCDM モデルの曲線を示す．これから得られたパラメータは[*14]，

- $\Omega_B h^2 = 0.02229 \pm 0.00073$
- $\Omega_M h^2 = 0.1277^{+0.0080}_{-0.0079}$
- $h = 0.732^{+0.031}_{-0.032}$
- $|N|^2 = (1.93 \pm 0.12) \times 10^{-10}$
- $n_S = 0.958 \pm 0.016$

[*14] D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 377 (2007) [astro-ph/0603449].

- $\tau_{\text{再電離}} = 0.089 \pm 0.030.$

である．

新しい結果はその前の結果と無矛盾であるが，パラメータの決定精度が飛躍的に向上しているのがよくわかる．この精度の向上により，n_S の値が 1 より若干小さいという重要な情報が得られた．これは，10 章で議論する典型的なインフレーション理論から予想される値である．偏光の測定から得られた再電離プラズマの光学的厚さが前回の結果よりもずっと小さいことも重要で，これから示唆される再電離の時期は理論的にももっともらしい値となっている[*15]．$C^S_{TT,\ell}$ の大きさは $|N|^2 \exp(-2\tau_{\text{再電離}})$ に比例しているから，$\tau_{\text{再電離}}$ の測定値の減少に応じて $|N|^2$ の測定値も減少する．$|N|^2 \exp(-2\tau_{\text{再電離}})$ の測定値は 1 年目と 3 年目でそれほど変化していない．

宇宙マイクロ波背景放射異方性の測定から得られた h，$\Omega_M h^2$，$\Omega_B h^2$ の値が 1 章と 3 章で学んだ非常に異なる手法から得られた値と合致するというのは，本当に満足のいく結果である．$|N|^2$ と n_s の値もまた，8 章で議論する大規模構造の観測から得られた値とよく合っている．マイクロ波背景放射異方性の観測結果，およびマイクロ波背景放射異方性と他の観測を合わせた結果が理論予言と一般的に一致したということは，冷たい暗黒物質や暗黒エネルギーといった，これまで用いてきた宇宙論モデルの一般的な仮定の正しさが確認できたということでもある．

7.3　温度の多重極展開の係数：テンソルモード

次に，宇宙論的な重力波による温度ゆらぎの多重極展開係数の寄与を考える[*1]．式 (7.1.5) によれば，単一の支配的なモードがテンソル型摂動を生成している場合の温度ゆらぎは，

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^{(T)} = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3q\; \beta(\boldsymbol{q},\lambda)\, \hat{n}_k \hat{n}_l\, e_{kl}(\hat{q},\lambda)$$

[*15] 3 年間の WMAP 衛星の観測から得られたプラズマの光学的厚さの値が持つ宇宙早期の星形成への意義は，M. A. Alvarez, P. R. Shapiro, K. Ahn, I. T. Iliev, *Astrophys. J.* **644**, L101 (2006) [astro-ph/0604447]; Z. Haiman, G. L. Bryan, *Astrophys. J.* **650**, 7 (2006) [astro-ph/0603541]; T. R. Choudhury, A. Ferrara, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **371**, L55 (2006) [astro-ph/0603617]; M. Shull, A. Venkatesan, astro-ph/0702323 で議論されている．

[*1] 初期に行われた，小さな角波数に対する多重極展開係数の計算は V. A. Rubakov, M. V. Sazhin, and A. V. Veryaskin, *Phys. Lett.* **115B**, 189 (1982) を見よ．一般的な公式は R. Fabbri, M. D. Pollock, *Phys. Lett.* **125B**, 445 (1983) によって与えられた．

$$\times \int_{t_1}^{t_0} dt\ \exp\left[i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\right] d(q,t) \tag{7.3.1}$$

で与えられる．ここで，式の簡略化のため以下の量を導入した．

$$d(q,t) \equiv \exp\left[-\int_t^{t_0} dt'\,\omega_c(t')\right]\left(\dot{\mathcal{D}}_q(t) - \frac{1}{2}\omega_c(t)\Psi(q,t)\right) . \tag{7.3.2}$$

いくつかの事項を復習しておこう．$\beta(\boldsymbol{q},\lambda)$ は地平線の外側で減衰しない解が持つ確率変数で，これがテンソル型摂動を支配するモードだとする．$e_{kl}(\hat{q},\lambda)$ は 6.6 節で定義した波数 $\boldsymbol{q}$ とヘリシティ λ を持つ重力波を記述する偏光テンソル，t_1 は再結合の時刻よりもずっと以前の時刻にとり，そこにある光子は現在時刻までに何度も散乱されるものとする．$\omega_c(t)$ は時刻 t の光子の衝突率，$\mathcal{D}_q(t)$ は 5.2 節で定義した重力波の振幅，そして $\Psi(q,t)$ は式（6.6.11）と（6.6.12）で定義したテンソル型の源泉関数を表す．

再び式（7.2.2）を用いて指数関数を球面調和関数で展開すれば，テンソル型温度ゆらぎは以下のように展開できる．

$$\left(\Delta T(\hat{n})\right)^{(T)} = \sum_{\ell m} a^T_{T,\ell m} Y_\ell^m(\hat{n}) , \tag{7.3.3}$$

ここで，

$$a^T_{T,\ell m} = T_0 \sum_{\lambda=\pm 2}\int d^3q\ \beta(\boldsymbol{q},\lambda)\, f_{\ell\, m}(\boldsymbol{q},\lambda) , \tag{7.3.4}$$

$$f_{\ell\, m}(\boldsymbol{q},\lambda) \equiv -2\pi\int d^2\hat{n}\ Y_\ell^{m*}(\hat{n})\,\hat{n}_k\hat{n}_l\, e_{kl}(\hat{q},\lambda)\sum_{LM} i^L Y_L^M(\hat{n}) Y_L^{M*}(\hat{q})$$
$$\times \int_{t_1}^{t_0} dt\ j_L\Big(q\,r(t)\Big)\, d(q,t) \tag{7.3.5}$$

で，$r(t)$ は現在時刻 t_0 で我々が観測する光が発せられた時刻 t に対応する動径座標を表す．

$$r(t) \equiv \int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')} . \tag{7.3.6}$$

まず始めに $\boldsymbol{q}$ を z 軸方向 $\hat{z}$ にとったときの $f_{\ell m}(\boldsymbol{q},\lambda)$ を計算するのが便利である．この場合 $Y_L^M(\hat{q}) = \delta_{M0}\sqrt{2L+1/4\pi}$ となる．また，式（5.2.15）と $\hat{n} = (\sin\theta\,\cos\phi, \sin\theta\,\sin\phi, \cos\theta)$ を用いれば，

$$\hat{n}_i\,\hat{n}_j\,e_{ij}(\hat{z},\pm 2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\theta\,e^{\pm 2i\phi}=4\sqrt{\frac{\pi}{15}}\,Y_2^{\pm 2}(\hat{n}) \tag{7.3.7}$$

を得る．$\hat{n}$ に渡る積分は，以下の一般公式の特殊な場合として与えられる[*2]．

$$\int d^2\hat{n}\;Y_L^M(\hat{n})\,Y_\Lambda^\mu(\hat{n})\,Y_\ell^{m*}(\hat{n})=\sqrt{\frac{(2\Lambda+1)(2\ell+1)}{4\pi(2L+1)}}\times C_{\ell\Lambda}(L,M;m,-\mu)\,C_{\ell\Lambda}(L,0;0,0)\;, \tag{7.3.8}$$

ここで，$C_{\ell\Lambda}(L,M;m,\mu)$ は量子力学で角運動量量子数 ℓ,m と Λ,μ を合成して別の角運動量量子数 L,M にするために使われる通常のクレプシュ–ゴルダン係数である．これを使えば以下の結果を得る．

$$f_{\ell m}(q\hat{z},\pm 2)=-2\sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{3}}\sum_L i^L\,C_{\ell 2}(L,0;\pm 2,\mp 2)\,C_{\ell 2}(L,0;0,0)\times\delta_{m,\pm 2}\int_{t_1}^{t_0}dt\;j_L\Big(q\,r(t)\Big)\,d(q,t)\;. \tag{7.3.9}$$

いまは $\Lambda=2$，$\mu=\pm 2$，$M=0$ の場合を扱っているので，必要なクレプシュ–ゴルダン係数は，

$$C_{\ell\,2}(\ell+2,0;0,0)=\sqrt{\frac{3(\ell+2)(\ell+1)}{2(2\ell+1)(2\ell+3)}},$$

$$C_{\ell\,2}(\ell+2,0;\pm 2,\mp 2)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\ell-1)\ell}{(2\ell+1)(2\ell+3)}},$$

$$C_{\ell\,2}(\ell,0;0,0)=-\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{(2\ell-1)(2\ell+3)}},$$

$$C_{\ell\,2}(\ell,0;\pm 2,\mp 2)=\sqrt{\frac{3(\ell-1)(\ell+2)}{2(2\ell-1)(2\ell+3)}},$$

$$C_{\ell\,2}(\ell-2,0;0,0)=\sqrt{\frac{3\ell(\ell-1)}{2(2\ell-1)(2\ell+1)}},$$

$$C_{\ell\,2}(\ell-2,0;\pm 2,\mp 2)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{(2\ell-1)(2\ell+1)}}\;,$$

$$C_{\ell\,2}(\ell\pm 1,0;0,0)=0$$

[*2] たとえば，J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons (1952) の付録 A，式（5.11）を見よ．

である．これらの結果を合わせれば，$\boldsymbol{q}$ が z 軸方向にある場合，式（7.3.5）で定義される量でゼロを除く値は以下で与えられることが導ける[*3]．

$$f_{\ell\, m}(q\hat{z}, \pm 2) = i^{\ell} \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)(\ell+2)!}{2(\ell-2)!}} \delta_{m,\pm 2} \int_{t_1}^{t_0} dt\, d(q,t) \times \left[\frac{j_{\ell+2}\Big(q\, r(t)\Big)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} + \frac{2 j_{\ell}\Big(q\, r(t)\Big)}{(2\ell-1)(2\ell+3)} + \frac{j_{\ell-2}\Big(q\, r(t)\Big)}{(2\ell-1)(2\ell+1)} \right]. \tag{7.3.10}$$

以下に示すように，この式はよく知られた漸化式，

$$j_{\ell}(\rho)/\rho = [j_{\ell-1}(\rho) + j_{\ell+1}(\rho)]/(2\ell+1)$$

を使うことで簡単化できる．まず，この漸化式を繰り返し用いて，

$$\frac{j_{\ell}(\rho)}{\rho^2} = \frac{j_{\ell-2}(\rho)}{(2\ell+1)(2\ell-1)} + \frac{2 j_{\ell}(\rho)}{(2\ell+3)(2\ell-1)} + \frac{j_{\ell+2}(\rho)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} \tag{7.3.11}$$

を導く．そしてこれを式（7.3.10）に代入すれば，以下の簡単化された式を得る．

$$f_{\ell\, m}(q\hat{z}, \pm 2) = i^{\ell} \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)(\ell+2)!}{2(\ell-2)!}} \delta_{m,\pm 2} \int_{t_1}^{t_0} dt\, d(q,t)\, \frac{j_{\ell}\Big(qr(t)\Big)}{q^2 r^2(t)} . \tag{7.3.12}$$

ここで，z 軸を任意の方向 $\hat{q}$ に移す標準的な回転 $S(\hat{q})$ を用いて，式（7.3.5）で定義される振幅を一般的な方向 $\boldsymbol{q}$ に対して計算しておく．（$S(\hat{q})$ の公式は 7.4 節で与えるが，ここでは具体的な形は必要ではない．）回転によって $f_{\ell\, m}$ は以下のように変換される．

$$f_{\ell\, m}(\boldsymbol{q}, \lambda) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} D^{(\ell)}_{m,m'}\Big(S(\hat{q})\Big)\, f_{\ell\, m'}(q\hat{z}, \lambda) . \tag{7.3.13}$$

これを式（7.3.4）に代入すれば，球面調和展開の係数として，

$$a^{T}_{T,\ell m} = T_0 i^{\ell} \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)(\ell+2)!}{2(\ell-2)!}} \sum_{\pm} \int d^3q\; \beta(\boldsymbol{q}, \pm 2)\, D^{(\ell)}_{m,\pm 2}\Big(S(\hat{q})\Big) \times \int_{t_1}^{t_0} dt\, d(q,t)\, \frac{j_{\ell}\Big(qr(t)\Big)}{q^2 r^2(t)} \tag{7.3.14}$$

[*3] これは，L.F. Abbott, M. B. Wise, *Nucl. Phys. B* **244**, 541 (1984) と A. A. Starobinsky, *Sov. Astron. Lett.* **11**(3), 133 (1985) によって最初に導かれた結果と基本的に同じものであるが，任意の重力波の振幅 $D_q(t)$ に一般化してあり，さらに式（7.3.2）で Ψ に比例する補正項を取り入れてある．

を得る．

これで，以下の式で定義する温度相関関数の多重極展開係数を計算する準備が整った．

$$\langle a^T_{T,\ell m}\, a^{T*}_{T,\ell' m'}\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}C^T_{TT,\ell}\,. \tag{7.3.15}$$

まず，確率変数 $\beta(\boldsymbol{q},\lambda)$ は以下のように規格化されていることを思い出そう．

$$\langle \beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,\beta^*(\boldsymbol{q}',\lambda')\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\,. \tag{7.3.16}$$

$C^T_{TT,\ell}$ を計算するためには以下の角度積分を行わなくてはいけない．

$$\int d^2\hat{q}\; D^{(\ell)}_{m,\pm 2}\Big(S(\hat{q})\Big)\, D^{(\ell')}_{m',\pm 2}\Big(S(\hat{q})\Big)^*\,.$$

この行列がすべての回転行列と交換することは容易に示せるので，この行列は $\delta_{mm'}\delta_{\ell\ell'}$ に比例し，その係数は m によらないはずである．係数を計算するには，$m=m'$，$\ell=\ell'$ とした後に m について $-\ell$ から $+\ell$ まで和をとれば良い．行列 $D^{(\ell)}_{m,n}\Big(S(\hat{q})\Big)$ のユニタリー性からこれは $\int d^2\hat{q} = 4\pi$ に等しくなければならないから，以下の結果が導かれる．

$$\int d^2\hat{q}\; D^{(\ell)}_{m,\pm 2}\Big(S(\hat{q})\Big)\, D^{(\ell')}_{m',\pm 2}\Big(S(\hat{q})\Big)^* = \frac{4\pi}{2\ell+1}\delta_{mm'}\delta_{\ell\ell'}\,. \tag{7.3.17}$$

この結果と式（7.3.14），（7.3.16）を式（7.3.15）に用いれば，式（7.3.14）のヘリシティに渡る和は単に 2 となることがわかるから，以下の結果を得る[*4]．

$$C^T_{TT,\ell} = \frac{4\pi^2(\ell+2)!T_0^2}{(\ell-2)!}\int_0^\infty \frac{dq}{q^2}\left|\int_{t_1}^{t_0} dt\; d(q,t)\,\frac{j_\ell\Big(qr(t)\Big)}{r^2(t)}\right|^2\,. \tag{7.3.18}$$

（この公式は，$a^T_{T,\ell m}$ を計算せずに温度相関関数を直接計算した方がより簡単に導けるが，$a^T_{T,\ell m}$ は 7.4 節で偏光と温度異方性の相関を計算する際に必要となる．）

あとは $\mathcal{D}_q(t)$ と源泉関数 $\Psi(q,t)$ を計算するだけでよい．6.6 節で見たように，もし重力波の振幅 $\mathcal{D}_q(t)$ が q と t の代わりに $\kappa \equiv q\sqrt{2}/H_{\rm EQ}a_{\rm EQ}$ と $y \equiv a(t)/a_{\rm EQ}$ の関数で書けていれば（下付き添字の EQ は放射と物質の密度が等しい時刻を表す），全体にかかる因子 $\mathcal{D}_q^o$（これは地平線の外での $\mathcal{D}_q(t)$ の値に等しい）を除いて振幅 $\mathcal{D}_q(t)$ はその他の宇宙論パラメータに依存しない．重力波の振幅を次のよ

*4 この結果は異なる手法で，M. Zaldarriaga, U. Seljak, *Phys. Rev. D* **55**, 1830 (1997) [astro-ph/9609170] によって導かれた．彼らの論文中の（定義されていない）重力波の振幅 h を $\mathcal{D}_q(t)/2$ とし，その確率変数を $P_h = 1$ となるように規格化すれば，彼らの結果は式（7.3.18）と一致する．

うに書こう.

$$\mathcal{D}_q(t) = \mathcal{D}_q^o\, D(\kappa, y)\,. \tag{7.3.19}$$

地平線の外側の重力波のスペクトルがスケール不変であれば，量 $q^3|\mathcal{D}_q^o|^2$ は波数によらず一定である．しかし，より一般的な可能性も考慮するため，この量が q の n_T 乗に比例していると書くのが便利である．

$$q^3|\mathcal{D}_q^o|^2 = N_T^2 \left(\frac{q/a_0}{k_{\mathcal{D}}}\right)^{n_T}\,, \tag{7.3.20}$$

ここで $k_{\mathcal{D}}$ は任意の波数で，$k_{\mathcal{D}} = 0.002\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ がよく使われる．N_T はスカラー型摂動の大きさを記述する N に類似した定数である．テンソル型摂動とスカラー型摂動の比 r は慣例的に $r \equiv 4|N_T|^2/|N|^2$ と定義される．また，真空のエネルギーが重要となる時期までは $dt = \sqrt{2}y\,dy/H_{\mathrm{EQ}}\sqrt{1+y}$ なので，

$$q\int \frac{dt}{a(t)} = \kappa \int \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = 2\kappa\sqrt{1+y}$$

と書ける．すると波動方程式（6.6.58）は，

$$\begin{aligned}(1+y)\frac{\partial^2 D(\kappa,y)}{\partial y^2} &+ \left(\frac{1}{2} + \frac{2(1+y)}{y}\right)\frac{\partial D(\kappa,y)}{\partial y} + \kappa^2\, D(\kappa,y) \\ &= -\frac{24 f_\nu}{y^2}\int_0^y K\Big(2\kappa\,[\sqrt{1+y} - \sqrt{1+y'}]\Big)\,\frac{\partial D(\kappa,y')}{\partial y'}\,dy'\end{aligned} \tag{7.3.21}$$

となる．ここで $f_\nu \equiv \bar{\rho}_\nu/\bar{\rho}_R = 0.4052$，$K(v) \equiv j_2(v)/v^2$ で，波動方程式の初期条件は $D(\kappa, 0) = 1$ とする．このようにして $D(\kappa, y)$ が求まれば，CMBfast や CAMB のようなコンピュータプログラムを用いて連立ボルツマン方程式をある最大の ℓ まで数値的に解き，振幅 $\Delta_{T,\ell}^{(T)}$ と $\Delta_{P,\ell}^{(T)}$ を求め，そして式（6.6.21）に代入することで源泉関数 $\Psi(q,t)$ を計算できる．しかし，積分方程式（6.6.27）を使って $\Psi(q,t)$ を計算するという別のやり方もある[*5]．

$$\begin{aligned}\Psi(q,t) = \frac{3}{2}\int_{t_1}^t dt' \exp\left[-\int_{t'}^t \omega_c(t'')\,dt''\right] \\ \times\left[-2\dot{\mathcal{D}}_q(t')K\left(q\int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')}\right) + \omega_c(t')F\left(q\int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')}\right)\Psi(q,t')\right],\end{aligned} \tag{7.3.22}$$

[*5] S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **74**, 063517 (2006) [astro-ph/0607076]; D. Baskaran, L. P. Grishchuk, A. G. Polnarev, *Phys. Rev. D* **74**, 083005 (2006) [gr-qc/0605100].

ここで $F(v) \equiv j_0(v) - 2j_1(v)/v + 2j_2(v)/v^2$ である．この式を書き換えるため，光学的厚さの微分が次の形，

$$d\tau(y) \equiv \omega_c\,dt = n_e\sigma_T c\,dt = \frac{A}{y^2\sqrt{1+y}}X(y)\,dy$$

で書けることを使おう．$X(y)$ は 2.3 節で計算した水素原子の電離度で，y に加えて $\Omega_B h^2$ と $\Omega_M h^2$ にも依存する．A は以下で定義される無次元定数である．

$$A \equiv 0.76\frac{3\,\Omega_B\,\Omega_M\,H_0\,\sigma_T\,c}{8\pi G m_p \Omega_R^{3/2}} = 1.9646\times 10^5\,(\Omega_M h^2)\,(\Omega_B h^2)\,.$$

（ここで，全バリオン質量のうち 76%が水素原子だと仮定した．いま考えている時期では残りの元素は電離していない.）源泉関数は次のように書ける．

$$\Psi(q,t) = \mathcal{D}_q^o\,\mathcal{S}(\kappa,y). \tag{7.3.23}$$

関数 $\mathcal{S}$ は κ と y に加えて $\Omega_M h^2$ と $\Omega_B h^2$ にも依存し，以下の積分方程式に従う．

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\kappa,y) = \frac{3}{2}\int_0^y dy'\ \exp\left[-\int_{y'}^y \frac{d\tau(y'')}{dy''}dy''\right] \\ \times\left[-2\frac{\partial D(\kappa,y')}{\partial y'}K\left(2\kappa[\sqrt{1+y}-\sqrt{1+y'}]\right)\right. \\ \left. + \frac{d\tau(y')}{dy'}F\left(2\kappa[\sqrt{1+y}-\sqrt{1+y'}]\right)\mathcal{S}(\kappa,y')\right].\end{aligned} \tag{7.3.24}$$

式（7.3.18）–（7.3.24）から計算した多重極展開係数を図 7.3（154 ページ）の実線で示す．図 7.3 の破線は，$\ell \gg 1$ のときの簡単化された多重極展開係数の表式から計算した結果を示す．この表式は式（7.3.18）の球ベッセル関数に近似式（7.2.14）を用いたもので，以下で与えられる[*6]．

$$\begin{aligned}\ell(\ell+1)C^T_{TT,\ell} \longrightarrow 4\pi^2 T_0^2\int_0^\infty q^2\,dq \\ \times\left|\int_{r(t)>\ell/q} dt\,d(q,t)\left\{\frac{\cos^3 b}{\sqrt{\sin b}}\cos\Big[\ell(\tan b - b) - \pi/4\Big]\right\}_{\cos b = \ell/q\,r(t)}\right|^2.\end{aligned} \tag{7.3.25}$$

源泉関数 $\Psi(q,t)$ は，ある ℓ で止めたボルツマン方程式（6.6.18），（6.6.19）の解を式（6.6.21）に代入して求めるのではなく，積分方程式（7.3.22）を使って計算し

---

*6 R. Flauger, S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **75**, 123505 (2007) [astro-ph/0703179].

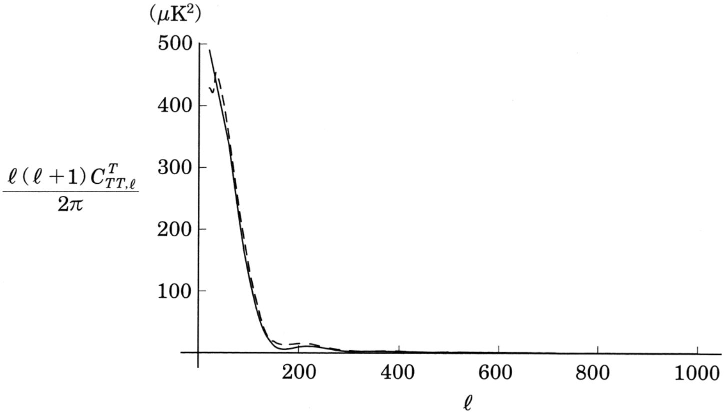


図 7.3　テンソル型摂動による温度–温度相関関数の多重極展開係数 $\ell(\ell+1)C^T_{TT,\ell}/2\pi$ を ℓ の関数として示す．脚注 6 の文献より抜粋．実線は厳密な式（7.3.18）を用いた結果を表し，破線は ℓ が大きいという近似を用いた式（7.3.25）を用いた結果を表す．これらの計算に使われた宇宙論パラメータは本文に述べてある．

た．実線，破線の両方とも，現在の観測と無矛盾な宇宙モデルを用いて計算している．仮定したのは $\Omega_K = 0$，時間一定の真空エネルギー，$\Omega_B = 0.0432$，$\Omega_M = 0.257$，$\Omega_\Lambda = 0.743$，$h = 0.72$，$T_0 = 2.725$ K である．光子の衝突頻度は Recfast と呼ばれる再結合計算プログラム[*7]を用い，ヘリウムの存在量を $Y = 0.24$ として計算した．式（7.3.20）のパラメータに対しては $N_T^2 = 4.68 \times 10^{-11}$（これは $r = 1$，および 7.2 節で与えた WMAP 衛星 3 年目の結果から得られるスカラー型摂動の大きさ N にほぼ対応する）と $n_T = 0$ を用いた．この計算では宇宙の再電離を無視した．異なる r の値，あるいはゼロでない電離プラズマの光学的厚さ τ を考慮するには，$\ell > 10$ の領域では単に図 7.3 の多重極展開係数に $r\exp(-2\tau)$ をかければ良い．(時刻 t_L で宇宙が熱平衡状態（$\omega_c(t) \gg H(t)$，$\Psi(q,t) = 0$）から完全な透明状態（$\omega_c(t) = 0$）に急激に遷移したという近似では，式（7.3.25）は，

$$\ell(\ell+1)C^T_{TT,\ell} \longrightarrow 4\pi^2 T_0^2 \int_0^\infty q^2\, dq$$

[*7] S. Seager, D. D. Sasselov, D. Scott, *Astrophys. J.* **523**, L1 (1999) [astro-ph/9909275]; *Astrophys. J. Suppl.* **128**, 407 (2000) [astro-ph/9912182].

$$\times \left| \int_{r_L > r(t) > \ell/q} dt\, \dot{\mathcal{D}}_q(t) \left\{ \frac{\cos^3 b}{\sqrt{\sin b}} \cos\left[\ell(\tan b - b) - \pi/4\right] \right\}_{\cos b = \ell/q\, r(t)} \right|^2 \tag{7.3.26}$$

となる．しかし，$\tan b - b$ の値の広がりのため，スカラー型温度ゆらぎで式（7.2.16）から式（7.2.17）へ行く際に行ったような単純化はここではできない.）

図 7.3 を見ればわかるように，$C^T_{TT,\ell}$ の ℓ 依存性と，7.2 節で計算したスカラー型温度ゆらぎの ℓ 依存性はまったく異なっている．一方，既存の観測データはスカラー型摂動のみを考慮した理論予言とよく合っているので，これからテンソル型摂動の大きさに上限をつけられる.（10 章で学ぶインフレーション理論から示唆されるように）$\mathcal{D}^o_q$ と $\mathcal{R}^o_q$ がほぼ同じ q 依存性を持つと仮定することで，WMAP チームは 3 年間の観測データから 95%の信頼度で上限値 $r < 0.55$ を得た[*8]（ここで $r \equiv 4|\mathcal{D}^o_q|^2/|\mathcal{R}^o_q|^2$ ）．この上限値は，偏光の測定からではなく主に（信号雑音比がずっと大きい）温度ゆらぎの測定から得られたものである．偏光の測定のみから得られた r の上限値は $r < 2.2$ になる.

厳密に言えば，この上限値 $r < 0.55$ は偏光の測定にも依存している．というのは，偏光の測定は再電離されたプラズマの光学的厚さを決めることによる．この情報はスカラー型原始ゆらぎの波数依存性に対応する「傾き」パラメータ n_S の値を決めるのに必要で，その n_S は観測された $C_{TT,\ell}$ からスカラー型摂動の寄与を差し引いてテンソル型摂動の寄与の上限値を求めるのに必要となる．しかし，この差し引きができる精度はコスミック・バリアンスによって限られるため，長い目で見れば，テンソル型摂動に対する最も良い上限値，あるいはテンソル型摂動の検出は，偏光の測定から直接得られることになる．これが次節のトピックとなる.

7.4 偏光

宇宙マイクロ波背景放射の観測により，さまざまな方向の放射強度だけでなく，偏光の分布も明らかになる．再結合の時期，あるいは後の第一世代の星の紫外光による宇宙再電離の時期において，マイクロ波背景放射の光子は電子との散乱を通じて偏光することが予想される[*1]．偏光の測定は，再電離が起こった時期を知り，原始ゆらぎの大きさと再電離の効果を区別する上で重要である．将来的には，インフレーション期に生成された重力波の効果を明らかにするため，さらに重要

*8 L. Page *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 335 (2007) [astro-ph/0603450].

性が増すことになるだろう.

6.1 節では光子の放射強度の摂動を表す無次元行列 $J_{ij}(\boldsymbol{x}, \hat{p}, t)$ を導入した（定義は式（6.1.13）で与えられる）. これはエルミート行列で，以下の意味で横波的である.

$$\hat{p}^i J_{ij}(\boldsymbol{x}, \hat{p}, t) = \hat{p}^j J_{ij}(\boldsymbol{x}, \hat{p}, t) = 0 \,, \tag{7.4.1}$$

また，7.1 節ですでに述べたように，この行列の $\boldsymbol{x} = 0$，$t = t_0$ におけるトレースは，現在時刻で地球から見て $\hat{n}$ の方向からやって来る光子の温度ゆらぎと以下のように関係している.

$$\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} = \frac{1}{4} J_{ii}(0, -\hat{n}, t_0) \,. \tag{7.4.2}$$

視線方向 $\hat{n} = -\hat{p}$ を z 軸方向 $\hat{z}$ にとれば，これらの性質を満たす任意の行列は以下の形に書ける.

$$J_{ij}(0, -\hat{z}, t_0) = \frac{2}{T_0} \begin{pmatrix} \Delta T(\hat{z}) + Q(\hat{z}) & U(\hat{z}) - iV(\hat{z}) & 0 \\ U(\hat{z}) + iV(\hat{z}) & \Delta T(\hat{z}) - Q(\hat{z}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{7.4.3}$$

ここで，Q，U，V は**ストークスパラメータ**として知られ，方向に関する任意の実関数で温度の次元を持つ[*2]. この場合，ストークスパラメータは行列 J_{ij} で書ける.

$$Q(\hat{z}) \pm iU(\hat{z}) = \frac{T_0}{2} e_{\pm\, i}(\hat{z})\, e_{\pm\, j}(\hat{z})\, J_{ij}(0, -\hat{z}, t_0) \,, \tag{7.4.4}$$

$$V(\hat{z}) = \frac{T_0}{4} e_{-\, i}(\hat{z})\, e_{+\, j}(\hat{z}) \Big(J_{ij}(0, -\hat{z}, t_0) - J_{ji}(0, -\hat{z}, t_0) \Big) \,, \tag{7.4.5}$$

ここで，$e_\pm(\hat{z}) = (1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$ は z 軸方向から到来する光子を記述する偏光ベクトルを表す. 任意の方向 $\hat{n}$ から到来する光子を記述するストークスパラメータは

[*1]（155 ページ）M. J. Rees, *Astrophys. J.* **153**, L1 (1968). 2 点間の角度が小さいところでの偏光の相関は，宇宙マイクロ波背景放射の偏光に関する初期の論文で考慮されている. たとえば，A. G. Polnarev, *Sov. Astron.* **29**, 607 (1985); R. Crittenden, R. L. Davis, P. J. Steinhardt, *Astrophys. J. Lett.* **417**, L13 (1993); D. Coulson, R. Crittenden, N. Turok, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2390 (1994); A. Kosowsky, *Ann. Phys. (N.Y.)* **246**, 49 (1996) を見よ. 全天に渡る解析は，U. Seljak, M. Zaldarriaga, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2054 (1997) [astro-ph/9609169]; M. Zaldarriaga, U. Seljak, *Phys. Rev. D* **55**, 1830 (1997) [astro-ph/9609170]; M. Kamionkowski, A. Kosowsky, A. Stebbins, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2058 (1997) [astro-ph/9609132]; *Phys. Rev. D.* **55**, 7368 (1997) [astro-ph/9611125] によって与えられた.

[*2] 定数因子をかけて，温度ではなく強度の次元を持つようにストークスパラメータを定義することもある.

以下のように定義できる.

$$Q(\hat{n}) \pm iU(\hat{n}) \equiv \frac{T_0}{2} e_{\pm\, i}(\hat{n})\, e_{\pm\, j}(\hat{n})\, J_{ij}(0, -\hat{n}, t_0)\ , \tag{7.4.6}$$

$$V(\hat{n}) \equiv \frac{T_0}{4} e_{-\, i}(\hat{n})\, e_{+\, j}(\hat{n}) \Big(J_{ij}(0, -\hat{n}, t_0) - J_{ji}(0, -\hat{n}, t_0) \Big)\ , \tag{7.4.7}$$

$e_{\pm}(\hat{n})$ は任意の方向から到来する光子を記述する偏光ベクトルを表す. 視線方向 $\hat{n}$ を極角 θ と方位角 ϕ を用いて,

$$\hat{n} = (\sin\theta\, \cos\phi,\ \sin\theta\, \sin\phi,\ \cos\theta) \tag{7.4.8}$$

のように書けば, 偏光ベクトルを,

$$\boldsymbol{e}_{\pm}(\hat{n}) = (\hat{\theta} \pm i\hat{\phi})/\sqrt{2} \tag{7.4.9}$$

と書くことができる. $\hat{\theta}$ と $\hat{\phi}$ は $\hat{n}$ に垂直な平面上の直交する単位ベクトルで, ベクトルの方向はそれぞれ θ と ϕ が増加する方向と一致する.

$$\hat{\theta} \equiv (\cos\theta\, \cos\phi,\ \cos\theta \sin\phi,\ -\sin\theta)\ , \quad \hat{\phi} \equiv (-\sin\phi,\ \cos\phi\ , 0)\ . \tag{7.4.10}$$

マイクロ波背景放射の観測で実際に測定されるのはストークスパラメータである. 非相対論的電子による光の散乱では円偏光は生成されないので, マイクロ波背景放射の光子はすべて直線偏光していると期待される. すると J_{ij} は実数で, $V = 0$ になる. この場合, 強度の摂動 $e^i e^j J_{ij}$ は $\hat{\theta}\cos\xi + \hat{\phi}\sin\xi$ の方向 (ここで $\tan 2\xi = U/Q$) の実偏光ベクトル $\boldsymbol{e}$ に対して最大値 $2(\Delta T + \sqrt{U^2 + Q^2})/T_0$ を持つ. これと垂直な向きの偏光ベクトルに対しては, $e^i e^j J_{ij}$ は最小値 $2(\Delta T - \sqrt{U^2 + Q^2})/T_0$ を持ち, 全強度摂動として $4\Delta T/T_0$ が得られる. これは, 光子のエネルギー密度が T^4 に比例することからも要請される結果である.

ここで, 1 つ厄介なことがある. 上記のようにストークスパラメータを定義したため, ストークスパラメータは回転変換に対して不変ではない. つまり, 3 次元座標系での任意の回転 $x_i \to x'_i = R_{ij} x_j$ に対し, $Q'(\hat{n}') = Q(\hat{n})$ や $U'(\hat{n}') = U(\hat{n})$ とは**ならない**. これは, 偏光ベクトルが 3 元ベクトルではないことによる. まず,

$$\boldsymbol{e}_{\pm\, i}(\hat{n}) = S_{ij}(\hat{n}) \boldsymbol{e}_{\pm\, j}(\hat{z}) \tag{7.4.11}$$

が成り立ち, $S_{ij}(\hat{n})$ は z 軸を $\hat{n}$ の方向に移す標準的な回転行列を表す. この行列は, $\hat{n} = (\sin\theta\, \cos\phi, \sin\theta\, \sin\phi, \cos\theta)$ と書けば,

$$S_{ij}(\hat{n}) \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\phi & \sin\theta\sin\phi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{7.4.12}$$

で与えられる．ここで，再び $\boldsymbol{e}_\pm(\hat{z}) = (1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$ を表す．すると，任意の回転 R に対し，以下のような式が書ける．

$$\boldsymbol{e}_{\pm\, i}(R\hat{n}) \equiv S_{ij}(R\hat{n})\boldsymbol{e}_{\pm\, j}(\hat{z}) = \Big[R\,S(\hat{n})\Big]_{ik}\Big[S^{-1}(\hat{n})R^{-1}S(R\hat{n})\Big]_{kj}\boldsymbol{e}_{\pm\, j}(\hat{z})\,.$$

$S(R\hat{n})$ は z 軸を $R\hat{n}$ の方向に移し，R^{-1} はこれを $\hat{n}$ の方向に移し，そして $S^{-1}(\hat{n})$ はこれを z 軸に戻すので，$S^{-1}(\hat{n})R^{-1}S(R\hat{n})$ は z 軸をそのままにし，z 軸周りにある角度 $\psi(R,\hat{n})$ だけ回転させる行列である．これを $\boldsymbol{e}_\pm(\hat{z})$ に作用させれば因子 $e^{\pm i\psi}$ が出るから，以下の結果が得られる．

$$\boldsymbol{e}_{\pm\, i}(R\hat{n}) = e^{\pm i\psi(R,\hat{n})}R_{ij}\boldsymbol{e}_{\pm\, j}(\hat{n})\,. \tag{7.4.13}$$

一方，行列 J_{ij} は通常の 3 元テンソルである．なぜなら，任意の回転 R によって J_{ij} は J'_{ij} に変換され，

$$J'_{ij}(R\hat{n}) = R_{ik}R_{jl}J_{kl}(\hat{n})$$

となるからである．すると $R^TR = 1$ より，回転 R によって式（7.4.6）のストークスパラメータは $Q \to Q'$，$U \to U'$ と変換され，

$$Q'(\hat{n}') \pm iU'(\hat{n}') = e^{\pm 2i\psi(R,\hat{n})}\left[Q(\hat{n}) \pm iU(\hat{n})\right] \tag{7.4.14}$$

であることが導ける．このため，温度ゆらぎのようなスカラー量に対して行うようにストークスパラメータを通常の球面調和関数で展開すると，その展開係数の回転変換は通常の回転群の表現に従わなくなってしまう．そこで，$\hat{n}$ の方向に観測されるストークスパラメータ $Q(\hat{n})$，$U(\hat{n})$ を，ストークスパラメータと同じ偏光ベクトル依存性を持つ関数[*3] $\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n})$ で展開することにしよう．

$$Q(\hat{n}) + iU(\hat{n}) = \sum_{\ell=2}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{P,\ell m}\,\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n})\,, \tag{7.4.15}$$

[*3] この関数は，重力波の研究のため E. T. Newman, R. Penrose, *J. Math. Phys.* **7**, 863 (1966) によって導入された関数の特殊な場合に相当する．（マイクロ波背景放射の偏光に関する最近の論文でも使われている）彼らの記号表記では，関数 $\mathcal{Y}_\ell^m$ は ${}_2Y_{\ell,m}$ と書かれる．

$$\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) \equiv 2\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\, e_{+\,i}(\hat{n})\, e_{+\,j}(\hat{n})\, \tilde{\nabla}_i\, \tilde{\nabla}_j\, Y_\ell^m(\hat{n})\ , \tag{7.4.16}$$

ここで $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ は空間微分演算子の角度部分を表す.

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \equiv \hat{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\ . \tag{7.4.17}$$

展開係数 $a_{P,\ell m}$ の下付き添字「P」は「偏光（Polarization）」を表し，温度ゆらぎの展開式（2.6.1）[訳注 1]の係数と区別するために付与した．本章では温度ゆらぎの展開係数は $a_{T,\ell m}$ と書くことにする．ある回転 R に対して通常の球面調和関数は以下のように変換する.

$$Y_\ell^m(R\hat{n}) = \sum_{m'} D^{(\ell)}_{m'm}(R^{-1})\, Y_\ell^{m'}(\hat{n})\ , \tag{7.4.18}$$

ここで，$D^{(\ell)}(R)$ は階数 $2\ell+1$ のユニタリーな既約行列で，$D^{(\ell)}(R_1)D^{(\ell)}(R_2) = D^{(\ell)}(R_1R_2)$ を満たすという意味で回転群の表現である[*4]．式（7.4.13），(7.4.16)，(7.4.18) より以下の結果を導ける.

$$\mathcal{Y}_\ell^m(R\hat{n}) = e^{2i\psi(R,\hat{n})} \sum_{m'} D^{(\ell)}_{m'm}(R^{-1})\, \mathcal{Y}_\ell^{m'}(\hat{n})\ , \tag{7.4.19}$$

$$\mathcal{Y}_\ell^{m*}(R\hat{n}) = e^{-2i\psi(R,\hat{n})} \sum_{m'} D^{(\ell)}_{mm'}(R)\, \mathcal{Y}_\ell^{m'}(\hat{n})^*\ . \tag{7.4.20}$$

この結果から，$\mathcal{Y}_\ell^m$ とその複素共役はそれぞれスピン 2 とスピン -2 の球面調和関数として知られている．これらの変換則より，通常の球面調和関数の場合と同じように $\int d\Omega\, \mathcal{Y}_\ell^{m\,*}\mathcal{Y}_{\ell'}^{m'}$ は $\ell = \ell'$，$m = m'$ のときを除いてゼロになり，$\ell = \ell'$，$m = m'$ のときには m によらないことが導ける．式（7.4.16）の因子

訳注 1　$\Delta T(\hat{n}) \equiv T(\hat{n}) - T_0 = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_\ell^m(\hat{n}),\ T_0 \equiv \frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{n}\ T(\hat{n})$.

*4　たとえば，A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press (1957) の 4 章; M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, John Wiley & Sons (1957) の 4 章; L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics–Non Relativistic Theory*, 3rd ed., Pergamon Press (1977) の第 58 節; Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific (1985) の 7.3 節と 8.1 節を見よ．ただし，我々が用いる回転行列は $Y_\ell^m(\hat{n})^* = Y_\ell^{-m}(\hat{n})$ となるように位相を定めた球面調和関数で表現される．これに対応する角運動量行列 $\boldsymbol{J}^{(\ell)}$ は，$J_1^{(\ell)} \pm iJ_2^{(\ell)}$ が正の実数となる通常のものとは異なる．球面調和関数の位相を $Y_\ell^m(\hat{n})^* = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\hat{n})$ となるように変えれば回転行列は $J_1^{(\ell)} \pm iJ_2^{(\ell)}$ が正の実数となる通常の角運動量行列で生成できるが，そうすると E モードと B モード偏光の部分波の振幅の定義式（7.4.25）が余計な位相の因子を含み，Zaldarriaga, Seljak，脚注 1（の文献）の定義と異なってしまう.

$2\sqrt{(\ell-2)!/(\ell+2)!}$ は，これらの関数が通常の球面調和関数 Y_ℓ^m と同様に規格直交性条件，

$$\int d\Omega\, \mathcal{Y}_\ell^{m\,*} \mathcal{Y}_{\ell'}^{m'} = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{7.4.21}$$

を満たすように挿入されたものである．式（7.4.16）を直接計算して，以下の表式を得る[*5]．

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) &= \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\csc\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2 - \cot\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\csc\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]Y_\ell^m(\hat{n}) \\
&= e^{im\phi}\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}\frac{2\ell+1}{4\pi}}\Bigg[-\ell(\ell+1)P_\ell^{|m|}(\mu) \\
&\quad + \frac{2(m+\mu)(m-\ell\mu)}{1-\mu^2}P_\ell^{|m|}(\mu) + \frac{2(\ell+|m|)(m+\mu)}{1-\mu^2}P_{\ell-1}^{|m|}(\mu)\Big)\Bigg] \\
&= e^{im\phi}\left[\frac{(\ell+m)!(\ell-m)!}{(\ell+2)!(\ell-2)!}\frac{2\ell+1}{4\pi}\right]^{1/2}\sin^{2\ell}(\theta/2)(-1)^{(m-|m|)/2} \\
&\quad \times\sum_r \begin{pmatrix}\ell-2\\ r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell+2\\ r+2-m\end{pmatrix}(-1)^{\ell-r+m}\cot^{2r+2-m}(\theta/2)\,,
\end{aligned} \tag{7.4.22}$$

ここで $\mu\equiv\cos\theta$ で，$P_\ell^m(\mu)$ は通常のルジャンドル陪関数である．(本書で必要となるのは式（7.4.22）の最初の表式のみ.）通常の球面調和関数とは異なり，$\mathcal{Y}_\ell^m$ は単純な実数条件を満足しない．代わりに，式（7.4.15）の複素共役をとれば，

$$Q(\hat{n}) - iU(\hat{n}) = \sum_{\ell=2}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{P,\ell m}^*\,\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n})^* \tag{7.4.23}$$

が得られるから，$\mathcal{Y}_\ell^m$ の複素共役として，

$$\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n})^* = 2\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\,e_{-\,i}(\hat{n})\,e_{-\,j}(\hat{n})\,\tilde{\nabla}_i\,\tilde{\nabla}_j\,Y_\ell^{-m}(\hat{n}) \tag{7.4.24}$$

が導かれる．ここで，球面調和関数の実数条件 $Y_\ell^{m\,*}=Y_\ell^{-m}$ を用いた．

$\mathcal{Y}_\ell^m$ が単純な実数条件を満たさないので，$a_{P,\ell m}$ もまた単純な実数条件を満たさない．代わりに，以下の係数を定義しよう．

[*5] 最後の表式は Zaldarriaga, Seljak，脚注 1（の文献）より抜粋したものだが，最初の表式は本書の定義式（7.4.16）から導いたもので，これは彼らのスピン 2 球面調和関数の定義式でもある．

$$a_{E,\ell m} \equiv -\left(a_{P,\ell m} + a^*_{P,\ell\,-m}\right)\Big/2\,, \qquad a_{B,\ell m} \equiv i\left(a_{P,\ell m} - a^*_{P,\ell\,-m}\right)\Big/2\,. \tag{7.4.25}$$

この分解は便利である．というのは，これから見るように，空間反転に対してこれらの係数がある性質を持つことによる．3 軸すべてを反転させると $\theta \to \pi - \theta$ かつ $\phi \to \phi \pm \pi$ だから，$\hat{\theta} \to \hat{\theta}$，$\hat{\phi} \to -\hat{\phi}$ となる．すると，空間反転によって式（7.4.9）で与えられる偏光ベクトルのヘリシティが入れ替わることが導ける．つまり，$\boldsymbol{e}_\pm(-\hat{n}) = \boldsymbol{e}_\mp(\hat{n})$ となる．したがって，式（7.4.6）から空間反転によってストークスパラメータは，$Q(\hat{n}) \to Q(-\hat{n})$，$U(\hat{n}) \to -U(-\hat{n})$，$V(\hat{n}) \to -V(-\hat{n})$ と変換される（空間反転に関する Q と U のこれらの性質は，後に式（7.4.32），(7.4.41）で与えられる確率変数 $\alpha(\boldsymbol{q})$，$\beta(\boldsymbol{q},\lambda)$ をその空間反転変換 $\alpha(-\boldsymbol{q})$，$\beta(-\boldsymbol{q},-\lambda)$ にそれぞれ置き換えることでも得られることを確認する）．したがって，空間反転が部分波の振幅 $a_{P,\ell m}$ を $a'_{P,\ell m}$ に移すとすれば，式（7.4.15）の空間反転は，

$$\begin{aligned}
&Q(-\hat{n}) - iU(-\hat{n}) \\
&\quad = 2\sum_{\ell=2}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a'_{P,\ell m}\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\, e_{+\,i}(\hat{n})\, e_{+\,j}(\hat{n})\,\tilde{\nabla}_i\,\tilde{\nabla}_j\, Y_\ell^m(\hat{n}) \\
&\quad = 2\sum_{\ell=2}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a'_{P,\ell m}\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\, e_{-\,i}(-\hat{n})\, e_{-\,j}(-\hat{n})\,\tilde{\nabla}_i\,\tilde{\nabla}_j\, Y_\ell^m(-\hat{n})(-1)^\ell \\
&\quad = \sum_{\ell=2}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a'_{P,\ell m}\,\mathcal{Y}_\ell^{-m}(-\hat{n})^*(-1)^\ell
\end{aligned}$$

と書けることが示せる．因子 $(-1)^\ell$ は球面調和関数の鏡像変換性 $Y_\ell^m(-\hat{n}) \to (-1)^\ell Y_\ell^m(\hat{n})$ に起因する．この結果を式（7.4.23）と比べれば，空間反転は $a_{P,\ell m}$ を $a'_{P,\ell m} = (-1)^\ell a^*_{P,\ell\,-m}$ に移すことがわかる．よって，空間反転は $a_{E,\ell m}$（および対応する温度ゆらぎの係数 $a_{T,\ell m}$）の符号を $(-1)^\ell$ だけ変え，$a_{B,\ell m}$ の符号を $-(-1)^\ell$ だけ変えると結論できる．

これらの係数は確率変数で，おそらく空間反転に対して不変な確率分布関数に従うから，(空間反転に対して同じ変換性を持つ）温度ゆらぎと E モード偏光の間には相関があっても，(空間反転に対して異なる変換性を持つ）B モードと E モード偏光，あるいは温度ゆらぎと B モード偏光の間には相関がない．確率分布関数の回転不変性も考慮すれば，平均がゼロでないペアの組み合わせは以下のも

のに限られる[*6].

$$\langle a^*_{T,\,\ell\,m}\, a_{T,\,\ell'\,m'}\rangle = C_{TT,\,\ell}\,\delta_{\ell,\ell'}\,\delta_{m,m'}\ , \tag{7.4.26}$$

$$\langle a^*_{T,\,\ell\,m}\, a_{E,\,\ell'\,m'}\rangle = C_{TE,\,\ell}\,\delta_{\ell,\ell'}\,\delta_{m,m'}\ , \tag{7.4.27}$$

$$\langle a^*_{E,\,\ell\,m}\, a_{E,\,\ell'\,m'}\rangle = C_{EE,\,\ell}\,\delta_{\ell,\ell'}\,\delta_{m,m'}\ , \tag{7.4.28}$$

$$\langle a^*_{B,\,\ell\,m}\, a_{B,\,\ell'\,m'}\rangle = C_{BB,\,\ell}\,\delta_{\ell,\ell'}\,\delta_{m,m'}\ . \tag{7.4.29}$$

すべての $C_{XY,\,\ell}$ は同じ次元（温度の 2 乗）を持つ．定義より，a_T，a_E，a_B はすべて以下の実数条件，

$$a^*_{T,\ell m} = a_{T,\ell\,-m}\ ,\quad a^*_{E,\ell m} = a_{E,\ell\,-m}\ ,\quad a^*_{B,\ell m} = a_{B,\ell\,-m} \tag{7.4.30}$$

を満たすから，$C_{XY,\ell}$ はすべて実数で，かつ $C_{XX,\ell}$ はすべて正である．異なる方向における温度ゆらぎや偏光の相関の測定は，一般に $C_{XY,\ell}$ の形で報告される．

これから見るように，ストークスパラメータを E と B の項に分解するもう 1 つの利点はスカラー型摂動が E の項にしか寄与しない点である．この結果は重要である．なぜなら，もし原始ゆらぎ起源の B モード偏光が観測的に検出されれば[*7]，(10 章で学ぶインフレーションの時期に生成されたことが期待される）宇宙論的な重力波の存在の確たる証拠となるからである．

今から，式（7.4.27)–(7.4.29）で定義される多重極展開係数の計算に移る．温度ゆらぎの相関関数を計算する際に用いてうまくいった流体近似は，偏光を扱う際にはうまくいかないため，6.1 節で述べたより正確な運動学的理論にたよることになる．スカラー型摂動とテンソル型摂動は必ず区別する必要がある．すでに述べたように，スカラー型摂動とテンソル型摂動は互いに干渉しないので，多重極展開係数はすべてスカラー項とテンソル項（それぞれに上付き添字 S，T を付与する）の和で書ける．

$$C_{XY,\ell} = C^S_{XY,\ell} + C^T_{XY,\ell}\ . \tag{7.4.31}$$

[*6] ここで，$a_{T,\ell m}$ は式（2.6.1)（訳注 1 を参照）の $a_{\ell m}$ のことである．本書で定義する多重極展開係数 $C_{XY,\ell}$ は Zaldarriaga, Seljak，脚注 1（の文献）と同じであるが，Kamionkowski, Kosowsky, Stebbins, 脚注 1 のものとは以下のように関係している．$C^G_\ell = C_{\ell,EE}I^2/2T_0^2$，$C^C_\ell = C_{\ell,BB}I^2/2T_0^2$，$C^{TG}_\ell = -C_{TE,\ell}I/\sqrt{2}T_0^3$．ここで I は放射強度を表す.（下付き添字 G と C はそれぞれ「勾配（Gradient)」と「渦（Curl)」の略だが，これは E モードと B モードの偏光が形成するパターンがそれぞれポテンシャル流とソレノイド流の速度場が形成するパターンに似ていることにちなんでいる.）

[*7] 最終散乱面と我々の間の物質が及ぼす弱い重力レンズ効果により，スカラー型摂動から生成された E モード偏光の一部は B モード偏光に転化される．この効果は原始 B モード偏光の測定の妨げとなる. M. Zaldarriaga, U. Seljak, *Phys. Rev. D* **58**, 023003 (1998)[astro-ph/9803150]．このトピックに関するレビューは，A. Lewis, A. Challinor, *Phys. Rep.* **429**, 1 (2006) [astro-ph/0601594] を参照.

スカラー型摂動

式 (7.4.6) の行列 J_{ij} のスカラー型摂動は，フーリエ積分の式 (6.1.18) と視線方向積分の式 (6.1.36) で与えられる．

$$
\begin{aligned}
J_{ij}(0,-\hat{n},t_0) = &\int d^3q\,\alpha(\boldsymbol{q})\int_{t_1}^{t_0} dt\ \exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}-\int_t^{t_0} dt'\,\omega_c(t')\right)\\
&\times\Bigg[-\left(\delta_{ij}-\hat{n}_i\hat{n}_j\right)\left(\dot{A}_q(t')-(\hat{n}\cdot\boldsymbol{q})^2\dot{B}_q(t')\right)\\
&\quad+\frac{3\omega_c(t)}{2}(\delta_{ij}-\hat{n}_i\hat{n}_j)\Phi(q,t)\\
&\quad+\frac{3\omega_c(t)}{4}\Pi(q,t)\Big(\hat{q}_i-\hat{n}_i(\hat{q}\cdot\hat{n})\Big)\Big(\hat{q}_j-\hat{n}_j(\hat{q}\cdot\hat{n})\Big)\\
&\quad-\frac{2\omega_c(t)}{a(t)}[\delta_{ij}-\hat{n}_i\hat{n}_j]\,\hat{n}_k\delta u_k(\boldsymbol{q},t)\Bigg]\,.
\end{aligned}
$$

$\hat{n}_i e_{+\,i}(\hat{n})=0$ かつ $e_{+\,i}(\hat{n})\,e_{+\,i}(\hat{n})=0$ なので，被積分関数の中でストークスパラメータに寄与するのは $\hat{q}_i\hat{q}_j$ に比例する項だけで，

$$
\begin{aligned}
Q^S(\hat{n})+iU^S(\hat{n}) = &\frac{3T_0}{8}\,e_{+\,i}(\hat{n})\,e_{+\,j}(\hat{n})\int d^3q\ \hat{q}_i\hat{q}_j\,\alpha(\boldsymbol{q})\\
&\times\int_{t_1}^{t_0} dt\,P(t)\,\Pi(q,t)\,\exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\right)\,, \qquad (7.4.32)
\end{aligned}
$$

ここで，$P(t)\,dt$ は時刻 t と $t+dt$ の間で最終散乱が起こる確率である．

$$
P(t)=\omega_c(t)\exp\left(-\int_t^{t_0}\omega_c(t')\,dt'\right)\,. \qquad (7.4.33)
$$

いくつかの事項を確認しておこう．$\alpha(\boldsymbol{q})$ はスカラー型摂動を支配すると仮定されているモード（おそらくは減衰しない断熱的解），$\omega_c(t)$ は時刻 t の光子の衝突率，そして t_1 は再結合の時刻よりもずっと以前の時刻にとり，そこにある光子は現在時刻までに何度も散乱されるものとする．$\Pi(q,t)$ は式 (6.1.30) で与えられる源泉関数で，次のように温度と偏光の部分波の振幅で書ける．

$$
\Pi(q,t)=\Delta^{(S)}_{T,2}(q,t)+\Delta^{(S)}_{P,0}(q,t)+\Delta^{(S)}_{P,2}(q,t)\,. \qquad (7.4.34)
$$

式 (7.4.32) から EE と TE 相関の多重極展開係数を計算するため，まずはよく知られた公式，

$$\exp\left(i\hat{q}\cdot\boldsymbol{v}\right) = 4\pi \sum_{\ell,m} i^{\ell} j_{\ell}(v)\, Y_{\ell}^{m}(\hat{v})\, Y_{\ell}^{m*}(\hat{q})$$

を思い出そう．ここで $\boldsymbol{v} = \hat{n}q\int_{t}^{t_0} dt'/a(t')$ である．$\hat{q}_i$ は，この指数関数と合わせることで $-i\partial/\partial v_i$ に置き換えることができる．$\hat{v} = \hat{n}$ であるから，v_i に関する微分は $\partial/\partial v_i = \hat{n}_i\partial/\partial v + \tilde{\nabla}_i/v$ と書ける．ここで $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ は式（7.4.17）で与えられる角度勾配演算子で，$\hat{n}$ に作用する．さらに $\hat{n}_i e_{+\,i} = 0$ と $e_{+\,i}e_{+\,i} = 0$ を用いれば，式（7.4.32）は次のように書き換えられる．

$$Q^S(\hat{n}) + iU^S(\hat{n}) = -\frac{3\pi T_0}{2}\, e_{+\,i}(\hat{n})\, e_{+\,j}(\hat{n})\tilde{\nabla}_i\tilde{\nabla}_j \sum_{\ell m} i^{\ell} Y_{\ell}^{m}(\hat{n}) \int d^3q\; \alpha(\boldsymbol{q}) \times Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) \int_{t_1}^{t_0} dt\; P(t)\, \Pi(q,t)\, \frac{j_{\ell}\Big(q\, r(t)\Big)}{q^2 r(t)^2}\,, \tag{7.4.35}$$

$r(t)$ は，現在時刻 t_0 で我々が観測する光が発せられた時刻 t に対応する動径座標を表す．

$$r(t) = \int_{t}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}\,. \tag{7.4.36}$$

（$\tilde{\nabla}_i\hat{n}_j$ が寄与しないのは，これが $\delta_{ij} - \hat{n}_i\hat{n}_j$ に等しく，$e_{+\,i}e_{+\,j}$ と縮約をとればゼロとなるため.）式（7.4.35）を式（7.4.15），(7.4.16）と比較すれば，スカラー型摂動による $a_{P,\ell m}$ の表式が以下のように得られる．

$$a_{P,\ell m}^{S} = -\frac{3\pi T_0 i^{\ell}}{4}\sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \int d^3q\; \alpha(\boldsymbol{q})\, Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) \int_{t_1}^{t_0} dt \times P(t)\, \Pi(q,t)\, \frac{j_{\ell}\Big(q\, r(t)\Big)}{q^2\, r^2(t)}. \tag{7.4.37}$$

こうして得られた $a_{P,\ell m}$ の実数条件を確認してみよう．式（6.1.18），(6.1.21）から $\alpha^*(\boldsymbol{q})\Pi^*(q,t) = \alpha(-\boldsymbol{q})\Pi(q,t)$ が要請され，$Y_{\ell}^{m}(\hat{q}) = (-1)^{\ell} Y_{\ell}^{-m*}(-\hat{q})$ と $i^{\ell*} = (-1)^{\ell} i^{\ell}$ を使えば実数条件として $a_{P,\ell m}^{S*} = a_{P,\ell\,-m}^{S}$ を得る．この条件を式（7.4.25）に用いれば，確かにスカラー型摂動は E モード偏光にしか寄与しないことを導ける．

$$a_{E,\ell m}^{S} = -a_{P,\ell m}^{S}\,, \qquad a_{B,\ell m}^{S} = 0\,. \tag{7.4.38}$$

これで，式（7.4.28）と（7.4.27）で定義される EE と TE 相関の多重極展開

係数の，スカラー型摂動の寄与を与える公式を導くことができる．スカラー型摂動の確率変数 $\alpha(\boldsymbol{q})$ の規格化条件の式（7.2.5）を思い出せば，式（7.4.37）と（7.4.38）から[*8]，

$$C^S_{EE,\ell} = \frac{9\pi^2 T_0^2}{16}\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}\int_0^\infty q^2\,dq\left|\int_{t_1}^{t_0} dt\,P(t)\,\Pi(q,t)\,\frac{j_\ell\Big(q\,r(t)\Big)}{q^2\,r^2(t)}\right|^2 \tag{7.4.39}$$

が得られ，同様に式（7.4.37）とスカラー型摂動による温度ゆらぎの部分波振幅の一般公式（7.2.4）を組み合わせれば，

$$C^S_{TE,\ell} = -3\pi^2 T_0^2\sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}}\int_0^\infty q^2\,dq\int_{t_1}^{t_0} dt\,P(t)\,\Pi(q,t)\,\frac{j_\ell\Big(q\,r(t)\Big)}{q^2\,r^2(t)} \times\int_{t_1}^{t_0} dt\left[j_\ell\Big(q\,r(t)\Big)F(q,t)+j'_\ell\Big(q\,r(t)\Big)G(q,t)+j''_\ell\Big(q\,r(t)\Big)H(q,t)\right] \tag{7.4.40}$$

を得る．ここで，$F(q,t)$，$G(q,t)$，$H(q,t)$ は式（7.2.7）–（7.2.9）で与えられる．式（7.2.44）–（7.2.45）の宇宙論パラメータを用いて計算された $C^S_{EE,\ell}$ と $C^S_{TE,\ell}$ の値[*9] を図 7.4 と 7.5（166 ページ）に示す．これらの図と図 7.1 を比べれば，$C^S_{EE,\ell} \ll C^S_{TE,\ell} \ll C^S_{TT,\ell}$ であることがわかる．マイクロ波背景放射の偏光は小さいが，それは熱平衡状態では光子は偏光せず，再結合の時刻において宇宙がほぼ完全な熱平衡状態からほぼ完全な透明状態に迅速に移行したため，十分な偏光が生じる時間がなかったことによる．

最高精度の数値計算をするには式（7.4.39），(7.4.40）を用いなくてはいけないが，もっとずっと単純な近似式を使うことで $\ell \gg 1$ の多重極展開係数の ℓ 依存性を理解することができる．式（7.4.39）の関数 $P(t)$ は最終散乱の時刻 t_L で鋭いピークを持ち，その積分は $\int dt\,P(t) = 1$ と規格化されているので，そこそこ良い精度で $P(t)$ を落として $t = t_L$ とすることで積分を近似できる．また，式（7.2.13）から式（7.2.17）を求めたときに用いたのと同じ近似をすれば，以下の $\ell \gg 1$ のときの近似式を得る．

[*8] これは，Zaldarriaga, Seljak，脚注 1（の文献）の式 (17) と同じであるが，本書の Π は彼らが導いた Π の 4 倍になる．

[*9] http://lambda.gsfc.nasa.gov/data/map/powspec/wmap_lcdm_pl_model_yr1_v1.txt

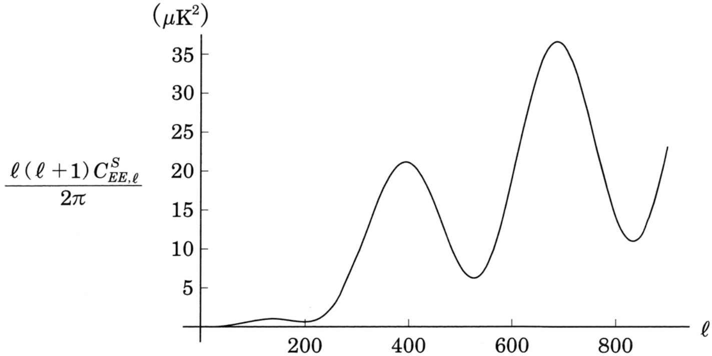


図 7.4　EE 相関の多重極展開係数 $\ell(\ell+1)C^S_{EE,\ell}/2\pi$ を ℓ の関数として示す．宇宙論パラメータは式（7.2.44）と（7.2.45）の値を用いた．

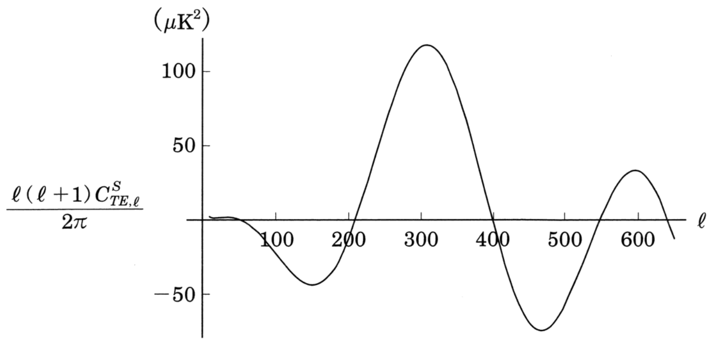


図 7.5　TE 相関の多重極展開係数 $\ell(\ell+1)C^S_{TE,\ell}/2\pi$ を ℓ の関数として示す．宇宙論パラメータは式（7.2.44）と（7.2.45）の値を用いた．

$$\ell(\ell+1)C^S_{EE,\ell} \approx \frac{9\pi^2\ell^3}{32r_L^3}\int_1^\infty \frac{d\beta}{\beta\sqrt{\beta^2-1}}\Pi^2\left(\frac{\ell\beta}{r_L}, t_L\right) .$$

再結合の時刻あたりで関数 $\Pi(q,t)$ が急激に変化するため，この近似式は $C^S_{EE,\ell}$ の大きさについては信頼できる結果を与えない．しかし，被積分関数は q とともに急激に減少し，積分は $\beta \approx 1$ からの寄与に支配されているので，$C^S_{EE,\ell}$ の山と谷が主に因子 $\Pi^2(\ell/r_L, t_L)$ の寄与から生じていることは読み取れる．一方，7.2

節で述べたように $C^S_{TT,\ell}$ の山と谷は主に因子 $F^2(\ell/r_L)$ から生じていて，同じ理由から $C^S_{TE,\ell}$ の山と谷は主に因子 $F(\ell/r_L)\Pi(\ell/r_L,t_L)$ から生じている．

$\Pi(q,t_L)$ の q 依存性を見るため，まず，光子の偏光が最終散乱のみから生じている限りでは，式（7.4.34）の初項 $\Delta^{(S)}_{T,2}(q,t)$ のみが $\Pi(q,t)$ に寄与することに着目しよう．これは，$|\boldsymbol{p}| \ll m_e$ を満たす初期運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ無偏光の光子が非相対論的電子に散乱され，実偏光ベクトル $\boldsymbol{e}$ をもつ光子になる過程の微分散乱断面積が以下の式で与えられることによる[*10]．

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2 m_e^2}\Big(1-(\hat{p}\cdot\boldsymbol{e})^2\Big) \,.$$

もし初期運動量 $\boldsymbol{p}$ の分布が等方的であれば，初期運動量の方向に渡る断面積の平均は $\boldsymbol{e}$ によらないから，終状態の光子は無偏光である．しかし，もし最終散乱が起こる場所と時刻で運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つ光子の位相空間密度 $n_{\gamma,L}(\boldsymbol{p})$ が方向依存性をもっていれば，最終散乱後に視線方向 $\hat{n}$ から到来し，（条件 $\boldsymbol{e}^2=1$ と $\boldsymbol{e}\cdot\hat{n}=0$ を満たす）偏光ベクトル $\boldsymbol{e}$ を持つ光子の強度は以下の量に比例する．

$$\int d^3p\, p\, n_{\gamma,L}(\boldsymbol{p})\Big(1-(\hat{p}\cdot\boldsymbol{e})^2\Big) \,.$$

したがって，ストークスパラメータに寄与する J_{ij} の成分は $\int d^3p\,p\,n_{\gamma,L}(\boldsymbol{p})\hat{p}_i\hat{p}_j$ に比例し，それは最終散乱が起こった場所と時刻で計算された $\Delta^{(S)}_T$ の $\ell=2$ の部分に比例する．$\Pi(q,t)$ の他の項 $\Delta^{(S)}_{P,0}(q,t)+\Delta^{(S)}_{P,2}(q,t)$ は最終散乱の時刻に光子がすでに持っていた偏光の効果を表すが，光子が何度も散乱されている状態では光子は無偏光でなければならないから，この項は比較的小さいと予想できる．すると，式（6.1.32）より $\Pi(q,t)$ は以下のように近似できる．

$$\Pi(q,t_L) \simeq \Delta^{(S)}_{T,2}(q,t) \simeq q^2\pi^S_q(t_L)/\bar{\rho}_\gamma(t_L) \,.$$

式（5.1.43）の最初の行を見て，$\partial_i\partial_j\pi^S(\boldsymbol{x},t)$ がスカラー型の $\delta T^i{}_j$ の δ_{ij} に比例しない項であることに気づこう．一方，式（B.50）より，平均自由時間が短いときにはこの項は，

$$\partial_i\partial_j\pi^S = a^{-2}\eta_\gamma\partial_i\partial_j\delta\tilde{u}$$

に等しいことがわかる[*11]．η_γ は光子の運動量輸送による剪断粘性率で，光子の

[*10] たとえば QTF 第 1 巻の式（8.7.40）（邦訳『場の量子論 2 巻』，式（8.7.40））を見よ．これは，O. Klein, Y. Nishina, *Z. Phys.* **52**, 853 (1929) によって最初に計算された．

[*11] ここで，関係式 $\delta u^i{}_{;j} = \delta u_j{}_{;}{}^i = a^{-2}\delta u_{i;j} - a^{-4}h_{ij}a\dot{a}$ を用いた．

平均自由時間 t_γ を用いて $\eta_\gamma = \frac{16}{45}\bar{\rho}_\gamma t_\gamma$ のように与えられる[*12]．ゲージ不変な速度ポテンシャル $\delta\tilde{u}(\boldsymbol{x}, t)$ は以下のように与えられ[*13]，

$$\delta\tilde{u} \equiv \delta u - aF + \frac{a^2\dot{B}}{2} ,$$

F, B は計量の摂動で，それぞれ式（5.1.32），(5.1.33）で定義される．また，(計量の成分 F がゼロになるゲージで導かれた）式（7.1.45）より，ゲージ不変な速度ポテンシャルのフーリエ変換の，確率変数 $\alpha(\boldsymbol{q})$ を除く係数は形状因子 $G(q)$ を用いて $\delta\tilde{u}_q(t_L) = -a(t_L)G(q)/q$ のように与えられる．以上より，以下の結果が得られる．

$$\Pi(q, t_L) \simeq \frac{16\,q^2}{45\,a^2(t_L)}\bar{t}_\gamma\,\delta\tilde{u}_q(t_L) \simeq -\frac{16\,q}{45\,a(t_L)}\bar{t}_\gamma\,G(q) .$$

ここで，$\bar{t}_\gamma$ は $t_\gamma(t)$ を再結合の時期に渡って適当に平均化したものである．よって，$C^S_{EE,\ell}$ と $|C^S_{TE,\ell}|$ に見られる山と谷は，それぞれ大体において $|G(q/r_L)|^2$ と $|F(q/r_L)G(q/r_L)|$ の山と谷に対応している．$C^S_{TT,\ell}$ の山と谷は基本的に $|F(q/r_L)|^2$ の山と谷であったことも思い出しておこう．式（7.2.23）と（7.2.24）より以下の式が得られる．

$$F(q) \simeq \frac{\mathcal{R}^o_q}{5}\left[3R_L\mathcal{T}(\kappa) - (1+R_L)^{-1/4}\,e^{-\int_0^{t_L}\Gamma dt}\,\mathcal{S}(\kappa)\,\cos\chi(q)\right] ,$$

$$G(q) = -\frac{\sqrt{3}\mathcal{R}^o_q}{5(1+R_L)^{3/4}}\,e^{-\int_0^{t_L}\Gamma dt}\,\mathcal{S}(\kappa)\,\sin\chi(q) ,$$

ここで，$\chi(q)$ は近似的に q の線形関数で，以下の式で定義される．

$$\chi(q) \equiv \int_0^{t_L}\frac{q\,dt}{a\sqrt{3(1+R)}} + \Delta(\kappa) ,$$

また，遷移関数 S，T，Δ の引数 κ は q に比例する．7.2 節で述べたように，$C^S_{TT,\ell}$ のピークの位置はほぼ $\chi(\ell/r_L) = \pi$，2π，3π，$\cdots$ で与えられる．一方，

---

*12 N. Kaiser, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **202**, 1169 (1983). この結果に関する議論については 6.4 節の脚注 5 を参照のこと．

*13 この $\delta\tilde{u}$ は，計量の成分 F がゼロになるゲージにおける温度ゆらぎの表式（7.1.37）の，ドップラー効果の項に現れる速度ポテンシャルと同じものである．特に，ニュートンゲージでは $F = B = 0$ だから，$\delta\tilde{u} = \delta u$ となる．

$C^S_{EE,\ell}$ のピークの位置はほぼ $\left|\sin\left(\chi(\ell/r_L)\right)\right|$ のピークの位置，言い換えれば $\chi(\ell/r_L) = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2, \cdots$ で与えられると予想でき，$|C^S_{TE,\ell}|$ のピークの位置はほぼ $\left|\cos\left(\chi(\ell/r_L)\right)\sin\left(\chi(\ell/r_L)\right)\right|$ のピークの位置，言い換えれば $\chi(\ell/r_L) = \pi/4,\ 3\pi/4,\ 5\pi/4, \cdots$ で与えられると予想できる．特に，$C^S_{TT,\ell}$ の最初のピークの前（より小さな ℓ）には $C^S_{EE,\ell}$ のピークが 1 つあり，その後は隣り合う $C^S_{TT,\ell}$ のピークの間に $C^S_{EE,\ell}$ のピークが 1 つずつあることが予想できるし，$C^S_{TT,\ell}$ の最初のピークの前には $|C^S_{TE,\ell}|$ のピークが 2 つあり，その後は隣り合う $C^S_{TT,\ell}$ のピークの間に $|C^S_{TE,\ell}|$ のピークが 2 つずつあることも予想できる．コンピュータによる計算結果は，まさしくこれらのパターンを示している[*14]．たとえば，もっともらしい宇宙論パラメータに対し，$C^S_{TT,\ell}$ の最初のピーク（$\ell = 230$）の前に $|C^S_{TE,\ell}|$ のピークが 2 つ（$\ell = 36$ と $\ell = 144$）あることを確かめられる．

E モード偏光と温度–偏光の相関関数は DASI 実験（Degree Angular Scale Interferometer）のチームによって最初に検出された[*15]．その後ウィルキンソンマイクロ波異方性探査機（WMAP）のチームにより，$\ell = 2$ から $\ell \simeq 570$ に渡る $C_{TE,\ell}$ の値が高精度で測定された[*16]．$\ell > 10$ の測定結果は，ハリソン–ゼルドヴィッチ型 $\mathcal{R}^o_q \propto q^{-3/2}$ のスペクトルを持つ原始ゆらぎ，時間一定の真空エネルギー，冷たい暗黒物質，バリオン物質，光子，質量のないニュートリノを仮定し，温度異方性のデータから得られたのと同じ宇宙論パラメータ $\Omega_B h^2$，$\Omega_M h^2$，h，N を持つ宇宙論の標準モデルの予言とよく一致する．特に，$\ell \simeq 140$ あたりにある 2 番目のピークと $\ell \simeq 300$ あたりにある 3 番目のピークの存在は明らかである．より最近になり，QUaD 実験のチーム[*17]は，南極で行っているマイクロ波背景放射の偏光測定実験の初年度の成果を発表した．これにより，再結合の時刻あたりの散乱から予想される，$\ell \simeq 350$ における $C_{EE,\ell}$ の最初のピークの存在が明らかとなった．しかし，もし宇宙モデルに再電離が含まれていなければ，モデルの予言と $\ell < 10$ における $C_{TE,\ell}$ のデータとの間には明らかな食い違いがある．この食い違いは，第一世代の星の紫外光によって再電離されたプラズマによる散乱で

---

*14 たとえば `http://lambda.gsfc.nasa.gov/data/map/powspec/wmap_lcdm_pl_model_yr1_v1.txt` を表示してみよ．

*15 J. Kovac *et al.*, *Nature* **420**, 772 (2002).

*16 A. Kogut *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 161 (2003).

*17 P. Ade *et al.*, 0705.2359.

生じた偏光だと考えられている．

これまでのマイクロ波背景放射の偏光観測の最重要課題は，$z_L \simeq 1090$ よりもずっと小さな赤方偏移での銀河間物質の再電離（これは最終散乱の確率分布関数 $P(t)$ に寄与する）の歴史をひもとくことであった．我々の近傍の現象は大きな見込み角度で観測されるので，再電離によって新たに生じる $C_{EE,\ell}$，$C_{TE,\ell}$ の寄与は比較的小さな ℓ（$\ell < 10$）を除けば無視できる．WMAP チーム*18は，3 年間に渡る観測の結果，EE 相関のデータのみを用い，再電離が赤方偏移 z_r で突然起こり，瞬時に宇宙が再電離したと仮定することで $z_r = 10.9^{+2.7}_{-2.3}$ を得た．これは光学的厚さにして $\tau = 0.09 \pm 0.03$ に対応する．この結果は，最初の星形成が起こった時期に関する理論的予想と合うもので，7.2 節と 7.3 節でそれぞれ議論したように，温度ゆらぎの相関関数から $\mathcal{R}_q^o$ の大きさを決め，$\mathcal{D}_q^o$ の上限値を得る上で本質的な役割を果たした．再電離プラズマによる散乱により，$C_{EE,\ell}$ には新しいピークが現れる．これは $\ell \simeq 140$ にあるピークと同じようなものだが，再電離は再結合の時期の角径距離よりももっと小さな角径距離で起こるため，再電離によるピークは $\ell \simeq 4$ あたりの非常に小さな ℓ に現れる．図 7.6 に示すように，WMAP 衛星の測定データ，および大きな ℓ における他の実験の測定データは，$C^S_{EE,\ell}$ の理論公式（7.4.39）による計算結果とよく一致している．将来の測定では，図 7.6 に示すデータの誤差をさらに減らすものと期待されている．

テンソル型摂動

式（7.4.6）の行列 J_{ij} のテンソル型摂動は，フーリエ積分の式（6.6.9）と視線方向積分の式（6.6.24）で与えられる．

$$
\begin{aligned}
J_{ij}(\boldsymbol{x}, \hat{p}, t) = & \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3q \; e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \beta(\boldsymbol{q}, \lambda) \\
& \times \int_{t_1}^{t} dt' \; \exp\left(-i\boldsymbol{q}\cdot\hat{p} \int_{t'}^{t} \frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^{t} dt'' \; \omega_c(t'') \right) \\
& \times \Bigg[-\hat{p}_k \hat{p}_l \left(\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j \right) e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \, \dot{\mathcal{D}}_q(t') \\
& \quad - \omega_c(t') \, \Psi(q, t') \Big(e_{ij}(\hat{q}, \lambda) - \hat{p}_i \hat{p}_k e_{kj}(\hat{q}, \lambda) \\
& \quad - \hat{p}_j \hat{p}_k e_{ik}(\hat{q}, \lambda) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \Big) \Bigg].
\end{aligned}
$$

---

*18 L. Page *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 335 (2007) [astro-ph/0603450].

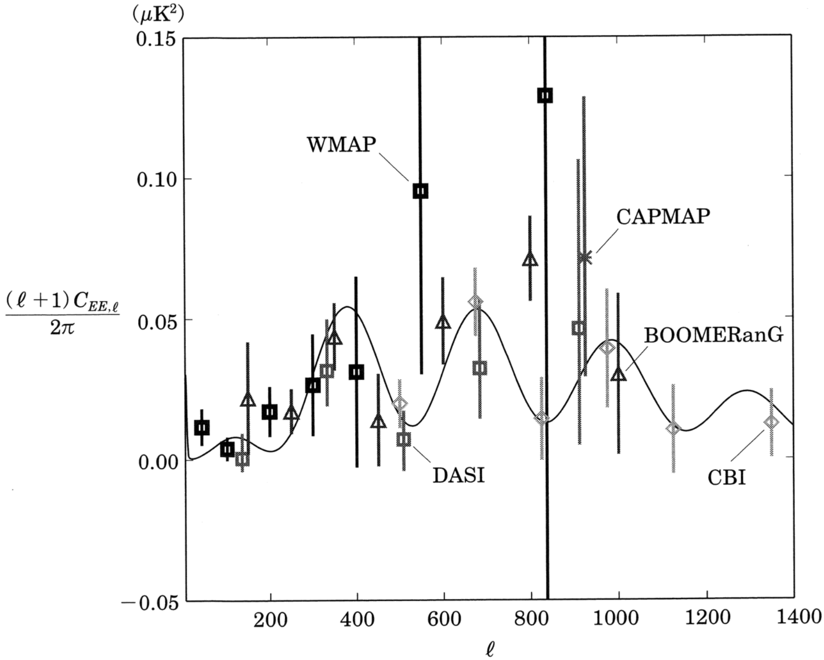


図 7.6 EE 相関の多重極展開係数 $(\ell+1)C_{EE,\ell}/2\pi$ を ℓ の関数として示す．L. Page *et al.*, astro-ph/0603450 より抜粋 ($C_{EE,\ell}/2\pi$ にかかっている因子がいつもの $\ell(\ell+1)$ ではなく，$\ell+1$ であることに注意しよう)．濃い正方形は WMAP のデータ，3 角形は BOOMERanG のデータ，薄い正方形は DASI のデータ，ダイヤモンドは CBI のデータ，星印は CAPMAP のデータを示す．実線は，WMAP の温度ゆらぎのデータと小さい ℓ の偏光データから得られた宇宙論パラメータを用いて計算された $(\ell+1)C^S_{EE,\ell}/2\pi$ の理論曲線を示す．

再び条件 $\hat{n}_i e_{+\,i}(\hat{n}) = 0$，$e_{+\,i}(\hat{n})e_{+\,i}(\hat{n}) = 0$ を用いれば，被積分関数の中で式 (7.4.6) のストークスパラメータに寄与するのは $e_{ij}\Psi$ に比例する項だけであることがわかる．

$$Q^T(\hat{n}) + iU^T(\hat{n}) = -\frac{1}{2}T_0\, e_{+\,i}(\hat{n})e_{+\,j}(\hat{n}) \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3q\; \beta(\boldsymbol{q},\lambda)$$

$$\times e_{ij}(\hat{q},\lambda)\int_{t_1}^{t_0}dt\exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')}\right)P(t)\Psi(q,t)\,. \tag{7.4.41}$$

ここで，$\beta(\boldsymbol{q},\lambda)$ は波数 $\boldsymbol{q}$ とヘリシティλ を持つ重力波の確率変数，$P(t)$ は式（7.4.33）で与えられる最終散乱の確率分布関数，$\Psi(q,t)$ は式（6.6.21）で与えられる源泉関数で，温度と偏光の部分波の振幅で書ける．

$$\begin{aligned}\Psi(q,t) &= \frac{1}{10}\Delta^{(T)}_{T,0}(q,t)+\frac{1}{7}\Delta^{(T)}_{T,2}(q,t)+\frac{3}{70}\Delta^{(T)}_{T,4}(q,t)-\frac{3}{5}\Delta^{(T)}_{P,0}(q,t)\\ &\quad+\frac{6}{7}\Delta^{(T)}_{P,2}(q,t)-\frac{3}{70}\Delta^{(T)}_{P,4}(q,t)\,.\end{aligned} \tag{7.4.42}$$

また，$e_{ij}(\hat{q},\lambda)$ は偏光テンソル，

$$e_{ij}(\hat{q},\lambda)=S_{ik}(\hat{q})\,S_{jl}(\hat{q})\,e_{kl}(\hat{z},\lambda) \tag{7.4.43}$$

で，$S_{ij}(\hat{q})$ は式（7.4.12）で与えられる z 軸を $\hat{q}$ の方向に移す標準的な回転行列，$e_{kl}(\hat{z},\lambda)$ は式（5.2.15）で与えられる z 軸方向に伝播する波が持つ偏光テンソルで，そのゼロでない成分は以下で与えられる．

$$e_{11}(\hat{z},\pm2)=-e_{22}(\hat{z},\pm2)=\mp i\,e_{12}(\hat{z},\pm2)=\mp i\,e_{21}(\hat{z},\pm2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{7.4.44}$$

まず始めに，ある源泉関数 $\Psi(q,t)$ が与えられたときの多重極展開係数 $C^T_{EE,\ell}$，$C^T_{BB,\ell}$，$C^T_{TE,\ell}$ の公式を導出しよう．次に，7.3 節で学んだ方法で計算した $\Psi(q,t)$ を用いて数値計算を行った結果を示す．

スピン 2 の球面調和関数でストークスパラメータを展開したときの展開係数 $a^T_{P,\ell m}$ を導くところから始める．

$$Q^T(\hat{n})+iU^T(\hat{n})=\sum_{\ell m}a^T_{P,\ell m}\,\mathcal{Y}^m_\ell(\hat{n})\,. \tag{7.4.45}$$

式（7.4.41），および $\mathcal{Y}^m_\ell$ の規格直交性条件の式（7.4.21）を用いれば，

$$\begin{aligned}a^T_{P,\ell m} &= \int d^2\hat{n}\,\mathcal{Y}^{m*}_\ell(\hat{n})\Big(Q(\hat{n})+iU(\hat{n})\Big)^T\\ &= -\frac{T_0}{2}\sum_\lambda\int d^3q\,\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\int_{t_1}^{t_0}dt\,P(t)\,\Psi(q,t)\,g_{\ell m}\Big(q\,r(t),\hat{q},\lambda\Big)\end{aligned} \tag{7.4.46}$$

を得る．ここで $r(t)$ は時刻 t_0 で我々に届く光子の時刻 t での（摂動を含まない）

共動的動径座標,

$$r(t) \equiv \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \tag{7.4.47}$$

で，関数 $g_{\ell m}$ は以下で定義される．

$$g_{\ell m}(\rho, \hat{q}, \lambda) \equiv \int d^2\hat{n}\, \mathcal{Y}_\ell^{m*}(\hat{n})\, e^{i\rho\hat{q}\cdot\hat{n}} \sum_{ij} e_{+\,i}(\hat{n}) e_{+\,j}(\hat{n}) e_{ij}(\hat{q}, \lambda)\ . \tag{7.4.48}$$

まず最初に，$\hat{q}$ を z 軸の方向 $\hat{z}$ にとって $g_{\ell m}(\rho, \hat{q}, \lambda)$ を計算するのが便利である．重力波の偏光テンソルの式（7.4.44）と光子の偏光ベクトルの式（7.4.9）を用いれば，簡単な計算から，

$$e_{+\,i}(\hat{n}) e_{+\,j}(\hat{n}) e_{ij}(\hat{z}, \pm 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e_{+\,1}(\hat{n}) \pm i e_{+\,2}(\hat{n})\Big)^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{\pm 2i\phi}(1 \mp \cos\theta)^2 \tag{7.4.49}$$

が得られる．ここで，いつものように ϕ と θ は視線方向 $\hat{n}$ の方位角と極角を表す．式（7.4.22）より $\mathcal{Y}_\ell^{m*}(\hat{n})$ は $e^{-im\phi}$ に θ の関数をかけたものだから，式（7.4.48）の積分は $m = \lambda = \pm 2$ でない限りゼロとなり，$m = \lambda = \pm 2$ のときには 2π となる．$\mathcal{Y}_\ell^{\pm 2}$ には式（7.4.22）の最初の行を使う．

$$\mathcal{Y}_\ell^{\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\partial_\pm Y_\ell^{\pm 2}(\theta, \phi) = e^{\pm 2i\phi}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}\partial_\pm P_\ell^2(\cos\theta)\ , \tag{7.4.50}$$

ここで，$\partial_\pm$ は以下で定義する微分演算子，

$$\begin{aligned}\partial_\pm &\equiv \left(\frac{d}{d\theta} \mp 2\csc\theta\right)^2 - \cot\theta\left(\frac{d}{d\theta} \mp 2\csc\theta\right) \\ &= (1-\mu^2)\frac{d^2}{d\mu^2} \pm 4\frac{d}{d\mu} + \frac{4(1\pm\mu)}{1-\mu^2}\end{aligned} \tag{7.4.51}$$

で $\mu \equiv \cos\theta$，そして $P_\ell^2(\cos\theta)$ は通常のルジャンドル陪関数を表す．

$$P_\ell^2(\mu) = (1-\mu^2)\frac{d^2}{d\mu^2}P_\ell(\mu)\ . \tag{7.4.52}$$

これらを合わせれば，$\boldsymbol{q}$ が z 軸の方向 $\hat{z}$ にある場合，式（7.4.48）は以下のようになる．

$$g_{\ell m}(\rho, \hat{z}, \pm 2) = \delta_{m,\pm 2}\sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}}\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}\int_{-1}^{+1} d\mu \Big[\partial_\pm P_\ell^2(\mu)\Big] e^{i\rho\mu}(1\mp\mu)^2. \tag{7.4.53}$$

ルジャンドル陪関数に式（7.4.52）を用い，部分積分を用いて $\partial_\pm$ の微分を $(1\mp\mu)^2 e^{i\rho\mu}$ に作用させ，以下の公式を適用する．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\Big((1-\mu^2)(1\mp\mu)^2 e^{i\rho\mu}\Big) + \Big(\mp 4\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{4(1\pm\mu)}{1-\mu^2}\Big)(1\mp\mu)^2 e^{i\rho\mu}\\ &\quad = (1-\mu^2)\Big(12\mp 8i\rho(1\mp\mu) - \rho^2(1\mp\mu)^2\Big)e^{i\rho\mu}\ .\end{aligned}$$

そして μ を $-i\partial/\partial\rho$ に置き換えれば，以下の式を得る．

$$\begin{aligned}g_{\ell m}(\rho, \hat{z}, \pm 2) &= \delta_{m,\pm 2}\sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}}\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}\int_{-1}^{+1} d\mu\, P_\ell(\mu)\\ &\quad\times\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ \Big[12\mp 8i\rho(1\mp\mu) - \rho^2(1\mp\mu)^2\Big]\ (1-\mu^2)^2\, e^{i\rho\mu}\\ &= -\delta_{m,\pm 2}\sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}}\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}\int_{-1}^{+1} d\mu\, P_\ell(\mu)\\ &\quad\times\left[12 + 8\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \rho^2 + \rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\mp 8i\rho\mp 2i\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right]\\ &\quad\times\left(1+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)^2\rho^2\, e^{i\rho\mu},\end{aligned}$$

μ に渡る積分は単に，

$$\int_{-1}^{+1} d\mu\ e^{i\rho\mu} P_\ell(\mu) = 2i^\ell j_\ell(\rho)$$

となる．球ベッセル関数を定義する微分方程式 $j_\ell''(\rho) + (2/\rho)j_\ell'(\rho) + (1-\ell(\ell+1)/\rho^2))j_\ell(\rho) = 0$ を用いて面倒だが難しくはない計算をすれば関係式，

$$\left(1+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)^2\rho^2\, j_\ell(\rho) = \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}\frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2}$$

が得られるので，最終的に以下の結果にたどり着く．

$$\begin{aligned}g_{\ell m}(\rho, \hat{z}, \pm 2) &= -2i^\ell\delta_{m,\pm 2}\sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}}\\ &\quad\times\left[12 + 8\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \rho^2 + \rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\mp 8i\rho\mp 2i\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right]\frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2}\ .\end{aligned}$$

(7.4.54)

温度ゆらぎの展開係数の表式 (7.3.13) を得たときのように，一般的な方向 $\boldsymbol{q}$ に伝播する波の振幅は，z 軸を $\boldsymbol{q}$ の方向に移す標準的な回転 $S(\hat{q})$ を施すことで得られる．

$$g_{\ell m}(\rho,\hat{q},\pm 2)=\sum_{m'}D^{(\ell)}_{m,m'}\Big(S(\hat{q})\Big)g_{\ell m'}(\rho,\hat{z},\pm 2)\ , \tag{7.4.55}$$

ここで，$D^{(\ell)}$ はスピン ℓ を持つユニタリーな回転群の表現である．式 (7.4.46)，(7.4.55)，(7.4.54) を用いれば以下の結果を得る．

$$\begin{aligned}a^T_{P,\ell m}&=T_0\,i^\ell\sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}}\sum_{\pm}\int d^3q\;\beta(\boldsymbol{q},\pm 2)\,D^{(\ell)}_{m,\pm 2}\Big(S(\hat{q})\Big)\\&\quad\times\int_{t_1}^{t_0}dt\,P(t)\,\Psi(q,t)\\&\quad\times\left\{\left[12+8\rho\frac{\partial}{\partial\rho}-\rho^2+\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\mp 8i\rho\mp 2i\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right]\frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2}\right\}_{\rho=q\,r(t)}\ .\end{aligned} \tag{7.4.56}$$

$a^T_{P,\ell m}$ を E モードと B モードの項に分解するには，β と $D^{(\ell)}$ の実数条件が必要となる．まず，

$$e_{ij}(\hat{q},\pm 2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(S_{i1}(\hat{q})\pm iS_{i2}(\hat{q})\Big)\Big(S_{j1}(\hat{q})\pm iS_{j2}(\hat{q})\Big)$$

かつ

$$S_{i1}(\hat{q})\pm iS_{i2}(\hat{q})=\Big(\cos\theta\,\cos\phi\mp i\,\sin\phi,\ \cos\theta\,\sin\phi\pm i\,\cos\phi,\ -\sin\theta\Big)$$

なので，以下を得る．

$$e^*_{ij}(\hat{q},\pm 2)=e_{ij}(\hat{q},\mp 2)=e_{ij}(-\hat{q},\pm 2)\ .$$

重力場が単一のモードに支配されているなら $\mathcal{D}^*_q(t)$ は $\mathcal{D}_q(t)$ に比例しなくてはならないから，$\beta(\boldsymbol{q},\pm 2)$ に位相を押し込めることで $\mathcal{D}_q(t)$ を実数にできる．すると，$D_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ が実数であるから，

$$\beta^*(\boldsymbol{q},\pm 2)=\beta(-\boldsymbol{q},\pm 2) \tag{7.4.57}$$

が導かれる．また，角運動量 ℓ の角運動量行列 $J^{(\ell)}_i$ [*19] を用いて $D^{(\ell)}\Big(S(\hat{q})\Big)=\exp\Big(-i\phi J^{(\ell)}_3\Big)\exp\Big(-i\theta J^{(\ell)}_2\Big)$ と書けば，以下の関係式が成り立つ．

$$D^{(\ell)}_{m,\pm 2}\Big(S(\hat{q})\Big)^* = (-1)^\ell D^{(\ell)}_{-m,\pm 2}\Big(S(-\hat{q})\Big) . \tag{7.4.58}$$

ここで生じた符号 $(-1)^\ell$ は，$i^{-\ell} = (-1)^\ell i^\ell$ から生じる符号を打ち消す．これから，$a^T_{P,\ell m}$ の複素共役をとって m を $-m$ に変える という一連の作業は，単に $j_\ell(\rho)/\rho^2$ に作用する微分演算子をその複素共役に置き換えることに等しい．

$$\begin{aligned} a^{T*}_{P,\ell\,-m} = T_0\, i^\ell \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}} \sum_\pm \int d^3q\; \beta(\boldsymbol{q}, \pm 2)\, D^{(\ell)}_{m,\pm 2}\Big(S(\hat{q})\Big) \\ \times \int_{t_1}^{t_0} dt\, P(t)\, \Psi(q,t) \\ \times \left\{ \left[12 + 8\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} \pm 8i\rho \pm 2i\rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho = q\,r(t)} . \end{aligned} \tag{7.4.59}$$

すると，定義式（7.4.25）より以下の結果を得る．

$$\begin{aligned} a^T_{E,\ell m} = -\, i^\ell\, T_0 \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}} \sum_\pm \int d^3q\; \beta(\boldsymbol{q}, \pm 2)\, D^{(\ell)}_{m,\pm 2}\Big(S(\hat{q})\Big) \\ \times \int_{t_1}^{t_0} dt\, P(t)\, \Psi(q,t) \\ \times \left\{ \left[12 + 8\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho = q\,r(t)} , \end{aligned} \tag{7.4.60}$$

$$\begin{aligned} a^T_{B,\ell m} = i^\ell\, T_0 \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}} \sum_\pm \pm \int d^3q\; \beta(\boldsymbol{q}, \pm 2)\, D^{(\ell)}_{m,\pm 2}\Big(S(\hat{q})\Big) \\ \times \int_{t_1}^{t_0} dt\, P(t)\, \Psi(q,t) \left\{ \left[8\rho + 2\rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho = q\,r(t)} . \end{aligned} \tag{7.4.61}$$

あとは，確率変数のペアの平均値，

$$\langle \beta(\boldsymbol{q}, \lambda)\, \beta^*(\boldsymbol{q}', \lambda') \rangle = \delta^3(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}')\delta_{\lambda\lambda'} \tag{7.4.62}$$

と式（7.3.17）で与えられるユニタリー関係式，

$$\int d^2\hat{q}\; D^{(\ell)}_{m,\pm 2}\Big(S(\hat{q})\Big)\, D^{(\ell')}_{m',\pm 2}\Big(S(\hat{q})\Big)^* = \frac{4\pi}{2\ell+1}\delta_{mm'}\delta_{\ell\ell'}$$

を用いることで偏光の相関関数の多重極展開係数を計算できる．ヘリシティ±2 に渡る和は，EE と BB の相関では 2 を与えるだけであるが，EB 相関では式

---

*19　（175 ページ）脚注 4 で述べたように，角運動量行列の位相は球面調和関数の位相の選び方に依存する．軌道角運動量を $\boldsymbol{L} \equiv -i\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\nabla}$ と書けば，関係式は $\int d^2\hat{n} Y^{m'}_\ell(\hat{n})^* \boldsymbol{L} Y^m_\ell(\hat{n}) = \boldsymbol{J}^\ell_{m'm}$ で与えられる．

(7.4.61) の符号 ± のため完全に相殺して，期待通りゼロとなる．テンソル型摂動による偏光相関関数の多重極展開係数の寄与は以下で与えられる*20.

$$C^T_{EE,\ell} = \pi^2 T_0^2 \int_0^\infty q^2\, dq \times \left| \int_{t_1}^{t_0} dt\, P(t)\, \Psi(q,t) \left\{ \left[12 + 8\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho = q\, r(t)} \right|^2 , \tag{7.4.63}$$

$$C^T_{BB,\ell} = \pi^2 T_0^2 \int_0^\infty q^2\, dq \times \left| \int_{t_1}^{t_0} dt\, P(t)\, \Psi(q,t) \left\{ \left[8\rho + 2\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho = q\, r(t)} \right|^2 . \tag{7.4.64}$$

式 (7.4.60)，(7.4.61) と式 (7.3.14) を組み合わせれば，温度と偏光の相関関数の多重極展開係数も計算できる．C^T_{TB} は，式 (7.4.61) の波数積分の前にある符号 ± のためヘリシティ ±2 に渡る和が相殺するから期待通り $C^T_{TB} = 0$ となるが，C^T_{TE} ではヘリシティ ±2 に渡る和は 2 を与えるだけなので，式 (7.3.14)，(7.4.62)，(7.4.60) より以下の結果が得られる．

$$C^T_{TE,\ell} = -2\pi^2 T_0^2 \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \int_0^\infty q^2\, dq \times \int_{t_1}^{t_0} dt\, P(t) \Psi(q,t) \left\{ \left[12 + 8\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho = q\, r(t)} \times \int_{t_1}^{t_0} dt'\, d(q,t') \frac{j_\ell\Big(q r(t')\Big)}{q^2 r^2(t')} , \tag{7.4.65}$$

ここで，

$$d(q,t) \equiv \left[\dot{\mathcal{D}}_q(t) - \frac{1}{2}\omega_c(t) \right] \exp\left(-\int_t^{t_0} \omega_c(t')\, dt' \right) \tag{7.4.66}$$

である．

重力波の振幅 $\mathcal{D}_q(t)$ と源泉関数 $\Psi(q,t)$ を計算する方法は 7.3 節で述べた．そこで仮定したのと同じ宇宙論パラメータを用い，式 (7.4.62) と式 (7.4.64) から計算した EE と BB の多重極展開係数を図 7.7 (178 ページ) に示す (TE の係数は後に示す)．

---

*20 これらの公式，および式 (7.4.65) は Zaldarriaga, Seljak，脚注 1 で導かれたものと等価である．

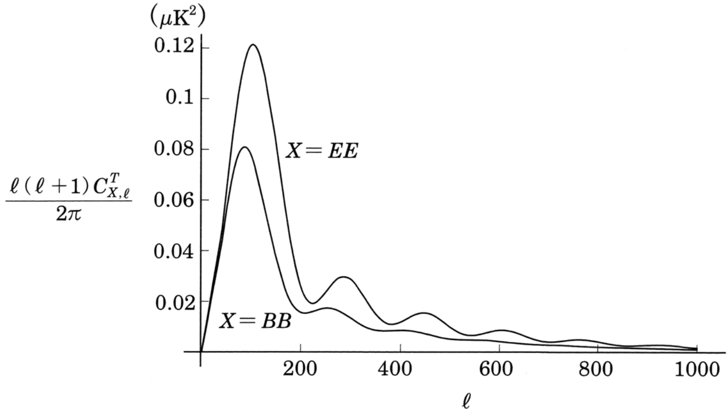


図 7.7　EE と BB 相関の多重極展開係数 $\ell(\ell+1)C^T_{EE,\ell}/2\pi$, $\ell(\ell+1)C^T_{BB,\ell}/2\pi$ を ℓ の関数として示す．宇宙論パラメータは 7.3 節で与えたものを用いた．脚注 22 の文献より抜粋．これらの結果は，コンピュータプログラム CMBfast や CAMB から（同じ宇宙論パラメータを用いて）計算した結果と約 1%の精度で一致している．本書の計算は積分方程式（7.3.22）に基づいているが，コンピュータプログラムはある最大の ℓ で打ち切ったボルツマン方程式に基づいている（これら 2 つのコンピュータプログラムから得られた結果も，互いに 1%程度異なっている）．

式（7.4.62)–(7.4.65）はテンソル型摂動の多重極展開係数を高精度で計算するコンピュータプログラムの基盤にはなるが，これらの公式を眺めただけでは，展開係数の ℓ 依存性の定性的な振る舞いを理解することはできない．特に，式（7.4.62）と式（7.4.64）を見ただけでは，図 7.7 で示すように $\ell > 15$ で $C^T_{BB,\ell} < C^T_{EE,\ell}$ となり，$\ell < 100$ で $C^T_{BB,\ell}$ と $C^T_{EE,\ell}$ が同じ値に近づくことを読み取るのは難しい．

これらの結果は，大きな ℓ ではずっと単純で見通しが良い形に書ける．($\nu \equiv \ell + 1/2$ として）$\rho^2 - \nu^2 \gg \nu^{4/3}$ のときには，球ベッセル関数はよく知られた漸近的振る舞い[*21]を示す．

[*21]（A. Jeffrey によって翻訳され，拡張された）I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press (1980) の公式 8.453.1 を見よ．同じ近似は，J. R. Pritchard, M. Kamionkowski, *Ann. Phys.* **318**, 2 (2005) [astro-ph/0412581] でも使われているが，その後の近似は，本書や脚注 22 の文献の近似とは大きく異なる．

$$j_\ell(\rho) \longrightarrow \frac{\cos b}{\nu\sqrt{\sin b}} \cos\left[\nu(\tan b - b) - \pi/4\right], \tag{7.4.67}$$

ここで $\cos b \equiv \nu/\rho$，$0 \leqq b \leqq \pi/2$ である．一方，$\nu^2 - \rho^2 \gg \nu^{4/3}$ のときは $j_\ell(\rho)$ は指数関数的に小さくなる．$|\rho^2 - \nu^2| < \nu^{4/3}$ のときはどちらの近似も成り立たないが，$j_\ell(\rho)$ はこの領域では滑らかな関数で，式（7.4.67）の因子 $1/\sqrt{\sin b}$ から連想されるような $\rho = \nu$ での特異点は存在しない．$\nu \gg 1$ のときはこの領域の積分に対する寄与は小さいので，近似式（7.4.67）を使っても良いことが期待できる．$\rho^2 - \nu^2 \gg \nu^{4/3} \gg 1$ のときは，$j_\ell(\rho)/\rho^2$ の微分の支配的な寄与は式（7.4.67）の余弦の微分から生じるので，

$$\left[12 + 8\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \rho^2 + \rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right]\frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \longrightarrow -j_\ell(\rho) + j_\ell''(\rho)$$
$$\longrightarrow -\frac{(1+\sin^2 b)\,\cos b}{\nu\sqrt{\sin b}}\cos\left[\nu(\tan b - b) - \pi/4\right], \tag{7.4.68}$$

$$\left[8\rho + 2\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right]\frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \longrightarrow 2j_\ell'(\rho) \longrightarrow -\frac{2\sqrt{\sin b}\cos b}{\nu}\sin\left[\nu(\tan b - b) - \pi/4\right] \tag{7.4.69}$$

とできる（微分を $1/\sqrt{\sin b}$ に作用させると $b = 0$ で可積分でない特異点が現れるように見えるが，これは見かけ上のもの．ρ が ν に非常に近くなると球ベッセル関数の漸近公式（7.4.67）が破綻するだけで，実際には特異点は存在しない）．すると，$\nu \equiv \ell + 1/2 \gg 1$ のとき，式（7.4.62）–（7.4.65）は以下のように近似できる[*22]．

$$C^T_{EE,\ell} = \frac{\pi^2 T_0^2}{\nu^2}\int_0^\infty q^2\,dq$$
$$\times\left|\int_{r(t)>\nu/q} dt\,P(t)\,\Psi(q,t)\right.$$
$$\left.\times\left\{\frac{(1+\sin^2 b)\,\cos b}{\sqrt{\sin b}}\cos\left[\nu(\tan b - b) - \pi/4\right]\right\}_{\cos b = \nu/q\,r(t)}\right|^2, \tag{7.4.70}$$

$$C^T_{BB,\ell} = \frac{\pi^2 T_0^2}{\nu^2}\int_0^\infty q^2\,dq\left|\int_{r(t)>\nu/q} dt\,P(t)\,\Psi(q,t)\right.$$
$$\left.\times\left\{2\sqrt{\sin b}\cos b\,\sin\left[\nu(\tan b - b) - \pi/4\right]\right\}_{\cos b = \nu/q\,r(t)}\right|^2, \tag{7.4.71}$$

---

*22 R. Flauger, S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **75**, 123505 (2007) [astro-ph/0703179].

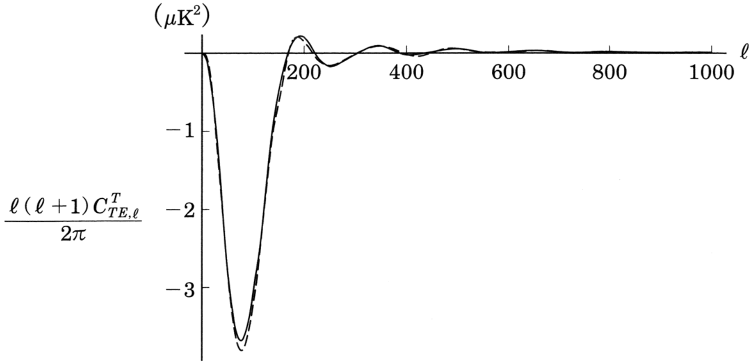


図 7.8　TE 相関の多重極展開係数 $\ell(\ell+1)C^T_{TE,\ell}/2\pi$ を ℓ の関数として示す．脚注 22 の文献より抜粋．実線は厳密な式（7.4.65），破線は近似式（7.4.72）による計算結果を表す．これらの計算に用いた重力波の振幅と源泉関数の計算方法，および宇宙論パラメータは 7.3 節で述べた通り．

$$\begin{aligned} C^T_{TE,\ell} = &-\frac{2\pi^2 T_0^2}{\nu^2}\int_0^\infty q^2\,dq \\ &\times \int_{r(t)>\nu/q} dt\,P(t)\Psi(q,t) \\ &\times \left\{\frac{(1+\sin^2 b)\,\cos b}{\sqrt{\sin b}}\cos\Big[\nu(\tan b - b)-\pi/4\Big]\right\}_{\cos b=\nu/q\,r(t)} \\ &\times \int_{r(t')>\nu/q} dt'\,d(q,t') \\ &\times \left\{\frac{\cos^3 b'}{\sqrt{\sin b'}}\cos\Big[\nu(\tan b' - b')-\pi/4\Big]\right\}_{\cos b'=\nu/q\,r(t')} . \end{aligned} \tag{7.4.72}$$

$C^T_{TE,\ell}$ の近似式と厳密な式（7.4.65）による計算結果の比較を図 7.8 に示す．

便利なことに，$C^T_{EE,\ell}$ と $C^T_{BB,\ell}$ に対してはさらに近似ができる．最終散乱の確率 $P(t)$ が大きい値を持つ狭い時刻 t の範囲内では $b \equiv \cos^{-1}\Big(\nu/qr(t)\Big)$ はそれほど変化しないから，$r(t)$ を $r_L \equiv r(t_L)$ に置き換えられる．ただし，位相 $\nu(\tan b - b)$ に限ってはこの置き換えはできない．$\nu \gg 1$ のときには，位相はこの狭い時刻の範囲内でも大きく変化するからである．さらに，位相が大きく変化することから $\cos[\nu(\tan b - b) - \pi/4]$ と $\sin[\nu(\tan b - b) - \pi/4]$ の差は重要ではなくなるので，

両方とも $\cos[\nu(\tan b - b)]$ に置き換えてしまおう．すると式（7.4.70）と（7.4.71）は以下のようになる[*22]．

$$\ell(\ell+1)C^T_{EE,\ell} \longrightarrow \pi^2 T_0^2 \int_{\nu/r_L}^{\infty} q^2\,dq\,\{(1+\sin^2 b_L)^2\,\cos^2 b_L\}_{\cos b_L=\nu/qr_L} \times \left| \int_{r(t)>\nu/q} dt\,P(t)\,\Psi(q,t)\,\left\{\frac{\cos\left[\nu(\tan b - b)\right]}{\sqrt{\sin b}}\right\}_{\cos b=\nu/q\,r(t)} \right|^2, \tag{7.4.73}$$

$$\ell(\ell+1)C^T_{BB,\ell} \longrightarrow \pi^2 T_0^2 \int_{\nu/r_L}^{\infty} q^2\,dq\,\{4\sin^2 b_L \cos^2 b_L\}_{\cos b_L=\nu/q\,r_L} \times \left| \int_{r(t)>\nu/q} dt\,P(t)\,\Psi(q,t)\,\left\{\frac{\cos\left[\nu(\tan b - b)\right]}{\sqrt{\sin b}}\right\}_{\cos b=\nu/q\,r(t)} \right|^2 \tag{7.4.74}$$

（t に渡る積分中の因子 $1/\sqrt{\sin b}$ では $b = b_L$ としなかったが，これは q に渡る積分の $q = \nu/r_L$ での発散を避けるためである．これらの近似式を用いて計算した結果と厳密な式（7.4.62），（7.4.64）を用いて計算した結果の比較を図 7.9 と 7.10（182 ページ）に示す．

$C^T_{BB,\ell}$ の近似式による計算結果は厳密な式による計算結果と約 1%の精度で一致しており，十分実用に堪える精度を達成している．$C^T_{EE,\ell}$ の近似式による計算結果の精度はそこまで良くはなく，厳密な式による計算結果と約 14%の精度でしか一致していないが，定性的な振る舞いを理解するには十分である．すぐに得られる結論は，すべての実数の b_L に対して $(1+\sin^2 b_L) \geqq 4\sin^2 b_L$ なので，$C^T_{EE,\ell} > C^T_{BB,\ell}$ となることである．次に，ℓ が十分小さく，波数 ℓ/r_L が最終散乱の時刻以降に地平線に入って来る場合（たとえば $\ell < 100$）では，$\Psi(\ell/r_L, t_L)$ は小さく，q に渡る積分は $\cos b$ が小さいときの値に支配される．この場合，$(1+\sin^2 b)^2 \simeq 4\sin^2 b$ となるから，$C^T_{EE,\ell} \simeq C^T_{BB,\ell}$ を得る．すでに述べたように，これらの性質は（少なくともここで選んだ宇宙論パラメータに対しては）図 7.7 で明らかに見て取れる．

$C^T_{BB,\ell}$ は小さいので将来の観測は難しいであろうが，原始 B モード偏光の検出は宇宙論的重力波が存在する明確な証拠となるから，宇宙論にとって非常に重要な意味を持つ．インフレーション理論から期待されるテンソル型摂動について

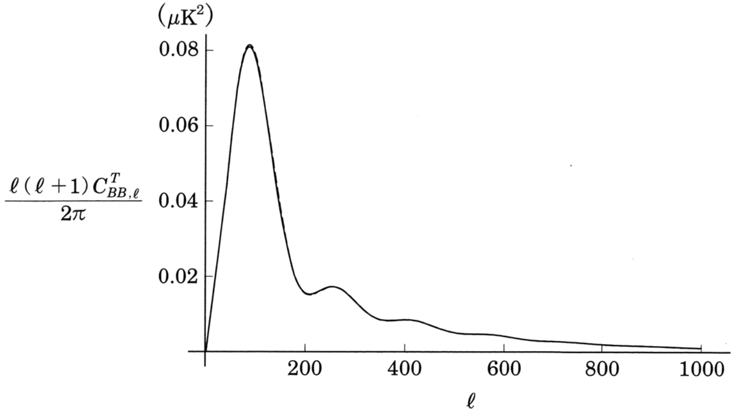


図 7.9　BB 相関の多重極展開係数 $\ell(\ell+1)C^T_{BB,\ell}/2\pi$ を ℓ の関数として示す．脚注 22 の文献より抜粋．実線は厳密な式 (7.4.64)，破線（ほとんど見えない）は近似式（7.4.71）による計算結果を表す．これらの計算に用いた重力波の振幅と源泉関数の計算方法，および宇宙論パラメータは 7.3 節で述べた通り．

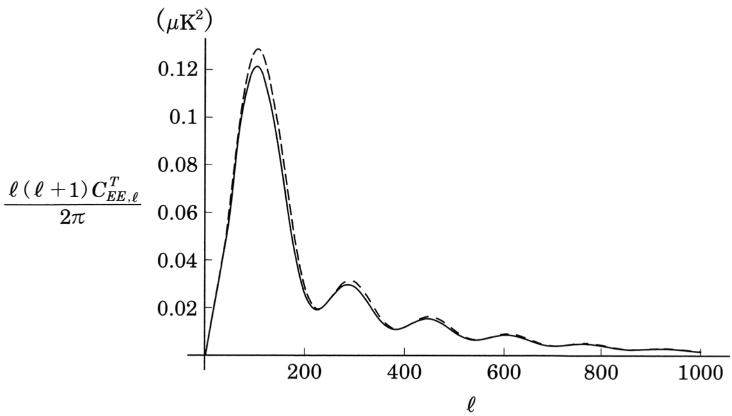


図 7.10　EE 相関の多重極展開係数 $\ell(\ell+1)C^T_{EE,\ell}/2\pi$ を ℓ の関数として示す．脚注 22 の文献より抜粋．実線は厳密な式 (7.4.63)，破線は近似式（7.4.70）による計算結果を表す．これらの計算に用いた重力波の振幅と源泉関数の計算方法，および宇宙論パラメータは 7.3 節で述べた通り．

は 10 章で学ぶ.

* * *

多重極展開係数 $C_{EE,\ell}$，$C_{BB,\ell}$，$C_{TE,\ell}$ を測定する 1 つの方法は，ストークスパラメータや温度ゆらぎの相関を測定し，それを以下に与える相関関数の一般的な理論公式と比較することである[*23]．これらの一般公式は，温度ゆらぎの相関関数の一般公式（2.6.4）[訳注 2]と類似している．一般公式を導くため，まず式（7.4.15）と（7.4.25）から，

$$Q(\hat{n}) = -\frac{1}{2}\sum_{\ell m} a_{E,\ell m}\left[\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) + \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n})^*\right] - \frac{i}{2}\sum_{\ell m} a_{B,\ell m}\left[\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) - \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n})^*\right], \tag{7.4.75}$$

$$U(\hat{n}) = \frac{i}{2}\sum_{\ell m} a_{E,\ell m}\left[\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) - \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n})^*\right] - \frac{1}{2}\sum_{\ell m} a_{B,\ell m}\left[\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) + \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n})^*\right] \tag{7.4.76}$$

を得ておこう．すると，式（7.4.28）と（7.4.29）を用いて相関関数を以下のように計算できる．

$$\langle Q(\hat{n})\, Q(\hat{n}')\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_\ell C_{EE,\ell}\Big(F_\ell(\hat{n},\hat{n}') + G_\ell(\hat{n},\hat{n}')\Big) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_\ell C_{BB,\ell}\Big(F_\ell(\hat{n},\hat{n}') - G_\ell(\hat{n},\hat{n}')\Big), \tag{7.4.77}$$

$$\langle U(\hat{n})\, U(\hat{n}')\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_\ell C_{EE,\ell}\Big(F_\ell(\hat{n},\hat{n}') - G_\ell(\hat{n},\hat{n}')\Big) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_\ell C_{BB,\ell}\Big(F_\ell(\hat{n},\hat{n}') + G_\ell(\hat{n},\hat{n}')\Big), \tag{7.4.78}$$

$$\langle Q(\hat{n})\, U(\hat{n}')\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\sum_\ell C_{EE,\ell}\Big(-F_\ell(\hat{n},\hat{n}') + G_\ell(\hat{n},\hat{n}')\Big) + \frac{1}{2}\mathrm{Im}\sum_\ell C_{BB,\ell}\Big(-F_\ell(\hat{n},\hat{n}') - G_\ell(\hat{n},\hat{n}')\Big), \tag{7.4.79}$$

ここで，

$$F_\ell(\hat{n},\hat{n}') \equiv \sum_m \mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n})\,\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}')^*, \tag{7.4.80}$$

[*23] 相関関数の一般公式は，M. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* **503**, 1 (1998) に与えられている．

[訳注 2] $\langle \Delta T(\hat{n})\Delta T(\hat{n}')\rangle = \sum_{\ell m} C_\ell Y_\ell^m(\hat{n}) Y_\ell^{-m}(\hat{n}') = \sum_\ell C_\ell \left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right) P_\ell(\hat{n}\cdot\hat{n}')$.

$$G_\ell(\hat{n}, \hat{n}') \equiv \sum_m \mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n})\,\mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n}') \,. \tag{7.4.81}$$

また，式（2.6.2）[訳注 3]（の $a_{\ell m}$ はここでは $a_{T,\ell m}$ と書く）と式（7.4.27），(7.4.75)，(7.4.76）より，温度ゆらぎとストークスパラメータの相関関数は以下のように得られる．

$$\langle \Delta T(\hat{n})\, Q(\hat{n}')\rangle = -\sum_\ell C_{TE,\ell}\, \mathrm{Re} H_\ell(\hat{n}, \hat{n}') \,, \tag{7.4.82}$$

$$\langle \Delta T(\hat{n})\, U(\hat{n}')\rangle = \sum_\ell C_{TE,\ell}\, \mathrm{Im} H_\ell(\hat{n}, \hat{n}') \,, \tag{7.4.83}$$

ここで，

$$H_\ell(\hat{n}, \hat{n}') \equiv \sum_m Y_\ell^m(\hat{n})\,\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}')^* \tag{7.4.84}$$

であり，Y_ℓ^m は通常の球面調和関数を表す．

関数 $F_\ell(\hat{n}, \hat{n}')$ と $G_\ell(\hat{n}, \hat{n}')$ を計算するため，まず（たとえば式（7.4.22）の最後の行を見るなどして）$\hat{n}$ が z 軸の方向 $\hat{z}$ にあって $\theta = \phi = 0$ のときには，

$$\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{z}) = \delta_{m,-2}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \tag{7.4.85}$$

であることを導いておこう．すると，定義式（7.4.16），(7.4.11）と変換則の式（7.4.18）を用いて $\mathcal{Y}_\ell^m$ をユニタリーな回転行列の要素として書くことができる[*24]．

$$\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) = \sum_{m'} D^{(\ell)}_{m'm}\Big(S^{-1}(\hat{n})\Big)\mathcal{Y}_\ell^{m'}(\hat{z}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} D^{(\ell)}_{-2,m}\Big(S^{-1}(\hat{n})\Big) \,, \tag{7.4.86}$$

ここで $S(\hat{n})$ は式（7.4.12）で与えられる回転行列で $\hat{z}$ を $\hat{n}$ に移す．式（7.4.58）を使えば以下の結果を導くことができる．

$$\mathcal{Y}^{-m}(\hat{n}) = (-1)^\ell \mathcal{Y}^m(-\hat{n})^* \,. \tag{7.4.87}$$

ゆえに，回転群の性質 $D^{(\ell)}(S)D^{(\ell)}(S') = D^{(\ell)}(SS')$ と $D^{(\ell)}(S)$ とユニタリー性を用いることで**加法定理**[*25]が得られ，これから相関関数の公式（7.4.77）–(7.4.79）を計算するのに必要な関数を求めることができる．

訳注 3　$a^*_{\ell m} = a_{\ell\,-m}$.

*24　E. Newman, J. Penrose, ref. 3; J. N. Goldberg, A. J. MacFarlane, E. T. Newman, F. Rorlich, E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **8**, 2155 (1967); K. S. Thorne, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 299 (1980).

*25　スピン 2 の球面調和関数の一般的な加法定理は，W. Hu, M. White, *Phys. Rev. D* **56**, 596 (1997) [astro-ph/9702170] に与えられている．

$$F_\ell(\hat{n},\hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi} D^{(\ell)}_{-2,-2}\Big(S^{-1}(\hat{n})S(\hat{n}')\Big) , \tag{7.4.88}$$

$$G_\ell(\hat{n},\hat{n}') = (-1)^\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} D^{(\ell)}_{-2,-2}\Big(S^{-1}(\hat{n})S(-\hat{n}')\Big) . \tag{7.4.89}$$

関数 $H_\ell(\hat{n},\hat{n}')$ を計算するため，球面調和関数もまた回転行列の要素として書けることに注意しよう．$\theta=\phi=0$ のときの公式 $Y_\ell^m(\hat{z}) = \sqrt{(2\ell+1)/4\pi}\,\delta_{m0}$ と変換則の式（7.4.18）より，

$$Y_\ell^m(\hat{n}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, D^{(\ell)}_{0,m}\Big(S^{-1}(\hat{n})\Big)$$

となる．ゆえに，再び $D^{(\ell)}$ の回転群の性質を用いれば以下の結果を得る．

$$H_\ell(\hat{n},\hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi} D^{(\ell)}_{0,-2}\Big(S^{-1}(\hat{n})S(\hat{n}')\Big) . \tag{7.4.90}$$

余談だが，これらの関数は以下の関係を満たす．

$$F_\ell(-\hat{n},-\hat{n}') = \sum_m \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n})^*\, \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n}') = F^*_\ell(\hat{n},\hat{n}') , \tag{7.4.91}$$

$$G_\ell(-\hat{n},-\hat{n}') = \sum_m \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n})^*\, \mathcal{Y}_\ell^{m}(\hat{n}')^* = G^*_\ell(\hat{n},\hat{n}') . \tag{7.4.92}$$

$Y_\ell^m(-\hat{n}) = (-1)^\ell Y_\ell^{-m}(\hat{n})^*$ を使えば，

$$H_\ell(-\hat{n},-\hat{n}') = \sum_m Y_\ell^{-m}(\hat{n})^*\, \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n}') = H^*_\ell(\hat{n},\hat{n}') . \tag{7.4.93}$$

したがって，相関関数は空間反転に対して以下の性質を持つ．

$$\langle Q(\hat{n})\, Q(\hat{n}')\rangle = \langle Q(-\hat{n})\, Q(-\hat{n}')\rangle , \tag{7.4.94}$$

$$\langle U(\hat{n})\, U(\hat{n}')\rangle = \langle U(-\hat{n})\, U(-\hat{n}')\rangle , \tag{7.4.95}$$

$$\langle Q(\hat{n})\, U(\hat{n}')\rangle = -\langle Q(-\hat{n})\, U(-\hat{n}')\rangle , \tag{7.4.96}$$

$$\langle \Delta T(\hat{n})\, Q(\hat{n}')\rangle = \langle \Delta T(-\hat{n})\, Q(-\hat{n}')\rangle , \tag{7.4.97}$$

$$\langle \Delta T(\hat{n})\, U(\hat{n}')\rangle = -\langle \Delta T(-\hat{n})\, U(-\hat{n}')\rangle , \tag{7.4.98}$$

これらの性質は，ストークスパラメータと温度ゆらぎの空間反転に対する変換性と，確率分布の空間反転対称性から期待される通りの結果である．

$\hat{n}$ と $\hat{n}'$ の方向に観測されるストークスパラメータの相関関数を測定する際，$\hat{n}$ と $\hat{n}'$ が同じ子午線上に来るように（つまり $\phi=\phi'$ となるように）極座標系を選

ぶと便利である（たいていの場合は，ストークスパラメータを定義する 2 つの偏光ベクトルのうちの 1 つを $\hat{n}$ と $\hat{n}'$ を結ぶ大円に沿うように選ぶ方法を用いるが[*26]，本書では 2 つの偏光ベクトルは常に θ と ϕ の増加する方向に定義するので，上記のように偏光ベクトルを選ぶ方法と本書のように極座標系を選ぶ方法は同じ結果を与える）．このように極座標系を選ぶ利点は，関数 $F_\ell(\hat{n},\hat{n}')$，$G_\ell(\hat{n},\hat{n}')$，$H_\ell(\hat{n},\hat{n}')$ がすべて実数となり，$\theta-\theta'$ のみに依存するようになることである．これを確かめてみよう．$\hat{z}$ を $\hat{n}$ に移す標準的な回転を角運動量行列 $J_i^{(\ell)}$ を用いて表現すれば，

$$D^{(\ell)}\Big(S(\hat{n})\Big) = \exp\Big(-i\phi J_3^{(\ell)}\Big)\exp\Big(-i\theta J_2^{(\ell)}\Big)$$

式（7.4.88)–(7.4.90）は以下のように書き換えられる．

$$F_\ell(\hat{n},\hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi}\Bigg[\exp\Big(i\theta J_2^{(\ell)}\Big)\exp\Big(i\phi J_3^{(\ell)}\Big) \times \exp\Big(-i\phi' J_3^{(\ell)}\Big)\exp\Big(-i\theta' J_2^{(\ell)}\Big)\Bigg]_{-2,-2},$$

$$G_\ell(\hat{n},\hat{n}') = (-1)^\ell\frac{2\ell+1}{4\pi}\Bigg[\exp\Big(i\theta J_2^{(\ell)}\Big)\exp\Big(i\phi J_3^{(\ell)}\Big) \times \exp\Big(-i[\phi'+\pi] J_3^{(\ell)}\Big)\exp\Big(-i[\pi-\theta'] J_2^{(\ell)}\Big)\Bigg]_{-2,-2},$$

$$H_\ell(\hat{n},\hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi}\Bigg[\exp\Big(i\theta J_2^{(\ell)}\Big)\exp\Big(i\phi J_3^{(\ell)}\Big) \times \exp\Big(-i\phi' J_3^{(\ell)}\Big)\exp\Big(-i\theta' J_2^{(\ell)}\Big)\Bigg]_{0,-2}.$$

$\phi=\phi'$ であれば，

$$F_\ell(\hat{n},\hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi}\Bigg[\exp\Big(i(\theta-\theta')J_2^{(\ell)}\Big)\Bigg]_{-2,-2}$$

となり，確かに $\phi=\phi'$ のときの $F_\ell(\hat{n},\hat{n}')$ は $\theta-\theta'$ のみに依存する．また，$iJ_2^{(\ell)}$ は実行列なので $\phi=\phi'$ のときの $F_\ell(\hat{n},\hat{n}')$ もまた実数となる．G_ℓ の場合，$\phi=\phi'$ のとき，

---

*26 Kamionkowski, Kosowsky, Stebbins，脚注 1 を参照．

$$
\begin{aligned}
G_\ell(\hat{n},\hat{n}') &= (-1)^\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \\
&\quad \times \left[\exp\left(i\theta J_2^{(\ell)}\right) \exp\left(-i\pi J_3^{(\ell)}\right) \exp\left(-i[\pi-\theta']J_2^{(\ell)}\right)\right]_{-2,-2} \\
&= (-1)^\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \\
&\quad \times \left[\exp\left(i\theta J_2^{(\ell)}\right) \exp\left(+i[\pi-\theta']J_2^{(\ell)}\right) \exp\left(-i\pi J_3^{(\ell)}\right)\right]_{-2,-2} \\
&= (-1)^\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[\exp\left(i(\theta-\theta'+\pi)J_2^{(\ell)}\right)\right]_{-2,-2}
\end{aligned}
$$

となり，$iJ_2^{(\ell)}$ は実行列なので $\phi=\phi'$ のときの $G_\ell(\hat{n},\hat{n}')$ もまた実数であり，$\theta-\theta'$ のみに依存する．最後に，$F_\ell(\hat{n},\hat{n}')$ のときと同じ理由から，$H_\ell(\hat{n},\hat{n}')$ は実数で $\theta-\theta'$ にのみ依存する．したがって，$\phi=\phi'$ となるように座標系が選ばれたとき，相関関数 $\langle Q(\hat{n})\,Q(\hat{n}')\rangle$，$\langle U(\hat{n})\,U(\hat{n}')\rangle$，$\langle \Delta T(\hat{n})\,Q(\hat{n}')\rangle$ は $\hat{n}$ と $\hat{n}'$ の間の角度 $\theta-\theta'$ のみに依存し，$\langle Q(\hat{n})\,U(\hat{n}')\rangle$ と $\langle \Delta T(\hat{n})\,U(\hat{n}')\rangle$ はゼロになると結論できる．また，$\langle Q(\hat{n})\,Q(\hat{n}')\rangle$ と $\langle U(\hat{n})\,U(\hat{n}')\rangle$ は $\hat{n}$ と $\hat{n}'$ の入れ替えに対して明らかに対称なので，$\phi=\phi'$ のときにはこれらは $|\theta-\theta'|$，つまり $\hat{n}$ と $\hat{n}'$ がなす角度の大きさにしか依存しないことがわかる．

第8章
構造の成長

6章では，放射優勢期と物質優勢期における小さなゆらぎの進化を，放射と物質が相互作用しなくなる脱結合の時刻まで追った．本章ではこの話の続きとして，脱結合の時刻以降のゆらぎの進化を議論しよう．8.1節は線形解析の続きで，まだ摂動が小さい頃の進化を追う．このような線形解析が使える時期は，宇宙の物質分布の研究が高赤方偏移に移るに従って観測可能になってきている．これから学ぶように，宇宙マイクロ波背景放射の異方性から得られた結果を，ゆらぎの波長がより短い領域にも拡張できるという重要な示唆が物質ゆらぎの分布の観測データから得られている．より将来的には，暗黒エネルギーが宇宙膨張におよぼす効果に関する情報も得られると期待されている．

もちろん，星や銀河や銀河団の存在を見れば明らかなように，いずれ物質密度の摂動は線形近似が使えなくなるほど大きくなる．宇宙に見られるこれらの構造は2段階の過程を経て誕生したと考えられている[*1]．まず，物質密度が平均値より少し大きな領域では，冷たい暗黒物質とバリオン物質は平均的な宇宙膨張と比べて比較的ゆっくりと膨張し，ある最小の密度に達した後に収縮を始める．このシナリオは8.2節で扱う．次に8.3節で示すように，もし密度の高い領域が十分に大きければ，バリオン物質も冷たい暗黒物質とともに収縮する．この収縮後の第2段階では，バリオン物質が放射冷却を通じてエネルギーを失い，ガス雲からなる原始銀河へと凝縮する．このガス雲から最終的に星が誕生するのである．一方，冷たい暗黒物質の粒子は放射冷却でエネルギーを失うことができないので，これらの粒子は銀河の周りに巨大でほぼ球対称な「ハロー」を形成する．本書ではこの第2段階は詳しく扱わない．というのも，これを扱うのに必要な天体物理学や数学は複雑で，詳しく述べるには本がもう1冊必要となってしまうからである．

---

*1 S. D. M. White, M. J. Rees, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **183**, 341 (1978).

8.1　再結合後の線形摂動論

ほぼすべての自由電子が消え去った後のバリオンプラズマは光子と結合せず，冷たい暗黒物質と同じように振る舞うようになる.（短波長領域におけるバリオンの圧力の効果については 8.3 節で述べる.）冷たい物質の密度摂動が支配する重力場の摂動は，付録 F で述べるようにニュートン力学を用いて扱うことができ，密度の摂動と平均密度の比が $a \propto t^{2/3}$ に比例して成長することが導かれる．しかし，比例係数（つまり振幅の波長依存性）を原始ゆらぎの振幅と波長依存性 $\mathcal{R}_q^0$ と結びつけるには，相対論的な扱いが必要となる．さらに，脱結合の時刻以前のバリオンと放射の相互作用から生じる，効果としては小さいが重要な密度ゆらぎの振動を記述したり，真空のエネルギーが重要となる現在時刻まで密度ゆらぎの発展を追ったりする際にも相対論的な扱いが必要となる.

相対論的な解析ではバリオンと冷たい暗黒物質の扱いが多少異なる．これまでと同様，冷たい暗黒物質の速度ポテンシャルがゼロになる同期ゲージを選ぶが，このゲージではバリオンの速度ポテンシャルはゼロにならない．脱結合後，トムソン散乱を通じたバリオンの速度ポテンシャルと光子の速度ポテンシャルの結合が切れるので，バリオンの保存則の式を得るには式（5.3.34）で $\bar{p}_B$，δp_{Bq}，π^S_{Bq} をすべてゼロにすればよい（脱結合後のバリオンはゆっくりとしか運動しないため）．すると，

$$\dot{\delta\rho}_{Bq} + 3H\delta\rho_{Bq} - \frac{q^2}{a^2}\bar{\rho}_B\delta u_{Bq} = -\bar{\rho}_B\psi_q$$

が得られ，両辺を $\bar{\rho}_B \propto a^{-3}$ で割って式変形すれば,

$$\dot{\delta}_{Bq} - (q^2/a^2)\delta u_{Bq} = -\psi_q \tag{8.1.1}$$

を得る．ここで，以前と同様に $\delta_{Bq} \equiv \delta\rho_{Bq}/\bar{\rho}_B$ を表す．冷たい暗黒物質の場合は速度ポテンシャルがないので，その保存則には式（6.2.11）を用いる.

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q. \tag{8.1.2}$$

繰り返すが，冷たい暗黒物質の速度ポテンシャルがゼロなのにバリオンの速度ポテンシャルがゼロとならないのは，単に我々がそのようなゲージを選んだからである．したがって，δu_{Bq} はバリオンと暗黒物質の**相対速度**のポテンシャルだとみなすのが一番良い.

バリオンの運動量保存則は，式（5.3.32）で圧力と非等方ストレスをゼロにすれば得られる．

$$\partial_0(\bar{\rho}_B \delta u_{Bq}) + 3H\bar{\rho}_B \delta u_{Bq} = 0.$$

両辺を $\bar{\rho}_B \propto a^{-3}$ で割って式変形すれば，以下の単純な結果を得る．

$$\delta \dot{u}_{Bq} = 0\,. \tag{8.1.3}$$

（8.3 節で見るように，非常に短波長のゆらぎを除けば，再結合後のバリオンの圧力は無視して良い．）最後に，光子の密度とニュートリノの密度の摂動の寄与を無視すれば，重力場の式（5.3.36）は以下のようになる．

$$\frac{d}{dt}\Big(a^2\psi_q\Big) = -4\pi G a^2 \bar{\rho}_M \Big((1-\beta)\delta_{Dq} + \beta\delta_{Bq}\Big)\,. \tag{8.1.4}$$

β は以下で与えられる定数を表す．

$$\beta \equiv \frac{\bar{\rho}_B}{\bar{\rho}_M} = \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \approx 1/6\,. \tag{8.1.5}$$

ここで β に比例する項を無視せずに残してあるのは，これから学ぶように，これらの項が，小さいけれども非常に特徴のある効果を及ぼすことによる．

これらの方程式の初期条件を導くため，宇宙膨張における真空のエネルギーや空間曲率の寄与が無視できるような十分早期（たとえば $z > 1$）では $a \propto t^{2/3}$，$4\pi G\bar{\rho}_M = 2/3t^2$ であることを使おう．すると式（8.1.4）は以下のようになる．

$$\frac{d}{dt}\Big(t^{4/3}\psi_q\Big) = -\frac{2}{3}t^{-2/3}\Big((1-\beta)\delta_{Dq} + \beta\delta_{Bq}\Big)\,. \tag{8.1.6}$$

式（8.1.1)–(8.1.3）と式（8.1.6）の一般解が，

$$\psi_q = a_q t^{-1/3} + b_q t^{-2} + \beta\delta u_{Bq} q^2/a^2\,, \tag{8.1.7}$$

$$\delta_{Bq} = -\frac{3}{2}a_q t^{2/3} + b_q t^{-1} + (1-\beta)c_q - 3(1-\beta)t(q^2/a^2)\delta u_{Bq}\,, \tag{8.1.8}$$

$$\delta_{Dq} = -\frac{3}{2}a_q t^{2/3} + b_q t^{-1} - \beta c_q + 3\beta t(q^2/a^2)\delta u_{Bq} \tag{8.1.9}$$

で与えられることは簡単に確認できる．積分定数 a_q，b_q，c_q，δu_{Bq} は，これらの解を物質と放射の脱結合の時刻での ψ_q，δ_{Bq}，δ_{Dq}，δu_{Bq} の値と合わせることで求められる．後期では，この解のうち係数 a_q を持つ第 1 項のみを考えれば良い．それ以外の項と第 1 項の比は $t^{-5/3}$，$t^{-2/3}$，t^{-1} に比例して減衰する．係数 a_q を計算するため，$\beta\delta_{Bq} + (1-\beta)\delta_{Dq} - t\psi_q + \beta t(q^2/a^2)\delta u_{Bq} = -5a_q t^{2/3}/2$ で

あることに着目しよう．この t を脱結合の時刻 t_L[*1]（そこでは良い近似で $\delta_{Bq} = \delta_{\gamma q}$，$\delta u_{Bq} = \delta u_{\gamma q}$ が成り立つ）と等しいと置けば，$t \gg t_L$ において以下の結果が得られる．

$$\begin{aligned}\delta_{Dq}(t) &\longrightarrow \delta_{Bq}(t) \longrightarrow -\frac{3}{2}a_q t^{2/3} \\ &\longrightarrow \frac{3}{5}\left(\frac{t}{t_L}\right)^{2/3}\Big[\beta\delta_{\gamma q}(t_L) + (1-\beta)\delta_{Dq}(t_L) - t_L\psi_q(t_L) \\ &\qquad + \beta t_L(q^2/a_L^2)\delta u_{\gamma q}(t_L)\Big] . \qquad (8.1.10)\end{aligned}$$

ここで，バリオン密度の摂動とその平均密度の比と，暗黒物質密度の摂動とその平均密度の比は脱結合時において非常に異なっているが，脱結合後はこれらは互いに同じ値に近づくことに着目しよう．これは，1.9 節において銀河団の X 線観測のデータを議論した際に用いた仮定である．これから，全物質密度の摂動とその平均密度の比 δ_{Mq} は，

$$\delta_{Mq} \equiv \frac{\bar{\rho}_D\delta_{Dq} + \bar{\rho}_B\delta_{Bq}}{\bar{\rho}_D + \bar{\rho}_B} \longrightarrow \delta_{Dq} \longrightarrow \delta_{Bq} \qquad (8.1.11)$$

に近づくことがわかる．

このように，物質密度の摂動は最終的にすべて等しくなるので，これからは $\delta_{Mq}(t)$ を主に扱う．そして，真空のエネルギーが無視できなくなる現在の時刻まで摂動の進化を追うことにする．式（8.1.1）–（8.1.4）によれば，光子とニュートリノの密度ゆらぎを無視する近似では $\delta_{Mq}(t)$ は次の 2 階の微分方程式に従う．

$$\frac{d}{dt}\left[a^2\frac{d}{dt}\delta_{Mq}\right] = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_M \delta_{Mq} . \qquad (8.1.12)$$

この方程式と式（8.1.10）から得られる最も重要な帰結は，暗黒エネルギーに何を仮定しようと，再結合よりもずっと後では $\delta_{Mq}(t)$ の解のうち $1/t$ に比例して

[*1] 下付き添字 L は「最終散乱（Last scattering）」の略で，水素原子の再結合（Recombination）にともなう放射と物質の脱結合（Decoupling）の時刻を表す（この時刻を表すのに添字 R や D を使ってしまうと，放射（Radiation）と暗黒物質（Dark matter）を表すのにずっと使っている添字 R，D と混同してしまう恐れがある）．もちろん，これは厳密な意味での最終散乱時刻ではない．いくつかのマイクロ波背景放射の光子は，脱結合の時刻よりずっと後で水素原子が再電離された際にも再び散乱される．また，正確にいえばこの t_L は（マイクロ波背景放射の異方性を扱ったときに定義したように）光子の視点から見て光子が電子との頻繁な運動量のやりとりをやめた時刻ではなく，それよりも少し遅い時刻の，電子の視点から見て電子が光子との頻繁な運動量のやりとりをやめた時刻に相当する．ただ，R_L は 1 とそれほど違わないので，これらの時刻はほぼ同じとなる．

減衰する項が無視でき，$\delta_{Mq}(t)$ の q 依存性と t 依存性が分離することである．

$$\delta_{Mq}(t) = \Delta(q)\, F(t), \tag{8.1.13}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\Delta(q) &= \beta\delta_{\gamma q}(t_L) + (1-\beta)\delta_{Dq}(t_L) \\ &\quad - t_L\psi_q(t_L) + \beta t_L(q^2/a_L^2)\delta u_{\gamma q}(t_L)\end{aligned} \tag{8.1.14}$$

で，$F(t)$ は微分方程式，

$$\frac{d}{dt}\left[a^2\frac{d}{dt}F\right] = 4\pi G a^2\bar{\rho}_M F \tag{8.1.15}$$

を満たす．この微分方程式の初期条件は，再結合よりもずっと後だが暗黒エネルギーが重要となる以前の時刻で与えることができ，以下のように書ける．

$$F(t) \longrightarrow \frac{3}{5}\left(\frac{t}{t_L}\right)^{2/3} . \tag{8.1.16}$$

たとえば，もし真空のエネルギーが定数だと仮定すれば，$a(t)$ に関するフリードマン方程式は，

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\Big(\rho_\Lambda + \bar{\rho}_M\Big)} = H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}\sqrt{1+1/x} \tag{8.1.17}$$

となる．ここで，

$$x \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\bar{\rho}_M} = \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \tag{8.1.18}$$

である．t の代わりに x を独立変数とすれば，式（8.1.15）をパラメータを含まない形に書き換えることができる．

$$\sqrt{x(1+x)}\frac{d}{dx}\left(x^{7/6}\sqrt{1+x}\,\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{6x^{1/3}}F\ . \tag{8.1.19}$$

$x \ll 1$ で $t^{2/3}$ に比例するような成長解は以下で与えられる[*2]．

$$F \propto \sqrt{\frac{1+x}{x}}\int_0^x \frac{du}{u^{1/6}(1+u)^{3/2}}\ .$$

式（8.1.16）より，$x \ll 1$ では，

$$F \longrightarrow \frac{3}{5}\left(\frac{a}{a_L}\right) = \frac{3}{5}(1+z_L)\left(\frac{x\Omega_M}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3}$$

[*2] H. Martel, *Astrophys. J.* **377**, 7 (1991).

表 8.1　関数 $C(x)$ の値．これは $x \equiv (\Omega_\Lambda/\Omega_M)(a/a_0)^3$ の関数で，暗黒エネルギーによる物質ゆらぎの成長の抑制を表す補正因子を与える．

x	$C(x)$	x	$C(x)$
0	1	1.0	0.8725
0.1	0.9826	1.5	0.8314
0.2	0.9667	2.0	0.7981
0.3	0.9520	2.5	0.7702
0.5	0.9256	3.0	0.7462
0.7	0.9025	3.5	0.7254

となることが要請されるから，解は，

$$F(t) = \frac{3}{5}\left(\frac{a(t)}{a_L}\right) C\left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^3\right) \tag{8.1.20}$$

と書ける．$C(x)$ は $C(0) = 1$ と規格化された補正因子で次のように定義する．

$$C(x) \equiv \frac{5}{6} x^{-5/6}\sqrt{1+x}\int_0^x \frac{du}{u^{1/6}(1+u)^{3/2}} \,. \tag{8.1.21}$$

$C(x)$ の数値を表 8.1 に与える．

これより，すべての波数と時刻において，暗黒エネルギーは物質の密度ゆらぎの成長を抑制することがわかる．

脱結合の時刻での情報を持っているのは $\Delta(q)$ であるが，$\Delta(q)$ の代わりに**パワースペクトル** $P(k)$ を用いるのが慣例となっている．これは，物理的な波数の現在時刻での値 $k \equiv q/a_0$ の関数として以下のように定義される量である[*3]．

$$P(k) \equiv (2\pi)^3 a_0^3 F^2(t_0)\,|\Delta(a_0 k)|^2 \,. \tag{8.1.22}$$

宇宙の大規模構造のサーベイ観測の多くは，観測結果を $P(k)$ の形で報告している．

ここで，これらのサーベイ観測がどのようにして $\Delta(q)$ や $P(k)$ を測定するのか述べておこう．ある単一の支配的なスカラーモードに対しては，(空間曲率がゼロだと仮定すれば) 座標空間における物質密度の摂動は式 (5.2.1) のようなフーリ

[*3] 因子 $(2\pi)^3$ が含まれているのは，位置空間の摂動のフーリエ変換がたいてい因子 $(2\pi)^{-3/2}$ を含むからで，因子 a_0^3 が含まれているのは，これらの 3 次元フーリエ変換がたいてい共動的波数 q ではなく物理的な波数の現在時刻での値 $k \equiv q/a_0$ に渡る積分として書かれるからである．もし共動座標を $a_0 = 1$ と規格化すれば，本節の q はすべて k に置き換えることができる．

エ変換で書ける.

$$\delta_M(\boldsymbol{x},t) = \int d^3q\,\alpha(\boldsymbol{q})\,\delta_{Mq}(t)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} = F(t)\int d^3q\,\alpha(\boldsymbol{q})\,\Delta(q)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{8.1.23}$$

ここで $\alpha(\boldsymbol{q})$ は次のように規格化された確率変数である.

$$\langle\alpha(\boldsymbol{q})\alpha^*(\boldsymbol{q}')\rangle = \delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\ . \tag{8.1.24}$$

$\Delta(q)$ は，空間の異なる点における物質密度の相関関数の測定や，あるいはより直接的に，サーベイ体積[訳注 1]に渡る物質密度のフーリエ積分の 2 乗を波数空間で角度平均して求めることができる.

付録 D で議論するエルゴード定理によれば，密度ゆらぎが相関を持つ体積に比べてサーベイ体積が大きければ，密度ゆらぎの積のアンサンブル平均はこれらの積のサーベイ体積に渡る平均値から求めることができる．たとえば，2 点相関関数は以下のように求められる.

$$\langle\delta_M(\boldsymbol{x},t)\,\delta_M(\boldsymbol{y},t)\rangle = \frac{1}{V}\int_V d^3z\,\delta_M(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},t)\,\delta_M(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},t)\ . \tag{8.1.25}$$

もちろん，我々は密度ゆらぎを空間の 3 次元的な位置と時刻の関数としてではなく，空における角度位置と赤方偏移の関数として測定するから，実際に測定される相関関数は，赤方偏移 z と視線方向 $\hat{n}$ で観測される物質の密度ゆらぎと，赤方偏移 z' と視線方向 $\hat{n}'$ で観測される物質の密度ゆらぎとの相関である.

$$\xi(z,\hat{n};z',\hat{n}') \equiv \left\langle \delta_M\Big(r(z)\hat{n},t(z)\Big)\,\delta_M\Big(r(z')\hat{n}',t(z')\Big)\right\rangle\ , \tag{8.1.26}$$

ここで，$r(z)$ と $t(z)$ は赤方偏移 z に対応するロバートソン–ウォーカー時空の共動動径座標と時刻を表す．式 (8.1.23)，(8.1.24)，(8.1.13) を用いれば，この相関関数は以下のように書ける.

$$\begin{aligned}\xi(z,\hat{n};z',\hat{n}') &= \int d^3q\,\delta_{Mq}(t(z))\,\delta^*_{Mq}(t(z'))\exp\Big(i\boldsymbol{q}\cdot(r(z)\hat{n}-r(z')\hat{n}')\Big)\\ &= F\Big(t(z)\Big)F\Big(t(z')\Big)\int d^3q\,|\Delta(q)|^2\,\exp\Big(i\boldsymbol{q}\cdot(r(z)\hat{n}-r(z')\hat{n}')\Big)\ .\end{aligned} \tag{8.1.27}$$

$P(k)$ を用いれば，

訳注 1　宇宙の物質分布を測定する領域の体積のこと.

$$\xi(z,\hat{n};z',\hat{n}') = \frac{1}{2\pi^2}\frac{F\Big(t(z)\Big)\,F\Big(t(z')\Big)}{F^2(t_0)}\int_0^\infty k\,P(k)\,dk \\ \times\frac{\sin\Big(k\Big|d_S(z)\hat{n}-d_S(z')\hat{n}'\Big|\Big)}{\Big|d_S(z)\hat{n}-d_S(z')\hat{n}'\Big|} \tag{8.1.28}$$

となり，$d_S(z)$ は以下で定義する便利な**構造距離**を表す．この距離はある赤方偏移 z の $r(z)$，角径距離，および光度距離と以下のように関係している．

$$d_S(z) \equiv a_0 r(z) = (1+z)d_A(z) = (1+z)^{-1}d_L(z)\,.$$

式（8.1.28）は，$d_S(z)$ がわかっていれば観測される ξ からパワースペクトルを決めるのに使えるし，逆に，パワースペクトルの特徴について何かわかっていれば $d_S(z)$ を測定するのにも使える．特に，比較的低赤方偏移の観測では，$d_S(z) \simeq z/H_0$，$t(z) \simeq t_0$ と近似できるから，式（8.1.28）は，

$$\xi(z,\hat{n};z',\hat{n}') = \frac{H_0}{2\pi^2}\int_0^\infty k\,P(k)\,dk\;\frac{\sin\Big((k/H_0)\Big|z\hat{n}-z'\hat{n}'\Big|\Big)}{\Big|z\hat{n}-z'\hat{n}'\Big|} \tag{8.1.29}$$

となる．この式を見るとわかるように，相関関数の形の測定からはパワースペクトルの k 依存性ではなく，k/H_0 依存性が得られることに注意しよう．

大きなサーベイ観測では，物質密度をサーベイ体積に渡ってフーリエ積分し，その 2 乗を波数空間で角度平均して $P(k)$ を測定するのがより一般的である．この目的のため，フーリエ変換を共動サーベイ体積 V に渡る積分で定義しよう．

$$\delta^V_{M\boldsymbol{Q}}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}(2\pi)^{3/2}}\int_V d^3x\; e^{-i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x}}\delta_M(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{8.1.30}$$

（規格化をこのようにとった理由は後でわかる.）式（8.1.23）を用いれば，これは，

$$\delta^V_{M\boldsymbol{Q}}(t) = \int d^3q\;\alpha(\boldsymbol{q})F_V(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{Q})\delta_{Mq}(t) \tag{8.1.31}$$

と書け，関数 $F_V(\boldsymbol{q})$ は以下で定義される．

$$F_V(\boldsymbol{q}) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}(2\pi)^{3/2}}\int_V d^3x\; e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\,. \tag{8.1.32}$$

共動サーベイ体積 V がたくさんの共動波長 $2\pi/q$ を含んでいれば，$|\delta^V_{M\boldsymbol{Q}}|^2$ の角度平均はアンサンブル平均と同じになる．

$$\frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{Q}\left|\delta^V_{M\boldsymbol{Q}}(t)\right|^2 = \left\langle\frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{Q}\left|\delta^V_{M\boldsymbol{Q}}(t)\right|^2\right\rangle . \tag{8.1.33}$$

これは単にもっともらしいだけではなく，きちんと形式的に成り立つことを本節の最後で示す．式（8.1.31）と（8.1.24）を用いれば，左辺は次のようになる．

$$\frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{Q}\ \left|\delta^V_{M\boldsymbol{Q}}(t)\right|^2 = \frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{Q}\int d^3q\ |F_V(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{Q})|^2\ \left|\delta_{Mq}(t)\right|^2 . \tag{8.1.34}$$

さて，V が十分に大きければ，$F_V(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{Q})$ は $((2\pi)^{3/2}/\sqrt{V})\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{Q})$ に近づくから，

$$|F_V(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{Q})|^2 \longrightarrow \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{V}}\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{Q})F_V(0) = \delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{Q}) \tag{8.1.35}$$

が得られ，したがって，

$$\frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{Q}\ \left|\delta^V_{M\boldsymbol{Q}}(t)\right|^2 = |\delta_{MQ}(t)|^2 \tag{8.1.36}$$

を得る．ここで $Q\equiv|\boldsymbol{Q}|$ である．

ここで，我々が測定するのは位置と時刻の関数としての密度ゆらぎではなく，視線方向と赤方偏移の関数としての密度ゆらぎであることに注意しよう．式（8.1.30）を式（8.1.36）に用い，その結果を式（8.1.22）で定義されるパワースペクトルで書けば，以下の表式を得る．

$$P(k) = \frac{1}{4\pi\mathcal{V}}\int d^2\hat{Q}\left|\int_{\mathcal{V}} d^2\hat{n}\,dz\,d_S^2(z)\right.$$
$$\left.\times\ d'_S(z)\frac{F(t_0)}{F(t(z))}\delta_M(r(z)\hat{n},t(z))\,e^{-i\hat{n}\cdot\hat{Q}kd_S(z)}\right|^2, \tag{8.1.37}$$

ここで $\mathcal{V}\equiv a_0^3V$ は物理的なサーベイ体積を表す．相関関数の式（8.1.28）のときと同様に，この公式を用いれば比較的低赤方偏移のサーベイ観測から $P(k)$ を計算することができるし，あるいは他のデータから得られる $P(k)$ の情報を用いれば，高赤方偏移のサーベイ観測から $d_S(z)$ を求めることもできる．

$\varDelta(q)$ とパワースペクトルを具体的に計算してみよう．まず，式（8.1.14）で β に比例する項をすべて無視するところから始める．すると，

$$\varDelta(q) = \delta_{Dq}(t_L) - t_L\psi_q(t_L) \tag{8.1.38}$$

である．ただし，本節の最後で，小さなバリオン密度（つまり小さな β）から生じる非常に面白い効果について学ぶ．式（6.5.5）と（6.5.6）を用いれば，これは，

$$\Delta(q) = \frac{3q^2 t_L^2 \mathcal{R}_q^o \mathcal{T}(\kappa)}{2a_L^2} = \frac{2q^2 \mathcal{R}_q^o \mathcal{T}(\kappa)}{3H_L^2 a_L^2} \tag{8.1.39}$$

となる．ここで，$\mathcal{T}$ は無次元の遷移関数でその数値は表 6.1 で与えられる．$\kappa/\sqrt{2}$ は波数 q と $q_{\rm EQ}$ の比で，$q_{\rm EQ}$ は物質と放射の密度が等しくなる時刻で地平線の内側に入って来る摂動の波数を表す．(2 つ目の等号では $t_L = 2/3H_L$ を用いた．$H_L = \sqrt{\Omega_M} H_0 (1+z_L)^{3/2}$ は脱結合の時刻で放射の寄与を無視したときのハッブル膨張率である．今の目的には，こちらの方が脱結合時刻での実際の宇宙年齢を使うよりも正確な結果を与える．なぜなら，式（8.1.38）と（8.1.39）は物質優勢期のスケール因子が $a \propto t^{2/3}$ となるように時刻のゼロ点を選んで導かれたことによる．）式（8.1.20）を用いれば，式（8.1.22）で定義されるパワースペクトルは以下のように書ける．

$$P(k) = \frac{4(2\pi)^3 a_0^3 C^2(\Omega_\Lambda/\Omega_M)}{25\Omega_M^2 H_0^4} \mathcal{R}_{ka_0}^{o\;2} k^4 \mathcal{T}^2(\sqrt{2}k/k_{\rm EQ}) \ , \tag{8.1.40}$$

ここで $k_{\rm EQ}$ は式（6.4.58）で次のように与えられる．

$$k_{\rm EQ} \equiv q_{\rm EQ}/a_0 = \sqrt{2} H_0 \Omega_M / \sqrt{\Omega_R} = [13.6\ {\rm Mpc}]^{-1} \Omega_M h^2 \ . \tag{8.1.41}$$

特に，もしあるスペクトル指数 n_S と規格化定数 N を用いて原始ゆらぎの振幅が $\mathcal{R}_q \simeq N q^{-3/2} (q/q_*)^{(n_S-1)/2}$ と書けると仮定すれば（$n_S \neq 1$ の場合は任意に選んだ波数 q_* に依存することに留意しよう），以下の表式が得られる．

$$P(k) = \frac{4(2\pi)^3 N^2\, C^2(\Omega_\Lambda/\Omega_M)}{25\, \Omega_M^2 H_0^4 k_*^{n_S-1}} k^{n_S} \mathcal{T}^2(\sqrt{2}k/k_{\rm EQ}) \ , \tag{8.1.42}$$

ここで $k_* \equiv q_*/a_0$ を表す．$n_S = 1$ のときの $P(k)$ の形を図 8.1 に示す．

パワースペクトルが与えられれば，密度ゆらぎの 2 乗平均値 σ^2 を計算できる．

$$\sigma^2(z) = \xi(z,\hat{n};z,\hat{n}) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{F(t(z))}{F(t_0)} \right)^2 \int_0^\infty P(k)\, k^2\, dk \ , \tag{8.1.43}$$

$P(k)$ が式（8.1.42）で与えられるとき，この積分は n_S のあらゆる現実的な値に対して $k=0$ で収束する（$k \to 0$ では $\mathcal{T}(\kappa) \to 1$ となる）．しかし，$k \to \infty$ では，この積分は，$n_S \geqq 1$ のとき，$\displaystyle\int k^{n_S-2} \ln^2 k\, dk$ のように発散する（6.5 節で

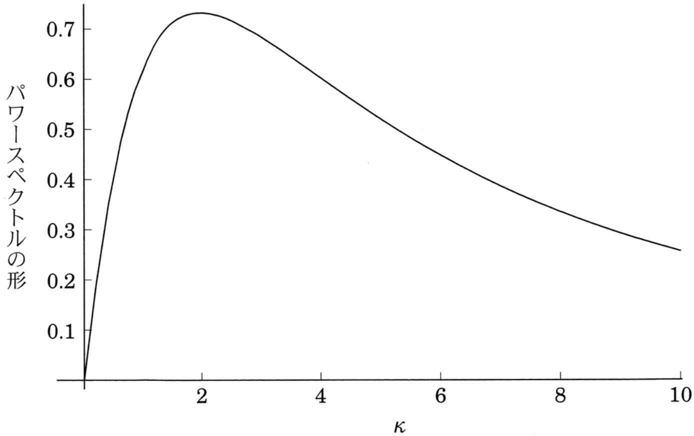


図 8.1 パワースペクトルの形 $\kappa\mathcal{T}^2(\kappa)$ を κ の関数として示す.（式 (8.1.42) より，$n_S = 1$ のときのパワースペクトル $P(k)$ は $\kappa\mathcal{T}^2(\kappa)$ に比例することがわかる.）$\mathcal{T}(\kappa)$ は 6.5 節で導入した遷移関数，$\kappa = \sqrt{2}k/k_{\rm EQ}$，そして $k_{\rm EQ} = [13.6\ {\rm Mpc}]^{-1}\Omega_M h^2$ は放射と物質の密度が等しくなる時刻で地平線の内側に入ってきた摂動の持つ波数.

学んだように，$k \to \infty$ では $\mathcal{T}(\kappa) \propto \ln k/k^2$ となることを思い出そう．一方，式 (8.1.27) の被積分関数には正弦関数が含まれており，これによって $\xi(z, \hat{n}; z', \hat{n}')$ は $z' \neq z$ あるいは $\hat{n}' \neq \hat{n}$ のときに有限となる）.

短波長領域での σ^2 の発散を避けるため，σ^2 の代わりに，密度ゆらぎを共動半径 R/a_0 の球に渡って平均化したものの 2 乗平均値 σ_R^2 で原始ゆらぎの強度を表すのが一般的である.

$$\sigma_R^2(z) \equiv \left\langle \left(\frac{3a_0^3}{4\pi R^3} \int_{a_0|\boldsymbol{x}|<R} d^3x\, \delta_M\Big(\boldsymbol{x}, t(z)\Big) \right)^2 \right\rangle . \tag{8.1.44}$$

（平均値は並進変換に対して不変なので，ある適当な座標ベクトル $\boldsymbol{y}$ を用いて δ_M の引数を $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ と書いても結果は変わらない.）再び式 (8.1.22)，(8.1.23) を用い，今度はさらに式 (8.1.20) も用いれば，

$$\sigma_R^2(z) = \frac{1}{2\pi^2(1+z)^2} \left(\frac{C\Big(\Omega_\Lambda/\Omega_M(1+z)^3\Big)}{C\Big(\Omega_\Lambda/\Omega_M\Big)} \right)^2 \int_0^\infty P(k)|f(kR)|^2 k^2\, dk \tag{8.1.45}$$

を得る．ここで $f(kR)$ は**トップハット型分布関数**と呼ばれ，以下で定義される．

$$f(kR) \equiv \frac{3\,a_0^3}{4\pi R^3}\int_{a_0|\boldsymbol{x}|<R} d^3x\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}a_0} = \frac{3}{(kR)^3}\Big(\sin kR - kR\cos(kR)\Big)\,. \quad (8.1.46)$$

特に，$P(k)$ として式（8.1.42）を用いれば，

$$\sigma_R^2(z) = \frac{16\pi N^2}{25\,k_*^{n_S-1}\Omega_M^2 H_0^4}\frac{C^2\Big(\Omega_\Lambda/\Omega_M(1+z)^3\Big)}{(1+z)^2} \times \int_0^\infty |\mathcal{T}(\sqrt{2}k/k_{\rm EQ})|^2\,|f(kR)|^2\,k^{2+n_S}\,dk \quad (8.1.47)$$

となる．トップハット型関数は $f(0)=1$ を持つので，ゆらぎの 2 乗平均値を与える積分の長波長領域での収束には影響を与えない．一方，短波長領域 $k\to\infty$ では $|f(kR)|^2$ は $9\cos^2(kR)/(kR)^4$ のように減衰し，$n_S<5$ であれば短波長領域の発散を除去できる．

宇宙の物質分布に関する多くの観測結果は，よく σ_8 と呼ばれる量を用いて表される．これは $z=0$ と $R=8\,h^{-1}\,\mathrm{Mpc}$ のときの $\sigma_R(z)$ の値である．σ_8 を計算するには，ダイカスのフィッティング公式（6.5.12）にアイゼンシュタイン–フーのバリオン補正（式（6.5.22））を加えた遷移関数を使えば良い．7.2 節で紹介した，WMAP の 1 年目の観測結果から得られたパラメータ $h=0.72$，$\Omega_M h^2=0.14$，$\Omega_B h^2=0.024$，$|N|^2=2.1\times10^{-10}$，および現在時刻での光子の温度 $T_{\gamma,0}=2.725\mathrm{K}$（これから $\Omega_R h^2=4.15\times10^{-5}$ が得られる）を用いれば，式（8.1.47）は $\sigma_8=0.92$ を与える．この値は，WMAP チームがコンピュータプログラム CMBfast を用いて得た値 $\sigma_8=0.919$ と一致する[*4]．（WMAP 衛星の 3 年目のデータ[*5]からはより小さな値 $\sigma_8=0.761^{+0.049}_{-0.048}$ が得られたが，これは 3 年目の偏光データから得られた光学的厚さの値が 1 年目の値と比べて小さくなり，温度ゆらぎの相関関数を同程度の大きさに保つために $|N|^2$ の値を小さくしなくてはならなかったためである．$|N|^2$ が小さくなると，それに応じて式（8.1.47）から計算された σ_8 の値も小さくなる．）

式（8.1.43）の積分は $n_S \geqq 1$ で発散してしまうが，この式から $P(k)k^3$ は共動

[*4] D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003). この文献に与えられている値 $\sigma_8=0.9$ は $\sigma_8=0.919$ を四捨五入したものである．当時の観測精度では小数点 2 桁以降の値は不定であった．

[*5] D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 377 (2007) [astro-ph/0603449].

波数 $q = a_0 k$ を持つゆらぎの強度を表すのに使えそうなことがわかる．$P(k)$ に式（8.1.42）を用い，$n_S \simeq 1$ とすれば $F^2(t)P(k)k^3 \propto t^{4/3}k^4|T(k/k_{\rm EQ})|^2$ を得る．これは k の単調増加関数であるから，**大きな共動波数，つまり小さな質量を持つ摂動が最初に強くなる**という結論が導かれる．すなわち，まず小さなスケールの構造が形成され，それらが合体して後に銀河となる暗黒物質のハローを形成し，やがては銀河団になる．この「ボトムアップ」的な構造形成の描像は，ゼルドヴィッチ*6が長年提唱してきた「トップダウン」的な描像の反対である．トップダウン的な描像では，まず非常に大きなスケールの構造が形成され，それらが銀河団スケールの構造に分裂し，最後に個々の銀河に分裂する．最も数の多い銀河が矮小楕円銀河であり，我々の銀河系やアンドロメダ銀河 M 31 はそれぞれが 20 個程度のより小さな伴銀河を含むという観測事実は，ボトムアップ的な描像を支持する．

パワースペクトルに戻ろう．表 6.1 を見ると，$\kappa|T(\kappa)|^2$ は $\kappa = 2.0$ で最大値 0.74 を持つことがわかる．式（6.4.58）より k は κ に比例し，$k = \Omega_M h^2 \kappa / 19.3$ Mpc であるから，$n_S = 1$ のときの $P(k)$ は $\kappa = 2.0$ に対応する波数，

$$k_{\text{最大}} = 0.10\ \Omega_M h^2\,\text{Mpc}^{-1} \tag{8.1.48}$$

で最大値を持つ．$C(\Omega_\Lambda/\Omega_M) = 0.767$ と $n_S = 1$ を用いれば，パワースペクトルの最大値は以下で与えられる．

$$P_{\text{最大}} = 7.2 \times 10^{13} \left(\Omega_M h^2\right)^{-1} |N|^2\ \text{Mpc}^3\ . \tag{8.1.49}$$

低赤方偏移の物質分布に関しては多くの測定があり，$P(k)$ を計算するのに使われてきた．

- 銀河の位置と赤方偏移のサーベイ観測はいくつかあるが，ここでは最新かつ最も詳細な 2 つの観測を取り上げよう．1 つはスローン・デジタル・スカイサーベイ*7で，そのカタログは約 80 万個の銀河を含む．もう 1 つは 2 度視野（2dF）

---

*6 Ya. B. Zel'dovich, *Soviet Scientific Reviews, Section E: Astrophys. and Space Physics Reviews* **3**, 1 (1984); S. F. Shandarin, Ya. B. Zel'dovich, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 185 (1989). これらの文献に引用されている，より早期の文献も見よ．

*7 D. G. York *et al.*, *Astron. J.* **120**, 1579 (2000); M. Tegmark *et al.*, *Astrophys. J.* **606**, 702 (2004) [astro-ph/0310725]; *Phys. Rev. D* **69**, 103501 (2004) [astro-ph/0310723]. 本書の執筆段階で最新のデータの解析結果は，W. J. Percival *et al.*, *Astrophys. J.* **657**, 645 (2007) [astro-ph/0608636] と M. Tegmark *et al.*, *Phys. Rev. D* **74**, 123507 (2006) [astro-ph/0608632] で報告されている．

銀河赤方偏移サーベイ[*8]で，2003 年のサーベイ観測完了時のカタログは 22 万個の銀河を含む．スローン・デジタル・スカイサーベイの結果を図 8.2 に示す．

これら 2 つのサーベイ観測から得られた $P(k)$ の値は，k が $0.015\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ から $0.2\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ の範囲にあるところでは互いによく一致している（これらのサーベイでは波数の単位として $h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ を用いているが，これは銀河までの距離を銀河の赤方偏移から求めており，したがって距離が h^{-1} に比例するためである）．測定された $P(k)$ の形は式（8.1.42）と $n_S \simeq 1$ から予想される $\propto k|\mathcal{T}(\kappa)|^2$ の形と無矛盾で，特に $k \approx 0.02\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ で最大値を持つように見える．これは式（8.1.48）で $\Omega_M \approx 0.3$，$h \approx 0.7$ とした値とよく合っている．測定された $P(k)$ の最大値は $P_{最大} \approx 5 \times 10^4\,h^{-3}\,\mathrm{Mpc}^3$ となる．この結果を式（8.1.49）と比較すれば，原始ゆらぎの大きさとして $|N| \approx 2 \times 10^{-5}$ が得られる（ただし $\Omega_M \approx 0.3$，$h \approx 0.7$ を仮定した）．

● 「ビリアル平衡にある」銀河団（たとえばかみのけ座銀河団）の個数を赤方偏移の関数として数えることで，距離に応じた物質分布の情報が得られる[*9]（1.1 節を見よ）．これらの結果から σ_8 の値として 0.66–1 が得られており，これは波数 $k \approx 0.1\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ のパワースペクトルの値が $P(k) \approx 6 \times 10^3\,h^{-3}\,\mathrm{Mpc}^3$ であると解釈できる．この値は，上記の銀河サーベイから得られた曲線の上に乗る．

● 距離に応じた物質分布に関する情報は，銀河間ガスの密度が平均よりも高い領域の位置の相関からも得られる[*10]．この領域は遠方のクエーサーの光をライマン・アルファの波長帯で吸収するので，その吸収線を測定することで銀河間ガスの赤方偏移を求められる（1.10 節を見よ）．これらの観測結果より，k が $0.1\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ と $6\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ のあいだの $P(k)$ の値が得られている．これは $k < 0.2\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ で銀河サーベイから得られた曲線をより大きな k まで伸ばしたものの上に乗り，やはり期待される形 $\propto k|\mathcal{T}(\kappa)|^2$ と一致している．

● 銀河の像に対する弱い重力レンズ効果を用いれば，物質分布に関するさらなる情報が得られる[*11]（9.5 節を見よ）．これらの結果からは σ_8 の値として 0.67

[*8] W. J. Percival *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **327**, 1297 (2001); M. Colless *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **328**, 1039 (2001); M. Colless *et al.*（2dF 銀河赤方偏移サーベイチーム），astro-ph/0306581．最終的なデータの解析結果は，S. Cole *et al.*（2dF 銀河赤方偏移サーベイチーム），*Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **362**, 505 (2005) [astro-ph/0501174] で報告された．

[*9] このトピックに関するもとの文献への引用も含めたまとめが，M. Tegmark *et al.*, *Phys. Rev. D* **69**, 103501 (2004) の表 V に与えられている．

[*10] U. Seljak *et al.*, *Phys. Rev. D* **71**, 103515 (2005).

[*11] たとえば，H. Hoekstra *et al.*, *Astrophys. J.* **647**, 116 (2006) を見よ．

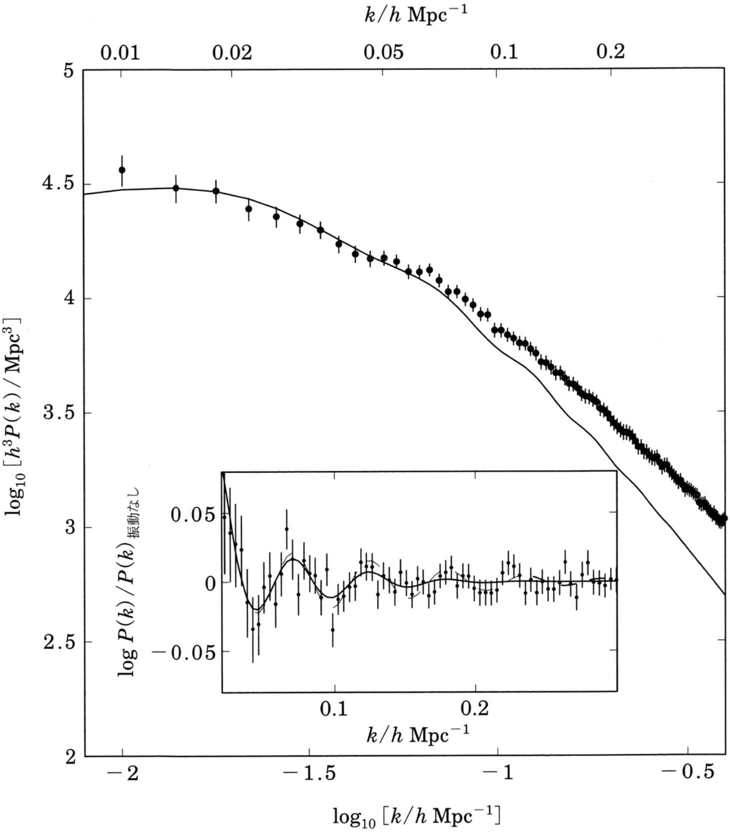


図 8.2 スローン・デジタル・スカイサーベイの観測データから測定されたパワースペクトル．W. J. Percival *et al.*, astro-ph/0608636 より抜粋．黒丸は銀河の位置と赤方偏移のデータから求められた $h^3P(k)$ の値を示す（銀河への距離は赤方偏移から $\Omega_M = 0.24$, $\Omega_\Lambda = 0.76$ を仮定して求められた）．誤差棒は 1 標準偏差．実線は線形摂動理論から計算された理論曲線で，宇宙論パラメータは WMAP 衛星の 3 年目の温度と偏光のデータから得られた値：$h = 0.73$, $\Omega_M = 0.24$, $\Omega_\Lambda = 0.76$, $\Omega_B/\Omega_M = 0.174$ を用いてある．理論曲線の規格化は，k が $0.01\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ と $0.06\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ の範囲にある観測データと理論曲線が合うように決めている．大きな k でのデータと理論曲線の不一致は，摂動の非線形成長によるものだと考えられている．挿入図は，本節の最後で議論するバリオン音響振動の効果を示す．データ点は，測定されたパワースペクトルと，振動を除去してなめらかにした理論曲線との比を表す．実線は，WMAP の 3 年目の宇宙論パラメータから計算された比の値．

から 0.97 が得られている．これは $k \approx 0.3\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ 付近の $P(k)$ の値として解釈でき，やはり銀河サーベイから得られた曲線の上に乗っている．

これらの測定は様々な不定性を持っており，それぞれの不定性は天体物理学における高度で専門的な問題を喚起する．距離を得るのに赤方偏移を用いるため，これらの測定は銀河や銀河団，そしてライマン・アルファ雲の持つ特異速度に影響される．これらの測定を解釈するのに使われる理論は暗黒物質の集まりを小さな摂動として扱っているので，ゆらぎが非線形となる k の領域の測定データは使えない．最後に，銀河や銀河団，ライマン・アルファ雲から得られるバリオン物質の分布を全物質密度の分布とみなして解釈するためには，そのような解釈が何のバイアスも生まないと仮定するか，あるいはバイアスがあるならそれが何であるかを知っておかなくてはならない．弱い重力レンズを用いた手法のみが，**全**物質密度のゆらぎを直接的に測定する．この理由から，他の手法は関数 $P(k)$ の**形**については良い情報を与えるが，全体にかかる規格化因子については大きな不定性を残す．上で引用した銀河サーベイの結果は「無バイアス」の場合，つまり，ゆらぎが非線形になる前のバリオン物質の分布は冷たい暗黒物質の分布を反映している，という仮定のもとで得られたものである．

前章で述べた宇宙マイクロ波背景放射の研究から得られた最も顕著な成果の 1 つは，大規模構造の研究から得られた $P(k)$ が，宇宙マイクロ波背景放射から求められた原始ゆらぎの強度と一致することである．つまり，原始ゆらぎの強度 $q^3|\mathcal{R}_q|^2$ は，広い範囲の物理的波数 $k \equiv q/a_0$（最小の角波数を除く宇宙マイクロ波背景放射の観測から得られる $\approx 10^{-3}\mathrm{Mpc}^{-1}$ から大規模構造の研究によって得られる $1\mathrm{Mpc}^{-1}$ 以上まで）に渡ってほぼ一定であるように見える．実際，2.6 節で紹介した COBE の測定が出る以前にすでに，物質の大規模構造の研究より，宇宙マイクロ波背景放射は $|N| \approx 10^{-5}$ に対応する 10^{-5} 程度の温度ゆらぎを持つだろうと予想されていた．

これまで議論してきた測定はすべて低赤方偏移，あるいは中赤方偏移で行われたもので，これらの赤方偏移では式（8.1.28）の構造距離は線形近似 $d_S(z) \simeq z/H_0$ とさほど違いはない．しかし，より大きな赤方偏移での物質の相関関数 ξ を測定できれば，$d_S(z)$ の（あるいは同等に $d_A(z)$ の）線形近似を超えた関数形を決めることができると期待されている．これが測定できれば，真空のエネルギーの時間依存性について何かわかるかもしれない．しかし，式（8.1.28）を見ると，

$\xi(z,\hat{n};z',\hat{n}')$ の積分は $k \gtrsim 1/r$ の領域の波数でのみ被積分関数が $r \equiv |d_S(z)\hat{n} - d_S(z')\hat{n}'|$ に敏感な形となっている．もし $r \ll 1/k_{\rm EQ}$ であれば（ここで $k_{\rm EQ}$ は放射と物質の密度が等しくなった時刻にちょうど地平線の内側に入ってきた摂動の波数），$k \gtrsim 1/r$ かつ $n_S \simeq 1$ のときの $P(k)$ の近似式（8.1.42）と遷移関数の漸近形の式（6.5.11）から $P(k) \sim k^{-3}[\ln k + O(1)]^2$ が得られる．すると式（8.1.28）の相関関数の積分のうち r に依存する部分は，

$$\int_{1/r}^{\infty} \frac{dk}{rk^2} \sin(kr)[\ln k + O(1)]^2$$

となり，積分結果は r に対数的にしか依存しない．よって，物質の相関関数の測定から $d_S(z)$ の z 依存性を求めるには，$|d_S(z)\hat{n} - d_S(z')\hat{n}'|$ が少なくとも $1/k_{\rm EQ} = 19.3\,{\rm Mpc}/\Omega_M h^2$ と同程度の大きさになるような，十分大きな範囲の赤方偏移と角度に渡って相関関数を測定する必要がある．あるいは，$k > k_{\rm EQ}$ の漸近形の式（6.5.11）からの小さなずれを利用する手もあるし，$k > k_{\rm EQ}$ での $P(k)$ の近似式（8.1.42）からの小さなずれを利用する手もある．

$P(k)$ の近似式（8.1.42）からのずれは，脱結合の時刻以前のバリオン音響振動によって生成される $\beta \equiv \Omega_B/\Omega_M$ 程度の大きさの項から生じる*12．これらの振動による効果を見るには，式（8.1.14）に立ち戻り，それぞれの摂動に含まれている「速い」項に着目しなくてはならない．速い項は大きな波数で振動する．これらの項の大体の大きさを評価するため，$\bar{\rho}_B(t_L)$ と $\bar{\rho}_\gamma(t_L)$ を同程度の大きさ（したがって $R(t_L)$ は 1 程度の大きさ）とし，$8\pi G\bar{\rho}_\gamma(t_L)$ は $\beta H^2(t_L)$ 程度の大きさだとする．大体の大きさを評価する上では，3 倍くらいしか違わない a_L と $a_{\rm EQ}$ を区別する必要もない．小さな因子 β，$a_L H_L/q$ を持つ項の振る舞いのみに着目すれば，式（6.4.45）–（6.4.48）より（共通因子 $\mathcal{R}_q^o \exp(-\int_0^{t_L} \Gamma dt)$ を除けば）$\beta\delta_{\gamma q}(t_L)$，$(1-\beta)\delta_{Dq}(t_L)$，$t_L\psi_q(t_L)$ の速い項はそれぞれ β，$\beta H_L^2 a_L^2/q^2$，

*12 脱結合以前のバリオン音響振動が脱結合以降の物質分布に及ぼす影響は，P. J. E. Peebles, J. T. Yu, *Astrophys. J.* **162**, 815 (1970); R. A. Sunyaev, Ya. B. Zel'dovich, *Astrophys. Space Sci.* **7**, 3 (1970); J. R. Bond, G. Efstathiou, *Astrophys. J.* **285**, L45 (1984); J. A. Holtzmann, *Astrophys. J. Suppl.* **71**, 1 (1989); W. Hu, N. Sugiyama, *Astrophys. J.* **471**, 30 (1996); D. J. Eisenstein, W. Hu, *Astrophys. J.* **496**, 605 (1998) によって認識されていた．筆者の知る限りでは，赤方偏移サーベイを使ってバリオン音響振動を観測し，それから $d_A(z)$ を求めることを最初に提唱したのは，D. J. Eisenstein, W. Hu, M. Tegmark, *Astrophys. J.* **504**, L57 (1998) で，この手法を使って暗黒エネルギーの時間進化を測定することを提唱したのは，D. J. Eisenstein, in *Next Generation Wide-Field Multi-Object Spectroscopy*, eds. M. Brown, A. Dey, ASP Conference Series, vol. 280 (2002) の 35 ページの記述である．

$\beta H_L a_L/q$ 程度の大きさである一方，$\beta t_L(q^2/a_L^2)\delta u_{\gamma q}(t_L)$ は $\beta(q/a_L H_L)$ 程度の大きさであり，（シルク減衰の効果を除けば）$q/a_L H_L \gg 1$ で支配的となることがわかる．この項のみを残せば，$\varDelta(q)$ の振動する部分は近似的に，

$$\begin{aligned}\varDelta^{\text{fast}}(q) &\simeq \beta t_L(q^2/a_L^2)\delta u_{\gamma q}^{\text{fast}}(t_L)\\ &\simeq \frac{2\beta q\mathcal{R}_q^o}{\sqrt{3}a_L H_L(1+R_L)^{3/4}}\exp\left(-\int_0^{t_L}\varGamma dt\right)\sin\Big(qd_H/a_L\Big)\end{aligned} \tag{8.1.50}$$

と得られる．ここで，いつもの通り $R \equiv 3\bar{\rho}_B/(4\bar{\rho}_\gamma)$ で，d_H は式（7.2.39）で与えられる脱結合時の音波の地平線の半径を表す．

$$\begin{aligned}d_H &\equiv a_L\int_0^{t_L}\frac{dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\\ &= \frac{2}{H_0\sqrt{3R_L\varOmega_M}(1+z_L)^{3/2}}\ln\left(\frac{\sqrt{1+R_L}+\sqrt{R_{\text{EQ}}+R_L}}{1+\sqrt{R_{\text{EQ}}}}\right).\end{aligned} \tag{8.1.51}$$

また，本節の最初の方で述べた理由から，式（8.1.14）の t_L を $2/3H_L$ で置き換えた．以上より，$P(k)$ と式（8.1.42）で与えられるなめらかな曲線の比は $k \simeq \pi k_H/2,\ 3\pi k_H/2,\ 5\pi k_H/2, \cdots$ で山を持つことがわかる（$k_H = 1/d_H(1+z_L)$）．これらの山は，スローン・デジタル・スカイサーベイ[*13]から得られたパワースペクトルと，2dF 銀河赤方偏移サーベイ[*14]から得られたパワースペクトルの両方で観測された（図 8.2 の挿入図を見よ）．d_H は $\varOmega_M^{-1/2}$ に比例するので，観測された山の位置を予測された山の位置と比べることで $\varOmega_M$ の値を決定できる[*14*15]．得られた結果[*15]は $\varOmega_M = 0.256^{+0.029}_{-0.024}$ で，より大きな銀河サンプルから得られた結果は[*16] $\varOmega_M = 0.24 \pm 0.02$ であった．しかし残念なことに，これらの測定は中くらいの赤方偏移（スローンサーベイは $0.16 < z < 0.47$ で 2dF サーベイは $z < 0.3$）で行われたため，暗黒エネルギーの存在に関する証拠は得られるものの，その時間依存性に関する情報を得ることはできない．

＊＊＊

[*13] D. J. Eisenstein *et al.*, *Astrophys. J.* **633**, 560 (2005) [astro-ph/0501171].

[*14] S. Cole *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **362**, 505 (2005).

[*15] W. J. Percival *et al.*, *Astrophys. J.* **657**, 51 (2007) [astro-ph/0608635].

[*16] M. Tegmark *et al.*, *Phys. Rev.* **74**, 123507 (2006) [astro-ph/0608632].

さて，約束通り，式（8.1.33）を用いることで生じるコスミック・バリアンスを評価して本節を終えることとしよう．この式の平均 2 乗誤差と平均値の 2 乗の比は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\varDelta_V(Q,t) &\equiv \left\langle \left[\int \frac{d^2\hat{Q}}{4\pi} \left(\left|\delta^V_{M\,Q\hat{Q}}(t)\right|^2 - \left\langle \left|\delta^V_{M\,Q\hat{Q}}(t)\right|^2 \right\rangle \right) \right]^2 \right\rangle \\ &\quad \times \left(\left\langle \left|\delta^V_{M\,Q\hat{Q}}(t)\right|^2 \right\rangle \right)^{-2} \\ &= \delta^{-4}_{MQ}(t) \int \frac{d^2\hat{Q}}{4\pi} \int \frac{d^2\hat{Q}'}{4\pi} \\ &\quad \times \left[\left\langle \left|\delta^V_{M\,Q\hat{Q}}(t)\right|^2 \left|\delta^V_{M\,Q\hat{Q}'}(t)\right|^2 \right\rangle - \left\langle \left|\delta^V_{M\,Q\hat{Q}}(t)\right|^2 \right\rangle \left\langle \left|\delta^V_{M\,Q\hat{Q}'}(t)\right|^2 \right\rangle \right] . \end{aligned} \tag{8.1.52}$$

ガウス統計を仮定すれば，これは，

$$\begin{aligned}\varDelta_V(Q,t) &= \delta^{-4}_{MQ}(t) \int \frac{d^2\hat{Q}}{4\pi} \int \frac{d^2\hat{Q}'}{4\pi} \\ &\quad \times \left[\left|\left\langle \delta^V_{M\,Q\hat{Q}}(t)\, \delta^{V*}_{M\,Q\hat{Q}'}(t) \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \delta^V_{M\,Q\hat{Q}}(t)\, \delta^V_{M\,Q\hat{Q}'}(t) \right\rangle\right|^2 \right]\end{aligned}$$

となる．式（8.1.31）と（8.1.24）を用いれば（そして $\alpha(\boldsymbol{q}) = \alpha^*(-\boldsymbol{q})$，かつ $\delta_{Mq}(t)$ が実数であることを使えば）以下の結果を得る．

$$\begin{aligned}\varDelta_V(Q,t) &= 2\delta^{-4}_{MQ}(t) \int \frac{d^2\hat{Q}}{4\pi} \int \frac{d^2\hat{Q}'}{4\pi} \\ &\quad \times \left| \int d^3q F_V(\boldsymbol{q} - Q\hat{Q})\, F^*_V(\boldsymbol{q} - Q\hat{Q}') \delta^2_{Mq}(t) \right|^2 .\end{aligned}$$

体積が大きい極限では $F_V(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{Q}) \to ((2\pi)^{3/2}/\sqrt{V})\delta^3(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{Q})$ となることから，コスミック・バリアンスは以下のように求まる．

$$\varDelta_V(Q,t) = \frac{2(2\pi)^3}{V} \int \frac{d^2\hat{Q}}{4\pi} \int \frac{d^2\hat{Q}'}{4\pi} F^2_V(Q\hat{Q} - Q\hat{Q}') .$$

さて，$F^2_V(Q\hat{Q} - Q\hat{Q}')$ は $Q|\hat{Q} - \hat{Q}'| \ll V^{-1/3}$ のときに値 $V/(2\pi)^3$ を持ち，$Q|\hat{Q} - \hat{Q}'| \gg V^{-1/3}$ のときは指数関数的に減衰するから，1 程度の大きさの因子を除けば以下の式が成り立つ．

$$\varDelta_V(Q,t) \approx \frac{1}{Q^2 V^{2/3}} . \tag{8.1.53}$$

よって，式（8.1.33）を用いる際に生じる平均 2 乗誤差と平均値の 2 乗の比は $Q^{-2}V^{-2/3}$ に比例して減少するから，サーベイ体積が多くの波長を含む場合は無視できるほど小さくなる．先ほど無視した 1 程度の大きさの因子はサーベイ体積の形に依存するが，たとえばサーベイ体積が共動半径 R を持つ球であれば，$QR \gg 1$ のとき，

$$\Delta_V(Q,t) \longrightarrow \frac{9}{4Q^2R^2} \tag{8.1.54}$$

を得る．

8.2 非線形成長

摂動の成長を線形近似を超えて扱おうとすると，とたんに数学的に複雑になってしまう．そのためたいていはコンピュータ計算によるシミュレーションが行われるが，それは本書の範疇を超える．そこで本節では，摂動の非線形成長を単純化し，解析的な扱いを可能にするピーブルスの方法*1をもう少し一般化してみよう．まず，ピーブルスが行ったように，有限で，一様かつ球対称な密度超過 $\Delta\rho_M$ を持つゆらぎ（つまり，宇宙の平均密度 $\bar{\rho}_M$ よりも高い密度 $\bar{\rho}_M + \Delta\rho_M$ を持つ球対称な領域）を考える*2．バーコフの定理*3によれば，ある球対称領域の内部の計量，およびこの領域中を自由落下するテスト粒子の運動方程式は球の外部で起こっていることに影響されないので，この球の内部の計量は一様等方宇宙の場合と同じようにロバートソン–ウォーカー計量で記述できる．その密度は $\bar{\rho}_M(t) + \Delta\rho_M(t)$ で与えられ，曲率定数の値は一般に宇宙全体の値 K とは異なる．曲率定数 K を持つロバートソン–ウォーカー計量が与えられれば，スケール因子 $a(t)$ はフリードマン方程式（1.5.19）訳注 1を満たす．

$$\dot{a}^2(t) + K = \frac{8\pi G a^2(t)}{3}\Big(\bar{\rho}_M(t) + \rho_V\Big)\,. \tag{8.2.1}$$

---

*1 P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **147**, 859 (1967).

*2 J. E. Gunn, J. R. Gott, *Astrophys. J.* **176**, 1 (1972) では，一様な密度超過を持つ球の外側から降り積もってくる物質の効果も考慮されている．これは，球対称の密度超過領域とその周辺領域における密度分布を，半径に関する階段関数として扱うことに相当する．ガン–ゴットモデルにゼロでない真空のエネルギーの効果を取り入れたのは，H. Martel, P. R. Shapiro, S. Weinberg, *Astrophys. J.* **492**, 29 (1998) で，一様に密度の低い球対称の殻に取り囲まれた，一様球対称の密度超過領域を扱っている．

*3 G&C，11.7 節.

訳注 1　$\dot{a}^2 + K = \dfrac{8\pi G\,\rho\,a^2}{3}$.

同様に，ゆらぎの内部のロバートソン–ウォーカー計量のスケール因子 $\mathcal{A}(t)$ は以下のフリードマン方程式を満たす．

$$\dot{\mathcal{A}}^2(t) + K + \Delta K = \frac{8\pi G \mathcal{A}^2(t)}{3}\Big(\bar{\rho}_M(t) + \Delta\rho_M(t) + \rho_V\Big)\,, \tag{8.2.2}$$

ここで，$K + \Delta K$ はゆらぎの内部の計量が持つ曲率定数を表す．全密度は非相対論的物質と真空のエネルギー ρ_V を両方含んでいる（ピーブルスの扱いでは真空のエネルギーは考慮されていなかった）．真空のエネルギーが時間に依存するという観測的な証拠はないので，真空のエネルギーは定数だとする．

本書では宇宙の平均曲率がゼロ（$K = 0$）の場合のみを扱う*4ここでは主に，膨張をやめて高い密度に成長することのできたゆらぎに興味があるから，$\Delta K > 0$ とする．全物質密度は保存則，

$$\bar{\rho}_M(t) + \Delta\rho_M(t) \propto \mathcal{A}^{-3}(t) \tag{8.2.3}$$

に従うが，摂動を持たない平均密度は以下の式に従う．

$$\bar{\rho}_M(t) \propto a^{-3}(t)\,. \tag{8.2.4}$$

$K = 0$ の場合，a の規格化は任意で良い．後の計算に便利なので，式（8.2.3）と（8.2.4）を用いて a が以下の式を満たすように規格化することにしよう．

$$\mathcal{A}^3(t)\Big(\bar{\rho}_M(t) + \Delta\rho_M(t)\Big) = a^3(t)\bar{\rho}_M(t)\,. \tag{8.2.5}$$

この問題の初期条件を与えるため，まず最初に $\Delta\rho_M(t)$，$\Delta\mathcal{A}(t) \equiv \mathcal{A}(t) - a(t)$ を小さい摂動として扱うことが**できる**ような十分早期の物質優勢宇宙を考え，真空のエネルギーを無視する．1.5 節で見たように，この場合は，式（8.2.1），（8.2.4）は以下の解を持つ．

$$a \propto t^{2/3}\,, \qquad \bar{\rho}_M = \frac{1}{6\pi G t^2}\,. \tag{8.2.6}$$

式（8.2.2）をこの解のまわりで摂動 1 次まで展開すれば以下の式を得る．

$$2\dot{a}\Delta\dot{\mathcal{A}} + \Delta K = \frac{8\pi G a^2 \bar{\rho}_M}{3}\left(\frac{2\Delta\mathcal{A}}{a} + \frac{\Delta\rho_M}{\bar{\rho}_M}\right)\,.$$

あるいは，式（8.2.6）を使えば，

$$\frac{\Delta K}{a^2} = \frac{4}{9t^2}\left(\frac{2\Delta\mathcal{A}}{a} + \frac{\Delta\rho_M}{\bar{\rho}_M}\right) - \frac{4}{3t}\frac{\Delta\dot{\mathcal{A}}}{a}$$

---

*4 宇宙の平均曲率が負の場合は，B. Freivogel, M. Kleban, M. N. Martinez, L. Susskind, *J. High Energy Phys.* **0603**, 039 (2006) [hep-th/0505232] によって考慮されている．

となる．さらに，摂動 1 次では式（8.2.5）は早期に，

$$\frac{\Delta\mathcal{A}}{a} = -\frac{\Delta\rho_M}{3\bar{\rho}_M}$$

となるから，早期の $\Delta\mathcal{A}$ は以下の 1 次の微分方程式に従う．

$$\frac{\Delta K}{a^2} = -\frac{4}{9t^2}\frac{\Delta\mathcal{A}}{a} - \frac{4}{3t}\frac{\Delta\dot{\mathcal{A}}}{a}\ . \tag{8.2.7}$$

この方程式の $t \to 0$ での解は $\Delta\mathcal{A} \propto t^{4/3}$，$\Delta\mathcal{A} \propto t^{-1/3}$ の形を持つ．十分な時間が経過すれば解 $\Delta\mathcal{A} \propto t^{-1/3}$ は減衰して $\Delta\mathcal{A} \propto t^{4/3}$ のみが残るから，以下の結果を得る．

$$\Delta K = -\frac{20}{9}\lim_{t\to 0} t^{-2}a(t)\Delta A(t) = \frac{40\pi G}{9}\lim_{t\to 0} a^2(t)\Delta\rho_M(t)\ . \tag{8.2.8}$$

共動半径 r 以内のゆらぎが初期時刻で持つ大きさを表すため，早期には式（8.2.8）より $\Delta\rho_M(t) \propto a^{-2}(t) \propto \bar{\rho}_M^{2/3}(t)$ が成り立つことに着目すれば，以下の時間に依存しない量（**ゆらぎの初期強度**と呼ぶことにしよう）を定義できる．

$$\rho_1 \equiv \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\rho_M^3(t)}{\bar{\rho}_M^2(t)}\ . \tag{8.2.9}$$

すると式（8.2.8）は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}\Delta K &= \frac{40\pi G}{9}a^2(t)\bar{\rho}_M^{2/3}(t)\rho_1^{1/3}\\ &= \frac{40\pi G}{9}\mathcal{A}^2(t)\Big(\bar{\rho}_M(t) + \Delta\rho_M(t)\Big)^{2/3}\rho_1^{1/3}.\end{aligned} \tag{8.2.10}$$

$a^2\bar{\rho}_M^{2/3}$ が時間によらないので，$t \to 0$ の極限を取る必要はない．

以上を踏まえ，ゆらぎを小さな摂動として扱うことができなくなる後期でのゆらぎの発展を考えよう．式（8.2.10）を用い，フリードマン方程式（8.2.2）（ただし $K = 0$ とする）を以下のように書く．

$$\dot{\mathcal{A}}^2 = \frac{8\pi G\mathcal{A}^2}{9}\Big[3(\bar{\rho}_M + \Delta\rho_M + \rho_V) - 5(\bar{\rho}_M + \Delta\rho_M)^{2/3}\rho_1^{1/3}\Big].$$

さらに式（8.2.3）を使えば，

$$\begin{aligned}&(\bar{\rho}_M + \Delta\rho_M)^{-2}\left(\frac{d}{dt}(\bar{\rho}_M + \Delta\rho_M)\right)^2\\ &= 8\pi G\Big(3(\bar{\rho}_M + \Delta\rho_M + \rho_V) - 5(\bar{\rho}_M + \Delta\rho_M)^{2/3}\rho_1^{1/3}\Big)\ .\end{aligned} \tag{8.2.11}$$

この式の右辺は，全物質密度 $\bar{\rho}_M + \Delta\rho_M = \rho_c$ が以下の条件を満たすときにゼロとなる．

$$3(\rho_c + \rho_V) = 5\rho_c^{2/3}\,\rho_1^{1/3}\,. \tag{8.2.12}$$

$\rho_c > 0$ のとき，$5\rho_c^{2/3}\,\rho_1^{1/3} - 3\rho_c$ は $-\infty$ から $500\rho_1/243$ までの値を取り得るから，式（8.2.12）はゆらぎの初期強度が以下の条件を満たすときにのみ解を持つ[*5]．

$$\rho_1 \geqq \frac{729}{500}\rho_V\,. \tag{8.2.13}$$

式（8.2.12）が解を持つような場合には，密度 $\bar{\rho}_M(t) + \Delta\rho_M(t)$ はまず ρ_c に達するまで減少し，その後無限大まで増加する．この膨張と収縮にかかる時間は式（8.2.11）から以下のように与えられる．

$$t_c = \frac{2}{\sqrt{8\pi G}}\int_{\rho_c}^{\infty}\frac{d\rho}{\rho\sqrt{3(\rho+\rho_V) - 5\rho^{2/3}\rho_1^{1/3}}}\,. \tag{8.2.14}$$

（全体に 2 がかかっているのは，収縮によって密度が最小値 ρ_c から無限大になるのにかかる時間が，膨張によって密度が無限大から最小値になるのにかかる時間と等しいことによる．）たとえば，$\rho_1 \gg \rho_V$ の極限では，

$$t_c \longrightarrow \frac{9\pi}{5^{3/2}\sqrt{8\pi G\rho_1}} \tag{8.2.15}$$

を得る．もし，仮にこの時刻まで線形摂動論が成立するなら，線形の密度摂動は時刻 t_c で無限大になる代わりに以下の値を持つ．

$$\frac{\Delta\rho_M}{\bar{\rho}_M} = \left(\frac{\rho_1}{\bar{\rho}_M}\right)^{1/3} = \rho_1^{1/3}(6\pi G t_c^2)^{1/3} = \left(\frac{243\pi^2}{500}\right)^{1/3} = 1.686\,.$$

したがって，重力崩壊は線形摂動理論が使えなくなるほど密度ゆらぎと平均密度の比が大きくなったときに起こることがわかる．

もちろん，異なるゆらぎは異なる初期強度 ρ_1 と共動半径 R を持つ．上の解析と観測を結びつけるためには，プレスとシェヒターによって編み出された手法を使うのが便利である[*6]．式（8.2.14）を逆に解けば，あるゆらぎが時刻 t_c 以前に重力崩壊するために必要な最低限の初期強度 $\rho_1(t_c)$ を計算することができる．たとえば，真空のエネルギーが重要になる時期以前に重力崩壊するゆらぎを考えれ

---

*5 S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2607 (1987).

*6 W. H. Press, P. Schechter, *Astrophys. J.* **239**, 1 (1974).

ば，式（8.2.15）から $\rho_1(t_c) = 81\pi/1000Gt_c^2$ が得られる．非線形効果が重要になる以前の時刻 t で，空間の任意の点がこの強度のゆらぎを持つ確率を計算してみよう．まず，任意の点に共動半径 R の球を置き，その内部の密度が平均密度よりも $\Delta\rho_M$ から $\Delta\rho_M + d\Delta\rho_M$ の間で与えられる分だけ超過する確率を考える．その確率分布がガウス分布で与えられると仮定しよう．

$$P_{t,R}(\Delta\rho_M)\,d\Delta\rho_M = \frac{d\Delta\rho_M}{\sqrt{2\pi}\sigma_R(z_t)\bar{\rho}_M(t)} \exp\left(-\frac{\Delta\rho_M^2}{2\sigma_R^2(z_t)\bar{\rho}_M^2(t)}\right). \tag{8.2.16}$$

原始ゆらぎがハリソン–ゼルドヴィッチスペクトル $\mathcal{R}_q = Nq^{-3/2}$ を持っている場合，半径 R に渡って平均化されたゆらぎ $\Delta\rho_M/\bar{\rho}_M$ の標準偏差 σ_R は式（8.1.47）に $n_S = 1$ を代入したもので与えられる．

$$\begin{aligned}\sigma_R^2(z) = {}& \frac{16\pi N^2}{25\Omega_M^2 H_0^4} \frac{C^2\left(\Omega_\Lambda/\Omega_M(1+z)^3\right)}{(1+z)^2} \\ & \times \int_0^\infty \left|\mathcal{T}(\sqrt{2}k/k_{\mathrm{EQ}})\right|^2 |f(kR)|^2\, k^3\, dk\,. \end{aligned} \tag{8.2.17}$$

ここで f は式（8.1.46）で与えられるトップハット型分布関数，$\mathcal{T}$ は 6.5 節で定義し計算したスカラー型摂動の遷移関数，k_{EQ} は物質と放射の密度が等しくなった時刻に地平線の中に入ってきた摂動の波数で，式（8.1.41）で与えられる．次に，式（8.2.9）を用いれば，この確率分布関数を時間に依存しない形 $\tilde{P}_R(\rho_1)\,d\rho_1$，

$$\tilde{P}_R(\rho_1)\,d\rho_1 = \frac{d\rho_1}{3\sqrt{2\pi}\rho_1^{2/3}\tilde{\sigma}_R} \exp\left(-\frac{\rho_1^{2/3}}{2\tilde{\sigma}_R^2}\right) \tag{8.2.18}$$

に書くことができる．この関数は，任意の点に置いた共動半径 R の球の内部の密度ゆらぎが持つ初期強度が，ρ_1 から $\rho_1 + d\rho_1$ の間にある確率を与える．$\tilde{\sigma}_R$ は時間に依存しない量で，次のように定義する．

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_R^2 &\equiv \lim_{z\to\infty} \bar{\rho}_M^{2/3}(t(z))\sigma_R^2(z) \\ &= \frac{16\pi N^2}{25}\left(\frac{3}{8\pi G}\right)^2 \bar{\rho}_{M0}^{-4/3} \int_0^\infty \left|\mathcal{T}(\sqrt{2}k/k_{\mathrm{EQ}})\right|^2 |f(kR)|^2\, k^3\, dk\,. \end{aligned} \tag{8.2.19}$$

共動半径 R の球に渡って平均しているので，R よりも**大きい**共動半径を持つゆらぎのみがこの確率に寄与する．この分布関数を積分すれば，ゆらぎが非線形にな

る前の時刻に，空間の任意の点にあるゆらぎが持つ初期強度が ρ_1 より大きく，共動半径が R よりも大きい確率を求めることができる．

$$P\ (>\rho_1, >R) = \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho}{3\sqrt{2\pi}\rho^{2/3}\tilde{\sigma}_R} \exp\left(-\frac{\rho^{2/3}}{2\tilde{\sigma}_R^2}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\rho_1^{1/3}/\sqrt{2}\tilde{\sigma}_R\right)\right] , \quad (8.2.20)$$

ここで $\mathrm{erf}(y)$ は通常の誤差関数を表す．

$$\mathrm{erf}(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-y\sqrt{2}}^{y\sqrt{2}} dx\ \exp(-x^2/2)\ . \quad (8.2.21)$$

早期には宇宙の物質分布はほぼ一様なので，式（8.2.20）は初期強度が ρ_1 より大きく，共動半径が R より大きなゆらぎに含まれる物質量が全物質量に占める割合を与える．ここで，式（8.2.20）の ρ_1 に，時刻 t までにゆらぎが重力崩壊するのに必要な臨界初期強度 $\rho_1(t)$ を代入してみよう．

$$F\ (>R, t) = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\rho_1^{1/3}(t)/\sqrt{2}\tilde{\sigma}_R\right)\right]\ . \quad (8.2.22)$$

この式は，非線形効果が重要となる時刻 t における全物質量のうち，R より大きな共動半径を持つ構造に重力崩壊した物質量の割合を与える．共動半径 R の球に含まれる質量 $4\pi\bar{\rho}_M(t)a^3(t)R^3/3$ は時間に依存しないので，時刻 t までに重力崩壊した構造のうち質量が M と $M + dM$ の間にあるものの数密度 $n(M,t)\,dM$ は，

$$n(M,t) = -\frac{\bar{\rho}_M(t)}{2M}\frac{d}{dM}\mathrm{erf}\left(\rho_1^{1/3}(t)/\sqrt{2}\tilde{\sigma}_{R(M)}\right) = \frac{\rho_1^{1/3}(t)\,\bar{\rho}_M(t)}{M\sqrt{2\pi}}\left|\frac{d\,\tilde{\sigma}_{R(M)}^{-1}}{dM}\right| \exp\left(-\frac{\rho_1^{2/3}(t)}{2\tilde{\sigma}_{R(M)}^2}\right) \quad (8.2.23)$$

で与えられることになる．ここで $R(M) \equiv (3M/4\pi a^3\bar{\rho}_M)^{1/3}$ を表す．（プレスとシェヒターは，密度ゆらぎが負の領域にある物質量も考慮するため，幾分適当ではあるが，この結果を 2 倍した[*7]．）重力崩壊で生じたこれらの構造は，やがて，銀河を取り囲む冷たい暗黒物質のハローを形成する[*8]．

[*7] この因子 2 の導出に関しては J. R. Bond, S. Cole, G. Efstathiou, N. Kaiser, *Astrophys. J.* **379**, 440 (1991) を見よ．

[*8] 球対称でないゆらぎの重力崩壊が質量関数 $n(M,t)$ に与える影響は，P. Monaco, *Astrophys. J.* **447**, 23 (1995); J. Lee, S. F. Shandarin, *Astrophys. J.* **500**, 14 (1998); R. K. Shethand G. Tormen, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **308**, 119 (1999); R. K. Sheth, H. J. Mo, G. Tormen, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **323**, 1 (2001) によって考慮されている．

式（8.2.23）を使うには，$\tilde{\sigma}_{R(M)}$ の質量依存性がわかっていなければならない．質量と半径が大きい場合には，式（8.2.19）の積分は小さい波数 k によって支配され，そこでは遷移関数 $T(\kappa)$ は 1 に近いから，式（8.2.19）は $\tilde{\sigma}_R^2 \propto R^{-4}$ を与え，したがって $\tilde{\sigma}_{R(M)}^2 \propto M^{-4/3}$ である（原始ゆらぎのスペクトルが $\mathcal{R}_q \propto q^{(-4+n_S)/2}$ なら，式（8.2.19）の中の $k^3 dk$ は $k^{2+n_S} dk$ となり，$\tilde{\sigma}_R^2 \propto R^{-3-n_S}$，したがって $\tilde{\sigma}_{R(M)}^2 \propto M^{-(3+n_S)/3}$ を得る）．この場合，式（8.2.23）の指数関数の引数は（$n_S = 1$ のとき）$M^{4/3}$ に比例するから，大きい質量を持つ構造の数密度は急激に小さくなる．一方，質量と半径が小さい場合には，式（8.2.19）の積分は大きい波数 k によって支配され，式（6.5.11）によればそこでの遷移関数 $T(\kappa)$ は $\ln k/k^2$ に比例して減少する．すると（8.2.19）の積分は R に関して対数的にしか変化しないので，小さい M での $n(M)$ は M^{-2} にほぼ比例する．式（8.2.23）から予言される質量関数の M 依存性は，冷たい暗黒物質の進化を計算する大規模なコンピュータシミュレーションから得られた結果とそれなりによく一致している[*9]．

8.3　バリオン物質の重力崩壊

これまでは，宇宙のバリオン物質（再結合後の宇宙ではバリオン物質は主に中性水素とヘリウムから成っている）の圧力は無視できるほど小さいと仮定してきた．この場合，バリオン物質は，膨張するのも収縮するのも単に冷たい暗黒物質の進化に従う．しかし，2.3 節で学んだように，実際にはバリオン物質は再結合後の宇宙でも小さい電離度を残しており，バリオンの温度は赤方偏移が 150 程度以下（0.1 億年以上）になるまでは自由電子と光子のコンプトン散乱を通じてマイクロ波背景放射の温度と等しく保たれる．密度超過領域が小さいと，ゆらぎの重力場がバリオンの圧力を打ち破るほど十分大きくないため,（バリオンの圧力を感じない）冷たい暗黒物質は重力崩壊できてもバリオン物質は重力崩壊できない．このため，比較的小さな暗黒物質の塊は銀河を含まず，重力の効果以外では検出することができない．ここで生じる疑問は，バリオン物質の重力崩壊を止めるには，その物質の塊がどれくらい小さくなければならないのか？ということである．

冷たい暗黒物質の存在が広く受け入れられる以前は，この問題はジェームス・

*9 V. Springel *et al.*, *Nature* **435**, 629 (2005) [astro-ph/0504097].

ジーンズが考案した簡単な理論によって調べられてきた[*1]．この理論によれば，小さな摂動が振動，あるいは成長するかは，摂動の波数がある臨界波数 $k_J = \sqrt{4\pi G\bar{\rho}_B}/v_s$（$v_s$ は音速）よりも大きいか小さいかで決まる．ある物質の塊の質量が $\bar{\rho}_B(2\pi/k_J)^3$ で与えられる**ジーンズ質量**よりも小さい場合には，塊は小さ過ぎて重力崩壊することができない．この理論は（提唱された時期を考えれば当然のことだが），もともとは膨張宇宙には適用されていなかったが，膨張の効果が考慮されても大枠は変わらない[*2]．しかし，これから見るように，冷たい暗黒物質の効果を考慮すると結果は大きく変わる．

本節では放射が重力場に寄与しない時期の非相対論的物質のみを考えるから，付録 F で述べるニュートン的な宇宙理論を用いることができる．式（F.15），（F.16）を導出する際に用いたような理屈から，圧力の 2 乗が $\partial p_B/\partial \rho_B = v_s^2$ であるバリオン物質，および圧力がゼロである冷たい暗黒物質の両方を考えた場合，共動波数 $\boldsymbol{q}$ を持つ速度ポテンシャルの摂動 δu_B，δu_D と密度の摂動 $\delta\rho_B$，$\delta\rho_D$ が以下の連続の式，

$$\frac{d\delta\rho_D}{dt} + 3H\delta\rho_D - a^{-1}\bar{\rho}_D\,\boldsymbol{q}^2\delta u_D = 0\,, \tag{8.3.1}$$

$$\frac{d\delta\rho_B}{dt} + 3H\delta\rho_B - a^{-1}\bar{\rho}_B\,\boldsymbol{q}^2\delta u_B = 0 \tag{8.3.2}$$

およびオイラーの式，

$$\frac{d\delta u_D}{dt} + H\delta u_D = \frac{4\pi Ga}{\boldsymbol{q}^2}\Big[\delta\rho_D + \delta\rho_B\Big]\,, \tag{8.3.3}$$

$$\frac{d\delta u_B}{dt} + H\delta u_B = \frac{4\pi Ga}{\boldsymbol{q}^2}\Big[\delta\rho_D + \delta\rho_B\Big] - \frac{v_s^2}{a\bar{\rho}_B}\delta\rho_B \tag{8.3.4}$$

を満たすことを導ける．相対論的なゆらぎの解析を行ったときと同様に，密度摂動と摂動を含まない平均密度の比 $\delta_n \equiv \delta\rho_n/\bar{\rho}_n$ を用いて式を書き直すと便利である．摂動を含まない密度 $\bar{\rho}_n$ は $a^{-3} \propto t^{-2}$ に比例して減少するというフリードマンの結果を用い，さらに速度ポテンシャルを消去すれば，以下の式を得る．

$$\ddot{\delta}_D + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_D = \frac{2}{3t^2}\Big[\beta\delta_B + (1-\beta)\delta_D\Big]\,, \tag{8.3.5}$$

$$\ddot{\delta}_B + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_B = -\frac{2\alpha}{3t^2}\delta_B + \frac{2}{3t^2}\Big[\beta\delta_B + (1-\beta)\delta_D\Big]\,, \tag{8.3.6}$$

[*1] J. Jeans, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **199A**, 49 (1902), *Astronomy and Cosmogony*（第 2 版．1928 年に Cambridge University Press から出版され，1961 年に Dover Publications から再版された）の 345–350 ページを見よ．

[*2] G&C，15.9 節．

ここで，α と β は以下のように定義される量，

$$\alpha \equiv \frac{3\boldsymbol{q}^2 v_s^2 t^2}{2a^2} = \frac{\boldsymbol{q}^2 v_s^2}{4\pi G \bar{\rho}_M a^2}\,, \qquad \beta \equiv \frac{\bar{\rho}_B}{\bar{\rho}_M} = \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \simeq 0.17 \tag{8.3.7}$$

で，$\bar{\rho}_M \equiv \bar{\rho}_D + \bar{\rho}_B$ である．

バリオン物質の温度が放射の温度と等しかった時期（およそ $z > 150$）には，$v_s^2 \propto T \propto a^{-1}$ であるから α が一定となることに着目しよう．この性質のため，この時期の式（8.3.5），(8.3.6）の解は以下のような冪則の形に書ける[*3]．

$$\delta_D \propto t^\nu\,, \qquad \delta_B = \xi\, \delta_D\,, \tag{8.3.8}$$

ここで，ν と ξ は時間に依存しない量である（$\boldsymbol{q}$ には依存する）．この解の形を式（8.3.5），(8.3.6）に代入すれば，ν と ξ を決める式として，

$$\nu(\nu-1) + \frac{4\nu}{3} = \frac{2}{3}\Big[\beta\xi + (1-\beta)\Big]\,, \tag{8.3.9}$$

$$\nu(\nu-1) + \frac{4\nu}{3} + \frac{2\alpha}{3} = \frac{2}{3}\Big[\beta + (1-\beta)/\xi\Big] \tag{8.3.10}$$

が得られ，ξ を消去することで ν の 4 次方程式が得られる．これは一般的に 4 つの異なる解を持つから，4 次の微分方程式系である式（8.3.5），(8.3.6）は 4 つの独立な冪則の解を持ち，それ以外に解はない．

式（8.3.9），(8.3.10）の一般解は複雑すぎて有用ではないので，β の値が小さいことを利用して近似解を見つけることにしよう．β が非常に小さければ，$\xi < 1$ となる「バリオンが欠乏した」解が 2 つある．

$$\nu = 2/3\,, \qquad \xi = \frac{1}{1+\alpha}, \tag{8.3.11}$$

$$\nu = -1\,, \qquad \xi = \frac{1}{1+\alpha}. \tag{8.3.12}$$

そして，$\xi \gg 1$ となる「バリオンが豊富な」解も 2 つある．

$$\nu = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} - \frac{2\alpha}{3}}\,, \qquad \xi = -\frac{1+\alpha}{\beta}\,. \tag{8.3.13}$$

式（8.3.11）で与えられる最初の解を除けば，すべての解は時間とともに減衰する．最初の解ではバリオンも冷たい暗黒物質も $t^{2/3}$ に比例して増加するので，この解が後期において支配的となる．次に，β の 1 次まで考慮すると，この解の冪

[*3] 近似的な冪則の解は，P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **277**, 470 (1984) によって与えられた．

とバリオン摂動–暗黒物質摂動比は以下で与えられる.

$$\nu = 2/3 - \frac{2\beta\alpha}{5(1+\alpha)}\,, \qquad \xi = \frac{1}{1+\alpha} - \frac{\beta\alpha^2}{(1+\alpha)^3}\,.$$

バリオンによる ν, ξ への補正は摂動の波長が非常に短いときに最大となり，初項と比べてそれぞれ $3\beta/5 \simeq 10\%$, $\beta \simeq 17\%$ に達する.

これらの解には，古典的な 1 成分のジーンズ理論のように成長解と振動解を分ける臨界波数のようなものは存在しない. 式 (8.3.11) で与えられる成長解はすべての波数で成長するし，β が小さい場合にはその成長率も波数にほとんど依存しない. これは要するに，バリオン物質の圧力では，冷たい暗黒物質の塊の密度が平均密度よりも高くなることを止められないことを意味する. 波数に依存するのは，バリオン物質の密度ゆらぎと冷たい暗黒物質の密度ゆらぎの比 ξ である. これは，1 辺の長さが摂動の物理的波長 $2\pi a/q$ で与えられる立方体に含まれる全質量（暗黒物質とバリオン物質を合わせた質量）M を用いることでより便利に表せる.

$$M \equiv \bar{\rho}_M \left(\frac{2\pi a}{q}\right)^3. \tag{8.3.14}$$

式 (8.3.11), (8.3.7) で与えられる ξ と α を用いれば，冷たい暗黒物質とともに重力崩壊することのできたバリオン物質の比は,

$$\frac{\delta\rho_B/\bar{\rho}_B}{\delta\rho_D/\bar{\rho}_D} \equiv \xi = \frac{1}{1+(M_J/M)^{2/3}} \tag{8.3.15}$$

で与えられることがわかる. ここで，M_J はジーンズ質量のようなもので，以下で与えられる.

$$M_J = \left(\frac{\pi}{G}\right)^{3/2} \frac{v_s^3}{\bar{\rho}_M^{1/2}}\,. \tag{8.3.16}$$

質量が M_J よりずっと大きい塊を考えた場合，冷たい暗黒物質とともにバリオン物質も重力崩壊できるが，質量が M_J よりずっと小さい塊はバリオン物質をほとんど含まない.

温度 T を持つ水素とヘリウム原子からなるガスの音速は，$v_s = (5k_B T/3\mu m_N)^{1/2}$ で与えられる. μ は平均分子量で，重量で測ったヘリウム存在量が 24%のときの値は $\mu = 1.22$ になる. 今は $T = T_\gamma$ である時期を考えており，かつ $T_\gamma^3/\bar{\rho}_M$ はその現在時刻での値 $T_{\gamma 0}^3/\bar{\rho}_{M\,0}$ と等しいから，ジーンズ質量は次のように求まる.

$$M_J = \left(\frac{5\pi k_{\mathcal{B}} T_{\gamma\,0}}{3\mu m_N G}\right)^{3/2} \bar{\rho}_{M\,0}^{-1/2} = 2.02 \times 10^5\,(\Omega_M h^2)^{-1/2}\,M_\odot\,. \qquad (8.3.17)$$

$\Omega_M h^2 = 0.13$ を代入すると $6 \times 10^5\,M_\odot$ が得られ，対応するバリオンの質量は $\beta M_J \simeq 10^5\,M_\odot$ である．

赤方偏移が 150 以下になると，再結合の時期の名残りの自由電子と宇宙マイクロ波背景放射のコンプトン散乱だけではバリオンの温度を放射の温度と等しく保てないようになる．したがって，この時期の水素とヘリウム原子の運動エネルギー（つまり温度）は a^{-2} に比例して減少する（式（1.1.23）[訳注 1]を見よ）．バリオンの温度が下がるにつれ，より多くのバリオンが冷たい暗黒物質の塊に落ち込んでゆくが，この過程は重力崩壊に伴うポテンシャルエネルギーの解放によってバリオンが再び加熱されたり，やがては第一世代の星によって加熱されるまでしか続かない．バリオンの温度が上昇するとバリオン物質の降着は止まり，バリオンの一部が物質の塊から排除されることも起こりうる．これは非常に込み入った問題ではあるが[*4]，M_J よりも質量の小さい冷たい暗黒物質の塊はバリオン物質をすべて閉じ込めておけないという結論は変わらない．

訳注 1　$P(t) \propto 1/a(t)$.

*4　P. R. Shapiro, M.L. Giroux, A. Babul, *Astrophys. J.* **427**, 25 (1994).

第9章
重力レンズ

1979年，ウォルシュ，カースウェル，ウェイマンは，赤方偏移が同じ（約1.4）で，位置がわずか6″しか離れていない1対のクエーサーを発見した[*1]．これら2つのクエーサーのスペクトルが酷似していたことから，彼らはこれらのクエーサーが本当は（現在Q0957+561として知られる）1つのクエーサーで，我々とクエーサーの間にある重い天体の重力場によって光が曲げられ，像が2つに分かれたものであると考えた．この考えは，これら2つの像の視線方向の間に赤方偏移0.36の銀河が発見されたことで確認された．このような重力レンズ現象はすでに多くの研究者によって理論的に研究されていたが，ついに観測による本格的な探査が開始された[*2]．以降，数多くのレンズ天体が発見され，それらの大部分は楕円銀河であった．銀河団による重力レンズで生成されるアーク状の像もいくつか観測されている[*3]．

強い重力レンズ効果は，暗い天体の探査や銀河団の構造の研究，そしてハッブル定数の測定に用いられてきた．弱い重力レンズ効果は，密度ゆらぎの相関関数を測定するのに強力な手段となる可能性がある．重力レンズは大きなテーマであるが，本章ではその宇宙論的意義を概観するに留めておく．

[*1] D. Walsh, R. F. Carswell, R. J. Weymann, *Nature* **279**, 381 (1979).

[*2] 重力レンズ効果の包括的なレビューは，*Gravitational Lenses*, by P. Schneider, J. Ehlers, E. E. Falco, Springer-Verlag (1992) を見よ．より最近のレビューは，G. Soucail, *Proceedings of the* XX *Texas Symposium on Relativistic Astrophysics*, Austin, December 2000 に与えられている．

[*3] R. Lynds, V. Petrosian, *Bull. Amer. Astron. Soc.* **18**, 1014 (1986); G. Soucail, B. Fort, Y. Mellier, J. P. Picat, *Astron. Astrophys.* **172**, L14 (1987); G. Soucail *et al.*, *Astron. Astrophys.* **191**, L19 (1988).

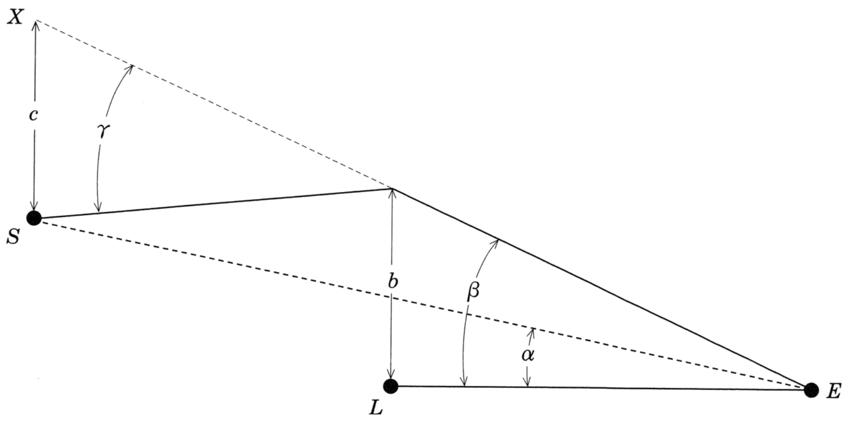


図 9.1　レンズ方程式 (9.1.5) の導出の際に必要となる量．折れ曲がった実線は，光源 S からレンズ L のそばを通って地球 E へ届く光の経路を表す．点 X は，地球から見た光源の見かけの位置．レンズから光の経路までの距離 b，光源からその見かけの位置までの距離 c，および角度 α，β，γ は，すべて大きく誇張して描いている．この図は $K = 0$ の場合を表すが，$|K| \neq 0$ の場合，地球を中心とするロバートソン–ウォーカー座標では，光源から折れ曲がりまでの光の経路は直線でなくカーブを描く．

9.1　質点のレンズ方程式

まず始めに質点によって生成される重力レンズを考え，その後，より込み入ったモデルを扱うことにしよう．質点によって像が分かれる現象を解析するため，地球を中心とするロバートソン–ウォーカー座標系において，地球と点光源を結ぶ直線と，地球とレンズ質量を結ぶ直線とがなす角度を α としよう（図 9.1 を参照）．

もし重力による光の曲がりがなければ，これが光源とレンズのなす角度となる．しかし，重力レンズによる光の曲がりのため，実際に観測される光源の像とレンズとがなす角度 β は α とは異なる．したがって，これらの角度 β と α の関係を与える**レンズ方程式**を導く必要がある．

光源から発せられた光は，まずレンズの近傍に到達する．$K \neq 0$ のとき，地球を中心とする座標系では，光源からレンズ近傍までの光線の軌跡はカーブを描く．そして光線はレンズの重力場によって曲げられた後，地球までまっすぐ届く．光

線がレンズに最接近したときの，レンズから光線までの固有距離 b（この距離は宇宙論的な距離 $1/H_0$ よりもずっと小さいものと仮定する）は，

$$b = \beta\, d_A(EL) \tag{9.1.1}$$

で与えられる．ここで，$d_A(EL)$ は地球から見たレンズの「角径距離」を表す．1.4 節で学んだように，一般に，点 P から見た点 Q の角径距離 $d_A(PQ)$ は，Q における（線 PQ に垂直な）固有長さ h と，この長さを点 P から見た時の見こみ角 θ の比 h/θ で与えられる．$K=0$ のときは，

$$d_A(PQ) = a(t_Q) r_P(Q) \tag{9.1.2}$$

で与えられ，$r_P(Q)$ は点 P を中心とするロバートソン–ウォーカー座標系で測った点 Q の動径座標，そして t_Q は光が点 Q を出発，あるいは点 Q に到着する時刻を表す（この座標系では，点 P で受け取る光線の軌跡はすべて直線となる）．図 9.1 より，光源の真の位置と見かけの位置を結ぶ線素 SX は以下で与えられる固有長さ c を持つことがわかる．

$$\gamma\, d_A(LS) = c = \Big(\beta - \alpha\Big)\, d_A(ES)\ , \tag{9.1.3}$$

ここで，γ はレンズから見たレンズ付近の光の曲がり角で，一般相対論を用いて以下のように計算できる[*1]．

$$\gamma = \frac{4MG}{b}\ . \tag{9.1.4}$$

$d_A(LS)$ と $d_A(ES)$ は，それぞれレンズから光源までの角径距離，および地球から光源までの角径距離を表す．式（9.1.1），(9.1.3)，(9.1.4）より，以下の結果を得る．

$$\Big(\beta - \alpha\Big)\beta = \frac{\gamma d_A(LS)}{d_A(ES)}\frac{b}{d_A(EL)} = \frac{4MG\, d_A(LS)}{d_A(ES)\, d_A(EL)} \equiv \beta_E^2\ . \tag{9.1.5}$$

これがレンズ方程式である．これは β に関する 2 次方程式なので 2 つの解，すなわち点源が 2 つの像に分かれる方向を与える．大きなスケールでの時空の幾何学や宇宙膨張の効果はすべて角径距離 $d_A(EL)$，$d_A(ES)$，$d_A(LS)$ に含まれている．(一般には，これらはすべて独立な距離である．$K \neq 0$ のときには $d_A(ES) = d_A(EL) + d_A(LS)$ とはなら**ない**.）

レンズ方程式（9.1.5）は 2 つの解を持つ．

---

*1　G&C，8.5 節．

$$\beta_\pm = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta_E^2} \ . \tag{9.1.6}$$

レンズを取り除くことはできないので，角 α は観測できない．したがって，もし光源の 2 つの像がなす角度しかわからない場合は，レンズ銀河の質量の上限値を求めることしかできない．

$$|\beta_+ - \beta_-|^2 \geqq 4\beta_E^2 \ . \tag{9.1.7}$$

たとえば，$d_A(EL) = d_A(LS) = 100$ Mpc，$d_A(ES) = 200$ Mpc のときに光源が $1''$ だけ離れた 2 つの像に分かれたとすれば，$M \leqq 6 \times 10^9$ 太陽質量を得る（$M_\odot G = 1.475$ km，1 Mpc$= 3.09 \times 10^{19}$ km である）．

一方，もしレンズ銀河と光源の 2 つの像をすべて観測できれば，それぞれの像とレンズ銀河がなす角度 $\beta_\pm$ を個別に測定できる．α が不定であるから，式（9.1.6）をうまく使うには，2 つの解をかけあわせて α を消去すればよい．

$$\beta_+\beta_- = -\beta_E^2 \ . \tag{9.1.8}$$

（符号が負なのは，2 つの像が現れる方向がレンズ銀河を挟んで逆方向であることを意味する．）これから質量 M を計算できるが，赤方偏移の測定から距離を計算した場合，その距離は $1/H_0$ に比例するため，このようにして求められる量は実際には MGH_0 である．（1.9 節で見たように，速度分散と角径距離の測定も MGH_0 を与える．）

レンズ銀河が光源と地球を結ぶ直線上にあるような特殊な場合には，視線方向まわりの軸対称性より，像の対ではなくて**アインシュタインリング**ができる．アインシュタインリングの角半径は式（9.1.5）で $\alpha = 0$ として得られる β の値，つまり角度 β_E そのものとなる．添字にアインシュタイン（Einstein）の E を用いたのはこのためである．光源 MG1131+0456 に始まり，アインシュタインリングは多くの電波源で観測されている[*2]．

9.2 増光：強いレンズとマイクロレンズ

重力レンズによって生成される様々な像は，すべて同じ見かけの光度を持つとは限らない．見かけの光度は単位面積あたりに受け取る光の量なので，望遠鏡の鏡面の様々な部分に到達する光の経路を考えなくてはいけない．この問題を考え

[*2] G. H. Chen, C. S. Kochanek, J. N. Hewitt, *Astrophys. J.* **447**, 62 (1995).

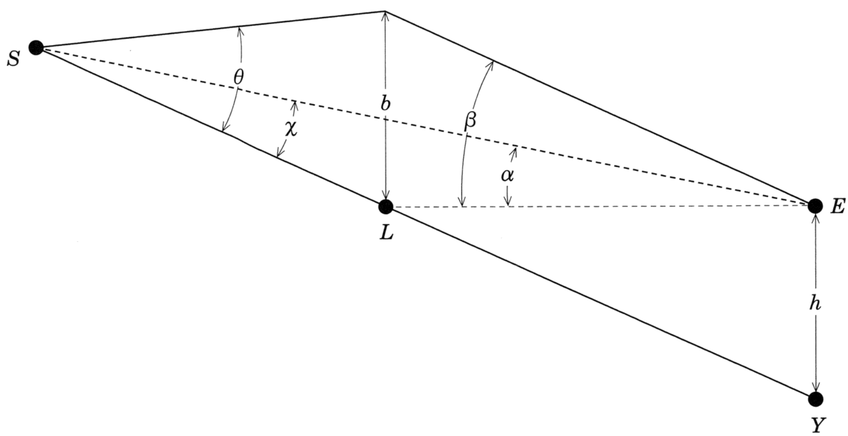


図 9.2 増光公式（9.2.4）の導出の際に必要となる量．折れ曲がった実線は，光源 S からレンズ L のそばを通って望遠鏡の鏡面上の点 E へ届く光の経路を表す．地球近傍の定点 Y は，光源とレンズを結ぶ線の延長線上にあるものとする．レンズから光の経路までの距離 b，点 Y から光が到達する望遠鏡上の点 E までの距離 h，および角度 α，β，χ，θ は，すべて大きく誇張して描いている．図 9.1 同様，この図も $K = 0$ の場合に関して描いてあるが，$|K| \neq 0$ の場合，地球を中心とするロバートソン–ウォーカー座標では，光源から折れ曲がりまでの光の経路は直線でなくカーブを描く．

るため，光を受け取る面積内の様々な点の位置を，ある定点 Y から見た相対的な位置で表そう．定点 Y は，この問題が持つ対称性の軸上，すなわち点光源（あるいは広がった光源上のある点）とレンズを結ぶ直線の延長線上，かつ地球近傍にとることにする（図 9.2 を参照）．定点 Y から望遠鏡上の点 E までの距離を h とし，光源から見て，光源から望遠鏡上の点 E に達する光線の経路と（光源を中心とするロバートソン–ウォーカー座標系において）光源とレンズを結ぶ線とがなす角度を θ としよう．すると h は θ の関数として考えることができる．光源から発せられた光のうち，光線の進行方向の極角が θ と $\theta + d\theta$ の間（ただし $\theta \ll 1$）にあり，かつ（光源の位置で測った，光源とレンズを結ぶ直線のまわりの）方位角が ϕ と $\phi + d\phi$ の間にある光の割合は $\theta\, d\theta\, d\phi/4\pi$ で与えられる．一方，高さが dh，幅が $h\, d\phi$ の長方形の中に光を受け取る場合，その面積は $h\, dh\, d\phi$ であるか

ら，見かけの光度は以下のように求められる．

$$\ell = \left| \frac{L\,\theta\, d\theta\, d\phi/4\pi}{h\, dh\, d\phi\,(1+z_S)^2} \right| = \frac{L}{4\pi\,(1+z_S)^2} \left| \frac{\theta\, d\theta}{h\, dh} \right| . \tag{9.2.1}$$

（因子 $(1+z_S)^{-2}$ は，赤方偏移によって個々の光子のエネルギーが減少し，かつ赤方偏移によって単位時間に受け取る光子の数が単位時間に光源から放出される光子の数よりも少なくなることを表す.）さて，まず図 9.2 より，

$$h = d_A(SE)\chi = d_A(SE) d_A(EL)\alpha / d_A(SL) \tag{9.2.2}$$

であることがわかる．ここで，χ は光源と望遠鏡上の点を結ぶ線と光源とレンズを結ぶ線とがなす角度を表す．次に，

$$\theta = b/d_A(SL) = \beta\, d_A(EL)/d_A(SL) \tag{9.2.3}$$

である（9.1 節と同様，任意の点 P，Q に対し，$d_A(PQ)$ は P から見た Q の角径距離を表す）．これらの結果を式（9.2.1）に代入すれば，

$$\ell = \ell_0 \left| \frac{\beta\, d\beta}{\alpha\, d\alpha} \right| \tag{9.2.4}$$

を得る．ℓ_0 はレンズがなければ観測されるであろう光度で，以下で与えられる．

$$\ell_0 = \frac{L}{4\pi\,(1+z_S)^2 d_A^2(SE)} . \tag{9.2.5}$$

（$r_S(E) = r_E(S)$ であるから，式（9.1.2）より $d_A(SE) = (1+z_S) d_A(ES)$ である．式（1.4.12）[訳注 1]によれば地球から見た光源の光度距離は $d_L(S) = (1+z_S)^2 d_A(ES) = (1+z_S) d_A(SE)$ であるから，式（9.2.5）の分母は（4π を除けば）確かに光度距離の 2 乗であることがわかる.）

式（9.2.4）は非常に一般的な結果で，あらゆる種類のレンズと光源に適用できる．広がった光源に対しては特に有用である．そのような光源の像の立体角の一部が $\beta\,\Delta\beta\,\Delta\phi$，見かけの光度が $\Delta\ell$ である場合，表面輝度は $\Delta\ell/\beta\,\Delta\beta\,\Delta\phi$ で与えられる．式（9.2.4）よりこれは $\Delta\ell_0/\alpha\,\Delta\alpha\,\Delta\phi$ に等しいことがわかるが，これはレンズがない場合に像が持つであろう表面輝度に等しい．すなわち，**重力レンズは表面輝度を変えない**．もちろん，これは重力レンズが光子の数やエネルギーを変えないためである．

さて，レンズが質点である場合に特化して考えてみよう．レンズ方程式（9.1.5）

訳注 1　$d_A/d_L = (1+z)^{-2}$.

より，

$$\alpha = \beta - \beta_E^2/\beta \tag{9.2.6}$$

であるから，

$$\frac{\alpha\, d\alpha}{\beta\, d\beta} = 1 - \beta_E^4/\beta^4 \tag{9.2.7}$$

が得られ，式（9.2.4）で与えられる光度は，

$$\ell = \frac{\ell_0}{|1 - \beta_E^4/\beta^4|} \tag{9.2.8}$$

となる．

光源と観測者を結ぶ直線からレンズまでの距離 a[*1]が小さいときには $\alpha \ll \beta_E$ であるから，式（9.1.6）で与えられる β の 2 つの解は，

$$\beta_\pm \longrightarrow \pm\beta_E + \frac{1}{2}\alpha \tag{9.2.9}$$

となる．この場合，像は両方とも $|\beta_E/2\alpha|$ 倍増光される．一方，光源と観測者を結ぶ直線からレンズまでの距離 a が大きいときには $\alpha \gg \beta_E$ であるから，式（9.1.6）で与えられる β の 2 つの解は，

$$\beta_+ \longrightarrow \alpha \gg \beta_E\ , \qquad -\beta_- \longrightarrow \beta_E^2/\alpha \ll \beta_E \tag{9.2.10}$$

となる．この場合，「−」に対応する光線は見えなくなり，「+」に対応する光線は重力レンズがないときと同じ明るさを持つ．

したがって，大雑把にいえば，ある質点が 2 つ以上の像をともなうはっきりした**強い重力レンズ効果**を引き起こすには，$\alpha \leqq \beta_E$ が必要となる．つまり，光源と観測者を結ぶ直線からレンズまでの固有距離が以下で与えられる $a_{最大}$ よりも小さければ強い重力レンズ効果が起こる．

$$a_{最大} = \beta_E d_A(EL) = \sqrt{\frac{4MGd_A(LS)d_A(EL)}{d_A(ES)}}\ . \tag{9.2.11}$$

式（9.1.2）を用いれば，これは，

$$a_{最大} = \sqrt{\frac{4MGr_L(S)r_E(L)a(t_L)}{r_E(S)}} = \sqrt{\frac{4MGr_L(S)r_E(L)a(t_E)}{r_E(S)}}\frac{1}{\sqrt{1+z_L}} \tag{9.2.12}$$

[*1] この a は視線方向に垂直な固有距離で，ロバートソン–ウォーカースケール因子とは関係ない．本節では，ロバートソン–ウォーカースケール因子は常に時間の関数 $a(t)$ として書き，a とは区別する．

と書ける．ここで，t_E は光が地球に届いた時刻（本書の他の場所では t_0 を用いている）で，z_L はレンズの赤方偏移を表す．

$$1 + z_L \equiv a(t_E)/a(t_L)\ . \tag{9.2.13}$$

レンズを中心とするロバートソン–ウォーカー座標系での光源の動径座標 $r_L(S)$ は，地球を中心とするロバートソン–ウォーカー座標系での光源とレンズの動径座標で書くことができる．これら 2 つの座標系で求めた光源とレンズとの間の 3 次元**固有**距離が等しいという条件，

$$\int_0^{r_L(S)} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = \int_{r_E(L)}^{r_E(S)} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \tag{9.2.14}$$

を使えば，以下の結果を得る．

$$r_L(S) = r_E(S)\sqrt{1-Kr_E^2(L)} - r_E(L)\sqrt{1-Kr_E^2(S)}\ . \tag{9.2.15}$$

時刻 t において，質量が M と $M+dM$ の間にある天体の固有体積あたりの個数が $n(t,M)$ で与えられるとすれば，（固有体積要素の式（1.11.2）[訳注 2]より）光源 S の像を重力レンズ効果によって 2 つ以上に分けられたレンズ天体の全個数は以下のように求められる．

$$\begin{aligned} N_S &= \int_0^{r_E(S)} \frac{dr_E(L)a(t_L)}{\sqrt{1-Kr_E^2(L)}} \int_0^\infty \pi a^2_{\text{最大}}\, n(t_L, M)\, dM \\ &= 4\pi G a^2(t_E) \int_0^{r_E(S)} \frac{dr_E(L)\, \rho(t_L)}{(1+z_L)^2\sqrt{1-Kr_E^2(L)}} \frac{r_L(S) r_E(L)}{r_E(S)}, \end{aligned} \tag{9.2.16}$$

ここで，t_L は光源から発せられた光がレンズに届く時刻で，$\rho(t)$ は時刻 t に存在する（レンズを引き起こす可能性のある）天体の全質量密度を表す．

$$\rho(t) \equiv \int_0^\infty n(t,M) M\, dM\ . \tag{9.2.17}$$

また，被積分関数中の $r_E(L)$ と t_L は，

$$\int_0^{r_E(L)} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = \int_{t_L}^{t_E} \frac{dt}{a(t)} \tag{9.2.18}$$

で関係づけられ，$1 + z_L \equiv a(t_E)/a(t_L)$ である．レンズ銀河の密度が進化せず，

訳注 2　$dV = \dfrac{a^3(t)\, r^2\, \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi}{\sqrt{1-Kr^2}}$.

単に宇宙膨張によって薄められるだけであれば $\rho(t_L) = \rho(t_E)(1+z_L)^3$ であるから，式（9.2.16）から以下の結果を得る．

$$N_S = 4\pi G a^2(t_E)\rho(t_E)\int_0^{r_E(S)} \frac{dr_E(L)\,(1+z_L)}{\sqrt{1-Kr_E^2(L)}}\left(\frac{r_L(S)r_E(L)}{r_E(S)}\right). \qquad (9.2.19)$$

$N_S \ll 1$ であればレンズ効果が 2 度起きる可能性は無視できるから，この場合の N_S は光源 S の像が視線方向付近のレンズによって大きく変形する確率とみなすことができる．

赤方偏移が $z_S \ll 1$ の光源に対して，式（9.2.19）は，

$$\begin{aligned} N_S &= 4\pi G a^2(t_E)\rho(t_E)\int_0^{r_E(S)} dr_E(L)\left(\frac{\Big(r_E(S)-r_E(L)\Big)r_E(L)}{r_E(S)}\right) \\ &= \frac{2\pi G r_E^2(S)a^2(t_E)\rho(t_E)}{3} = \frac{2\pi G z_S^2\,\rho(t_E)}{3H_0^2} = \frac{z_S^2\Omega_L}{4} \end{aligned} \qquad (9.2.20)$$

と単純化される．ここで，$\Omega_L \equiv 8\pi G\rho(t_E)/3H_0^2$ は現在の時刻におけるレンズ天体の質量密度と臨界質量密度の比を表す．これより，たとえ Ω_L が $\Omega_M \approx 0.3$ と同じくらい大きくても，$z_S \ll 1$ にある近傍の光源が強いレンズ効果を受ける確率は小さいことがわかる．一方，宇宙論的な距離にある光源が強いレンズ効果を受ける確率はけっして小さくない[*2]．

z_S が 1 程度かそれより大きい場合，強いレンズ効果の確率は宇宙モデルに強く依存する．式（9.2.19）の積分は複雑なので，ここでは 2 つの極端な例（真空のエネルギーに支配された平坦な宇宙，および非相対論的物質に支配された平坦な宇宙）のみを考えることにする．

ド・ジッターモデル ($\Omega_\Lambda = 1$, $\Omega_K = \Omega_M = \Omega_R = 0$)

このモデルでは $a(t)/a(t_E) = \exp\left(H_0(t-t_E)\right)$ なので，

$$r_E(L) = \int_{t_L}^{t_E}\frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a(t_E)H_0}\left[\exp\Big(H_0(t_E-t_L)\Big)-1\right]$$

となる．この式を逆に解けば，

$$a(t_L) = \frac{a(t_E)}{1+a(t_E)H_0 r_E(L)}$$

が得られ，式（9.2.19）は以下のように書ける．

[*2] W. H. Press, J. E. Gunn, *Astrophys. J.* **185**, 397 (1973).

$$N_S = 4\pi G\rho(t_E)a^2(t_E) \times \int_0^{r_E(S)} \left(\frac{r_E(L)(r_E(S)-r_E(L))}{r_E(S)}\right)\Big(1+a(t_E)H_0 r_E(L)\Big)dr_E(L)\,.$$

積分変数を $r_E(L)$ からレンズの赤方偏移 z_L,

$$z_L = \left(\frac{a(t_E)}{a(t_L)}\right) - 1 = a(t_E)H_0 r_E(L)$$

に変えれば，以下の結果を得る．

$$\begin{aligned} N_S &= \frac{4\pi G\rho(t_E)}{H_0^2}\int_0^{z_S}\left(\frac{z_L(z_S-z_L)}{z_S}\right)\Big(1+z_L\Big)dz_L \\ &= \frac{\pi G\rho(t_E)}{3H_0^2}\Big(z_S^3+2z_S^2\Big) = \frac{\Omega_L}{8}\Big(z_S^3+2z_S^2\Big)\,. \end{aligned} \tag{9.2.21}$$

アインシュタイン–ド・ジッターモデル ($\Omega_M = 1$, $\Omega_K = \Omega_\Lambda = \Omega_R = 0$)

このモデルでは $a(t) = a(t_E)(t/t_E)^{2/3}$，$1+z_L = (t_E/t_L)^{2/3}$ なので，

$$\begin{aligned} r_E(L) &= \int_{t_L}^{t_E}\frac{dt}{a(t)} = 3a^{-1}(t_E)\Big(t_E - t_E^{2/3}t_L^{1/3}\Big) \\ &= 3a^{-1}(t_E)t_E\left(1-(1+z_L)^{-1/2}\right) \end{aligned}$$

となる．よって式（9.2.19）より，

$$\begin{aligned} N_S &= \frac{18\pi G\rho(t_E)t_E^2}{1-(1+z_S)^{-1/2}}\int_0^{z_S}dz_L\,\left(1-(1+z_L)^{-1/2}\right)(1+z_L)^{-1/2} \\ &\qquad \times\left((1+z_L)^{-1/2}-(1+z_S)^{-1/2}\right) \\ &= \frac{8\pi G\rho(t_E)}{H_0^2}\left(-4+\frac{\sqrt{1+z_S}+1}{\sqrt{1+z_S}-1}\ln\Big(1+z_S\Big)\right) \\ &= 3\Omega_L\left(-4+\frac{\sqrt{1+z_S}+1}{\sqrt{1+z_S}-1}\ln\Big(1+z_S\Big)\right) \end{aligned} \tag{9.2.22}$$

となる．$z_S \ll 1$ ではこれは z_S^2 に比例して大きくなり，式（9.2.20）の結果と一致する．しかし，$z_S \gg 1$ では成長が鈍り，z_S に関して対数的にしか増大しない．

どちらのモデルでも光源がレンズ効果を受ける確率は光源の赤方偏移が大きくなるに従って増大するが，物質が支配的な場合に比べ，真空のエネルギーが支配的な場合の方がより速く増大する．たとえば $z_S = 2$ のとき，真空が支配的な場合は式（9.2.21）より $N_S = 2\,\Omega_L$ を得るが，物質が支配的な場合は式（9.2.22）よ

り $N_S = 0.30\,\Omega_L$ を得る．

重力レンズの理論と，宇宙レンズ全天サーベイ（Cosmic Lens All Sky Survey）から得られた強い重力レンズの数密度の赤方偏移分布を（$K=0$ と時間一定の真空エネルギーを仮定して）比較した結果，

$$\Omega_M = 0.31^{+0.27}_{-0.14}\,(68\%\ \text{統計誤差})\,^{+0.12}_{-0.1}\,(\text{系統誤差})$$

が得られている[*3]．この測定結果は，他の手法から得られた Ω_M の精度にはまだ及ばないが，観測された強い重力レンズの数が暗黒エネルギーに影響されることを示す確かな証拠である．

レンズが質点で近似できるという仮定は，銀河系内の星によって引き起こされる**マイクロレンズ効果**に対してよく成り立っている．$d_A(EL) \approx 10^3$pc，$d_A(LS) \approx d_A(ES)$，および $MG \approx 1\,\text{km} \approx 3\times10^{-14}$ pc のとき，質点が光源に強い重力レンズ効果を及ぼすことのできる半径 $\sqrt{4MGd_A(EL)d_A(LS)/d_A(ES)}$ は 10^{-5}pc で，これはどんな星の半径よりも遥かに大きい．典型的なマイクロレンズの観測では，(たとえば銀河系外の星のような）遠方の点光源の視線方向上を別の星が通過する際に生じる光源の光度変化をとらえる．視線方向に垂直な方向に 100 km/s で運動する星を考えると，光源の視線方向と星との距離が半径 10^{-5} pc 以内にある期間は約 1 か月となる．これは，見かけの光度変化をモニター観測するには都合の良い期間である．MACHO チームは，大マゼラン雲の方向に 13 から 17 個のマイクロレンズ現象を観測した[*4]．EROS チームは，大マゼラン雲のあまり星の込み入っていない方向に，さらに 3 つのマイクロレンズ現象を観測した[*5]．これらのうち 4 つに関してはレンズ天体の位置が同定されているが，それらのすべては銀河系ハロー内ではなく，大マゼラン雲にあることがわかった[*6]．これより，(かつて暗黒物質の候補であった）非常に暗く，典型的な星の質量を持つような天体ではハローの質量を説明できないことが示唆された（が，説明できないことの証明にはなっていない)[*7]．マイクロレンズは，MOA チーム（Microlensing

---

*3 K.-H. Chae *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 151301 (2002) [astro-ph/0209602].

*4 C. Alcock *et al.*, *Astrophys. J.* **542**, 281 (2000).

*5 T. Laserre *et al.*, *Astron. and Astrophys.* **355**, L39 (2000).

*6 N. W. Evans, in *IDM* 2002: *The* 4th *International Workshop on the Identification of Dark Matter*, eds. N. Spooner, V. Kudryavtsev (World Scientific) [astro-ph/0211302].

*7 この問題に関する議論は，A. F. Zakharov, *Publ. Astron. Obs. Belgrade* **74**, 1 (2002) [astro-ph/0212009]; K. C. Sahu, proceedings of the STSci symposium *Dark Universe*: *Matter, Energy, and Gravity* [astro-ph/0302325] を見よ．

Observations in Astrophysics）[*8]や OGLE チーム（Optical Gravitational Lensing Experiment）[*9]による暗い星や太陽系外惑星の探査にも広く活用されている．

9.3　広がったレンズ

質点で近似したレンズモデルは，銀河団に対してはまったく適用できず，個々の銀河に対してもぎりぎり適用できるかどうかである（$d_A(LS) \approx d_A(EL) \approx 10^{10}$ pc，$d_A(ES) \approx 2 \times 10^{10}$ pc，および $MG \approx 10^{12}$ km ≈ 0.03 pc のとき，質点がレンズ効果をおよぼすことのできる半径 $\sqrt{4MGd_A(EL)d_A(LS)/d_A(ES)}$ は 5×10^4 pc 程度で，これは銀河系を取り囲む球対称ハローの大きさと同程度）．銀河を通過する光線を扱う際，銀河を取り囲むハローを「等温」平衡にある物質の球として近似することがある．この近似では，圧力 p と質量密度 ρ の比が星の速度ベクトルの 1 成分の 2 乗平均値 $\langle v^2 \rangle$ で与えられ，さらにそれがレンズ全体に渡って一定だとされる．

$$p(r) = \rho(r)\langle v^2 \rangle \ . \tag{9.3.1}$$

1.9 節で学んだように，この状態方程式を用いて静水圧平衡の式を解くと，レンズ中心からの固有距離 r が大きいところでの解が，

$$\rho(r) = \frac{2\,\rho(0)}{9(r/r_0)^2} = \frac{\langle v^2 \rangle}{2\pi\,G\,r^2} \tag{9.3.2}$$

のように求まる．半径 r の球の内部にある質量は以下で与えられる．

$$\mathcal{M}(r) = \frac{2\,r\,\langle v^2 \rangle}{G} \ . \tag{9.3.3}$$

小さな r での解のふるまいはこの結果からずれるが，レンズの質量の大部分はこの結果が良い近似となる距離に分布している．

重力場 $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ 中を伝搬する光線の方向を表す単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{u}}$ の変化率は，ポスト・ニュートン近似[訳注 1]から以下のように与えられる[*1]．

---

*8 P. Yock *et al.*, Proceedings of the ninth Marcel Grossman meeting, Rome, July 2000 [astro-ph/0007317].

*9 A. Udalski *et al.*, *Acta Astron.* **54**, 313 (2004) [astro-ph/0411543].

訳注 1　一般相対論の近似で，重力場が弱く，粒子の速度が光速度より十分小さいときに成り立つ．

*1 たとえば，G&C の式（9.2.7）を見よ．式（9.2.7）の右辺に欠けていた因子 -2 は，ここではきちんと与えてある．

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{u}}}{dt} = -2\,\hat{\boldsymbol{u}} \times (\hat{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{g})\,. \tag{9.3.4}$$

球対称で非相対論的な物質分布では,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = -\frac{G\mathcal{M}(r)}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{9.3.5}$$

となるから，等温球の外側を考えた場合には,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = -\frac{2\langle v^2\rangle}{r^2}\boldsymbol{r} \tag{9.3.6}$$

となる．レンズの中心付近を通る光線を考え，中心に最も近づいたときの距離を b とする．このとき，光線の方向 $\hat{\boldsymbol{u}}$ はほぼ一定であるが，大きさが,

$$\gamma = 4\langle v^2\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b\,dx}{x^2+b^2} = 4\pi\langle v^2\rangle \tag{9.3.7}$$

で与えられる小さな角度だけ曲げられる．この角度は b によらない.（光速を 1 としているので $\langle v^2\rangle^{1/2}$ は無次元量で，速度の 2 乗平均平方根を光速で割ったものに等しい.）光線の方向はレンズの中心に向かって曲げられ，光源からやってくる光は 2 つの異なる経路を通って地球に届く．これら 2 つの経路はレンズを中心として反対側にあり，角度 $8\pi\langle v^2\rangle$ だけ離れている．光源の方向に近い経路を通ってくる「+」の光線は，地球とレンズを結ぶ直線から角度 β_+ だけ離れて見え，式 (9.1.3) で与えられる．一方,「+」の光線からレンズをはさんで逆方向の経路を通って来る「−」の光線は，地球とレンズを結ぶ直線から角度 β_- だけ離れて見え（ここでは β_- を正にとる)，式 (9.1.3) の α を $-\alpha$ に置き換えることで与えられる.

$$\gamma d_A(LS) = (\beta_\pm \mp \alpha)\, d_A(ES). \tag{9.3.8}$$

式 (9.3.7) を用いることでレンズ方程式が得られ,

$$\beta_\pm = \pm\alpha + \beta_E\,, \tag{9.3.9}$$

β_E は以下で与えられる.

$$\beta_E = \frac{4\pi\langle v^2\rangle d_A(LS)}{d_A(ES)}\,. \tag{9.3.10}$$

ここで再び地球，レンズ，光源が一直線上にある場合を考えれば，$\alpha = 0$ より 2 つの像は角半径 β_E のアインシュタインリングとなる．今は $\beta_\pm$ が両方とも正だ

と定義したので，レンズ方程式は $\alpha < \beta_E$ のときのみ 2 つの像を与える．これはすなわち，地球と光源を結ぶ直線とレンズとの固有距離 $a = d_A(EL)\alpha$ が以下で与えられる最大値，

$$a_{\text{最大}} = \beta_E d_A(EL) = \frac{4\pi\langle v^2\rangle d_A(LS)d_A(EL)}{d_A(ES)} \tag{9.3.11}$$

より小さいときのみ，2 つの像ができることを意味する．

2 つの像の増光は再び式（9.2.4），

$$\ell = \ell_0 \left|\frac{\beta\, d\beta}{\alpha\, d\alpha}\right|$$

で与えられる．これとレンズ方程式（9.3.9）を組み合わせれば，以下の結果を得る．

$$\ell_\pm = \ell_0 \left|\frac{\beta_\pm}{\alpha}\right| = \ell_0 \left|\frac{\beta_\pm}{\beta_\pm - \beta_E}\right| . \tag{9.3.12}$$

レンズが地球と光源を結ぶ直線に近づくにつれ，増光は無限大に近づく．この場合 $\alpha \to 0$，$\beta_\pm \to \beta_E$ なので，像の対はアインシュタインリングとなる．一方，レンズが地球と光源を結ぶ直線から離れ，式（9.3.11）で与えられる最大距離に達する場合，$\alpha \to \beta_E$ から $\beta_+ \to 2\alpha$，$\beta_- \to 0$ を得る．この極限では，式（9.3.12）より「−」の光線は見えなくなり,「+」の光線の見かけの光度は倍増する．

点光源を，重力レンズ効果によって見かけ上 2 つの像にできる等温球レンズの個数は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} N_S &= \int_0^{r_E(S)} \frac{dr_E(L)a(t_L)}{\sqrt{1 - Kr_E^2(L)}} \pi a_{\text{最大}}^2 n(t_L) \\ &= 16\pi^3\langle v^2\rangle^2 \int_0^{r_E(S)} dr_E(L) \frac{n(t_L)a^3(t_L)}{\sqrt{1 - Kr_E^2(L)}} \left(\frac{r_L(S)r_E(L)}{r_E(S)}\right)^2 , \end{aligned} \tag{9.3.13}$$

ここで，$n(t)$ は時刻 t におけるレンズ天体の固有数密度を表す．単純化のため，すべてのレンズは同じ値の $\langle v^2\rangle$ を持つと仮定した．$K = 0$ を仮定すれば式（9.2.15）より $r_S(L) = r_E(S) - r_E(L)$ が得られ，さらにレンズ銀河が進化しないと仮定すれば $n(t)a^3(t)$ は一定に保たれるので，

$$N_S = 16\pi^3\langle v^2\rangle^2 n(t_E)a(t_E)^3 \int_0^{r_E(S)} \left(\frac{\bigl(r_E(S) - r_E(L)\bigr)r_E(L)}{r_E(S)}\right)^2 dr_E(L)$$

$$= \frac{8\pi^3 \langle v^2 \rangle^2 n(t_E) a(t_E)^3 r_E^3(S)}{15}$$
$$= \frac{8\pi^3 \langle v^2 \rangle^2 n(t_E)}{15H_0^3} \mathcal{F}(z_S) \tag{9.3.14}$$

を得る．ここで，

$$\mathcal{F}(z) \equiv \Big(a(t_E)H_0 r_E(S)\Big)^3 = \left(\int_1^{1+z} \frac{dy}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M y^3 + \Omega_R y^4}}\right)^3 \tag{9.3.15}$$

である．この結果より，光源がレンズ効果を受ける確率は Ω_Λ に強く依存することがわかる．たとえば $\Omega_\Lambda = \Omega_R = 0$，$\Omega_M = 1$ では $\mathcal{F}(z) = 8(1 - 1/\sqrt{1+z})^3$ で，これは大きな z で 8 に近づくが，$\Omega_M = \Omega_R = 0$，$\Omega_\Lambda = 1$ では $\mathcal{F}(z) = z^3$ となる．もし宇宙のエネルギー密度が物質ではなく真空のエネルギーに支配されていれば，$z = 3$ の光源がレンズ効果を受ける確率は 27 倍になる．銀河の観測から得られた式（9.3.14）の値は[*2]，

$$\frac{8\pi^3 \langle v^2 \rangle^2 n(t_E)}{15H_0^3} \simeq 0.02 \tag{9.3.16}$$

であるから，$\Omega_M = \Omega_R = 0$，$\Omega_\Lambda = 1$ のときのレンズの確率は光源の赤方偏移が $z \approx 3.7$ のときに大きくなるはずである．

大きな赤方偏移を持つクエーサーがレンズ効果を受ける確率を用いて，Ω_Λ に制限を与えることができる[*3]．初期に行われたクエーサーのサーベイ観測で得られた強い重力レンズの統計より，時間一定の真空のエネルギー密度は宇宙を平坦にするのに必要な（物質を除く残りの）エネルギー密度には足りないと結論されたことがあった[*4]．それから多くのグループが同様の研究を行い，レンズの有限なコア半径やクエーサーの観測的選択効果などを考慮して，空間的に平坦な宇宙 $\Omega_\Lambda + \Omega_M = 1$ における Ω_Λ の値を制限してきた．得られた結果は $\Omega_\Lambda < 0.9$[*5]，$\Omega_\Lambda < 0.7$[*6]，$\Omega_\Lambda = 0.64^{+0.15}_{-0.26}$[*7]，$\Omega_\Lambda < 0.74$[*8]，$\Omega_\Lambda < 0.79$[*9]，$\Omega_\Lambda =$

---

*2 E. L. Turner, J. P. Ostriker, J. R. Gott, *Astrophys. J.* **284**, 1 (1984).

*3 E. L. Turner, *Astrophys. J.* **242**, L135 (1980).

*4 E. L. Turner, *Astrophys. J.* **365**, L43 (1990).

*5 M. Fukugita, E. L. Turner, *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* **253**, 99 (1991).

*6 D. Maoz, H-W. Rix, *Astrophys. J.* **416**, 425 (1993).

*7 M. Im, R. E. Griffiths, K. U. Ratnatunga, *Astrophys. J.* **475**, 457 (1997).

*8 E. E. Falco, C. S. Kochanek, J. A. Muñoz, *Astrophys. J.* **494**, 47 (1998).

$0.7^{+0.1}_{-0.2}$[*10]，$\Omega_\Lambda \approx 0.45$–$0.75$[*11]などとなった．

重力レンズの等温球モデルを用いて計算された曲がり角 $\Delta\theta$ は，光の経路が実際に等温球内を通過する場合にのみ意味がある．比較的小さな質量を持つ銀河に対しては，1 つ，あるいは両方の光線が銀河の半径 R の外側を通過することがある．光の曲がりはニュートンの重力ポテンシャルにのみ依存するが，ニュートンが示したように，物質が球対称に分布する場合，球の外側のポテンシャルは，すべての質量が球の中心に集中すると仮定して計算したポテンシャルと等しい．したがって，銀河の外側を通過する光線の運動は，9.2 節で学んだ質点のレンズで記述できる．もし光線が銀河の半径よりもずっと外側を通過する場合にはいわゆる**弱い重力レンズ効果**が起きる．これは通常，個々の光源に対してではなく，多くのレンズ効果を受けた銀河の像の向きの相関を調べることで統計的に測定される．弱い重力レンズ効果は 9.5 節で扱う．

9.4 時間の遅れ

光線が重力場中を通過すると，光線の進行方向が曲げられるだけでなく，光線の到達時刻も遅れる[*1]．このため，時間変動する遠方の光源が重力レンズ効果でいくつかの像に分かれると，その時間変動はそれぞれの像で異なった時刻で観測される[*2]．この場合，次の 2 つの効果が存在する．

ひとつ目は「幾何学的な時間の遅れ」で，光源から発せられた光が地球に届くまでに辿る経路が重力レンズ効果によって曲げられ，光が実際に進む距離が伸びることにより生じる．これは非常に大きな距離に渡って生じるため，光線が光線とレンズの最接近点 P で曲がるとして，光の経路を光源から点 P までの測地線，および点 P から地球までの測地線の和として近似して計算できる．光が光源を時刻 t_S に出発し，地球に時刻 t_E に到達するとしよう．すると，

[*9] （233 ページ）A. R. Cooray, J. M. Quashnock, M. C. Miller, *Astrophys. J.* **511**, 562 (1999) [astro-ph/9806080]; A. R. *Cooray, Astron. Astrophys.* **342**, 353 (1999) [astro-ph/9811448].

[*10] M. Chiba, Y. Yoshii, *Astrophys. J.* **510**, 42 (1999) [astro-ph/9808321].

[*11] Y-C. N. Cheng, L. M. Krauss, *Astrophys. J.* **511**, 612 (1999) [astro-ph/9810392].

[*1] 惑星にレーダーを照射し，レーダーが惑星に反射して返ってくるまでの時間は，太陽の重力ポテンシャルによって伸びる．同様に，人工衛星が発する電波信号が地上に届く時刻も遅れる．これらは，アーウィン・シャピロ（I. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 789 (1964)）によって最初に示されたように，一般相対性理論の第 4 のテストとして使える．詳しくは G&C の 8.7 節を見よ．

[*2] S. Refsdal, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **128**, 307 (1964).

$$\int_{t_S}^{t_E} \frac{dt}{a(t)} = \sigma_{SP} + \sigma_{PE} \tag{9.4.1}$$

と書ける．σ_{SP} は光源から P までの固有距離で，σ_{PE} は P から地球までの固有距離を表す（固有距離は $(\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j)^{1/2}$ の積分で与えられる）．一方，重力レンズがない場合に光が地球に到達するであろう時刻 t_{E0} は，

$$\int_{t_S}^{t_{E0}} \frac{dt}{a(t)} = \sigma_{SE} \tag{9.4.2}$$

で与えられ，σ_{SE} は光源から地球までの測地線に沿って測った固有距離を表す．以上より，幾何学的な時間の遅れは以下のように書ける．

$$\Delta t_{\text{幾何学}} \equiv t_E - t_{E0} = a(t_E)\left(\sigma_{SP} + \sigma_{PE} - \sigma_{SE}\right). \tag{9.4.3}$$

ただし，幾何学的な時間の遅れはハッブル時間と比べて常に十分小さいとした．地球を終端とする測地線に沿って測った固有距離は以下のように簡単に求まる．

$$\sigma_{SE} = \int_0^{r_E(S)} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}\,, \qquad \sigma_{PE} = \int_0^{r_E(P)} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}\,, \tag{9.4.4}$$

ここで，$r_E(S)$ と $r_E(P)$ は通常の（地球を中心とするロバートソン–ウォーカー座標系における）動径座標で，それぞれ光源 S，および光線とレンズの最接近点 P の座標を表す．σ_{SP} の計算はもう少し手間がかかる．空間的アフィン接続の式（1.1.17）[訳注 1]を用いれば，空間的測地線の式（1.1.26）[訳注 2]は以下のように書ける．

$$\frac{d^2x^i}{d\sigma^2} + Kx^i = 0\,. \tag{9.4.5}$$

この微分方程式の一般解は，

$$x^i(\sigma) = \begin{cases} A^i\cos\sigma + B^i\sin\sigma\,, & K=+1 \\ A^i + B^i\sigma\,, & K=0 \\ A^i\cosh\sigma + B^i\sinh\sigma\,, & K=-1 \end{cases} \tag{9.4.6}$$

で与えられる．A^i と B^i は異なる経路を表す積分定数で，規格化条件，

訳注 1 $\Gamma^0_{ij} = -\frac{1}{2}\left(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}\right) = a\dot{a}\left(\delta_{ij} + K\frac{x^i x^j}{1-K\boldsymbol{x}^2}\right) = a\dot{a}\tilde{g}_{ij}$.

訳注 2 $0 = \frac{d^2x^i}{du^2} + \Gamma^i_{jl}\frac{dx^j}{du}\frac{dx^l}{du} + \frac{2\dot{a}}{a}\frac{dx^i}{du}\frac{dt}{du}$.

$$1 = \tilde{g}_{ij} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma} = \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\sigma} \right)^2 + K \frac{(\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x}/d\sigma)^2}{1 - K\boldsymbol{x}^2}$$

から導かれる以下の方程式を満たす.

$$(1 - K\boldsymbol{A}^2)(1 - \boldsymbol{B}^2) = K(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^2 \,. \tag{9.4.7}$$

光源から点 P までの測地線に対し，境界条件として $x^i(0) = r_E(S)\hat{n}_{ES}$ および $x^i(\sigma_{SP}) = r_E(P)\hat{n}_{EP}$ を課せば，積分定数 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ を決めることができる．ここで，$\hat{n}_{ES}$ と $\hat{n}_{EP}$ は，それぞれ地球から光源，および地球から点 P の方向を向いた単位ベクトルを表す．すると，規格化条件の式（9.4.7）から以下の結果を得る．

$$\sigma_{SP} = \begin{cases} \cos^{-1}\left[r_E(P)r_E(S)\cos\theta + \sqrt{1 - r_E(P)^2}\sqrt{1 - r_E(S)^2}\right], & K = +1 \\ \sqrt{r_E^2(P) + r_E^2(S) - 2r_E(P)r_E(S)\cos\theta}, & K = 0 \\ \cosh^{-1}\left[-r_E(P)r_E(S)\cos\theta + \sqrt{1 + r_E(P)^2}\sqrt{1 + r_E(S)^2}\right], & K = -1 \,. \end{cases} \tag{9.4.8}$$

ここで，θ は地球から見た光源の方向と，地球から見た点 P の方向とがなす角度を表す．この結果は任意の角度を持つ測地線の 3 角形に適用できるが，我々が興味あるのは θ が非常に小さい場合だけなので，式（9.4.8）は以下のように近似できる．

$$\sigma_{SP} = \begin{cases} \sigma_{ES} - \sigma_{EP} + \dfrac{r_E(P)r_E(S)\theta^2}{2\sin\left(\sigma_{ES} - \sigma_{EP}\right)}, & K = +1 \\ \sigma_{ES} - \sigma_{EP} + \dfrac{r_E(P)r_E(S)\theta^2}{2\left(r_E(S) - r_E(P)\right)}, & K = 0 \\ \sigma_{ES} - \sigma_{EP} + \dfrac{r_E(P)r_E(S)\theta^2}{2\sinh\left(\sigma_{ES} - \sigma_{EP}\right)}, & K = -1 \,. \end{cases}$$

θ^2 に比例する項ではレンズと最接近点 P の違いは無視できるので，$r_E(P) = r_E(L)$, $\theta = \beta - \alpha$, および（式（9.2.14）より）$\sigma_{ES} - \sigma_{EP} = \sigma_{LS}$ として良い．これらの近似から生じる誤差は θ に関してより高次の項となる．したがって，すべての K の場合に以下の結果を得る．

$$\sigma_{SP} = \sigma_{ES} - \sigma_{EP} + \frac{r_E(L)r_E(S)\theta^2}{2r_L(S)} \,. \tag{9.4.9}$$

この結果を式（9.4.3）に代入すれば，幾何学的な時間の遅れが求まる．

$$\Delta t_{\text{幾何学}} = \frac{a(t_E) r_E(L) r_E(S) (\beta - \alpha)^2}{2 r_L(S)} \ . \tag{9.4.10}$$

式（9.1.2）を用いれば，時間の遅れを角径距離とレンズの赤方偏移で書き直すことができる．

$$\Delta t_{\text{幾何学}} = \frac{(1+z_L)\, d_A(EL) d_A(ES) (\beta - \alpha)^2}{2 d_A(LS)} \ . \tag{9.4.11}$$

レンズの詳細は（各像に対し，観測可能な角度 β から観測不可能な角度 α を与える）レンズ方程式を通してのみ入る．

もう一つは「ポテンシャルによる時間の遅れ」で，重力ポテンシャル中の光の運動から直接生じる．この時間の遅れを計算するには，点源や等温球モデルなどを仮定しない，詳しいレンズ銀河のモデルが必要となるが，本書では，一般の球対称レンズの場合のみを扱うことにする．したがって，以下の「標準的」な形の線素，

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{9.4.12}$$

を持つ，レンズを中心とする座標系を考えよう．光がレンズから遠く離れた座標距離 r からやってきて，レンズの最接近点（このときのレンズからの距離を b とする）に到達し，再びレンズから遠く離れた座標距離 r まで到達するとすれば，全行程にかかる時間は以下で与えられる[*3]．

$$2t(r,b) = 2\int_b^r \left(\frac{A(r)/B(r)}{1 - (b/r)^2 \Big(B(r)/B(b) \Big)} \right)^{1/2} dr \ . \tag{9.4.13}$$

いま興味があるのは重力場が弱い場合なので，ポスト・ニュートン近似を使うことができる[*4]．この近似で計量は，

$$A(r) = 1 + 2r\phi'(r) \ , \qquad B(r) = 1 + 2\phi(r) \tag{9.4.14}$$

のように書ける．$\phi(r)$ はニュートンの重力ポテンシャルを表す．すると，ϕ に関して 1 次の精度で以下の結果を得る．

$$2t(r,b) = 2\sqrt{r^2 - b^2} + 2\int_b^r \left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 \right)^{-1/2} \Big(r\phi'(r) - \phi(r) \Big)\, dr$$

[*3] G&C，式（8.7.2）．

[*4] G&C，式（9.1.57）と（9.1.60）．ただし，ポスト・ニュートン近似の線素を式（9.4.12）の形に書くためには，動径座標の再定義が必要となる．

$$+2\int_b^r \left(1-\left(\frac{b}{r}\right)^2\right)^{-3/2}\left(\frac{b}{r}\right)^2\Big(\phi(r)-\phi(b)\Big)\,dr\,. \tag{9.4.15}$$

レンズと光源，およびレンズと地球との間の距離が有限なことから生じる効果は幾何学的時間の遅れですでに考慮されているので，$r\to\infty$ の極限をとろう．式（9.4.15）の 3 項目の積分は $r\to\infty$ の極限で収束するが，2 項目の積分は発散してしまう．一方，質量 M を持ついかなるレンズに対しても，r が大きいところでのニュートンポテンシャルは $-MG/r$ で与えられることから，式（9.4.15）の $r\to\infty$ の極限は，

$$2t(t,b)\longrightarrow 2r+4MG\ln(2r)+f(b) \tag{9.4.16}$$

の形に書ける．ここで，

$$f(b)=-4MG\ln b+2\int_b^\infty \left(1-\left(\frac{b}{r}\right)^2\right)^{-1/2}\left(r\phi'(r)-\phi(r)-\frac{2MG}{r}\right)dr$$
$$+2\int_b^\infty \left(1-\left(\frac{b}{r}\right)^2\right)^{-3/2}\left(\frac{b}{r}\right)^2\Big(\phi(r)-\phi(b)\Big)\,dr \tag{9.4.17}$$

である．式（9.4.16）の最初の 2 項は $r\to\infty$ で発散するが，b には依存しない．したがって，ある光源の時間変動が，異なる重力レンズ像で異なった時刻に観測されるときの時刻の差を計算するには，様々な b の値に対する $f(b)$ の差を計算するだけで良い．これは，式（9.4.12）の計量で定義された時間 t で測ったときの時間の遅れを与える．すなわち，レンズの重力ポテンシャルが無視できるほどレンズから遠く，かつ宇宙論的な効果が無視できるほどレンズに近いところにある時計で測った時間である．宇宙論的赤方偏移のため，地球で観測される時計の遅れは $1+z_L$ 倍されることを考慮すれば，ポテンシャルによる時間の遅れは以下で与えられる．

$$\Delta t_{\text{ポテンシャル}}=(1+z_L)f(b)\,. \tag{9.4.18}$$

たとえば，質点のレンズに対しては $\phi=-MG/r$ であるから，式（9.4.17）の最初の積分はゼロとなり，2 つ目の積分は b に依存しなくなる．したがって質点レンズの重力ポテンシャルは，レンズの位置から角度 β_1，および β_2 だけ離れたところにある光源の重力レンズ像の時間変動の差として以下を与える．

$$\Delta t_{\text{ポテンシャル}}(\beta_1)-\Delta t_{\text{ポテンシャル}}(\beta_2)=4MG(1+z_L)\ln(b_2/b_1)$$

$$= 4MG(1+z_L)\ln(\beta_2/\beta_1).$$

この結果より，ポテンシャルによる時間の遅れは一般に MG 程度の大きさであることがわかる．たとえば式（9.1.5）を見ると，もし $d_A(EL)$，$d_A(ES)$，$d_A(LS)$ のすべてが d 程度の大きさであれば，強い重力レンズで得られる曲がり角の2乗 $(\beta-\alpha)^2$ は一般に MG/d であることがわかるから，式（9.4.11）で与えられる幾何学的時間の遅れもまた MG 程度の大きさとなる．これは，質量が 10^{11} 太陽質量の銀河では5.7日に対応する．時間の遅れが測定できれば，ハッブル定数を知ることなしにレンズの質量を求めることができる．すでに学んだように，光源の像とレンズがなす角度から H_0MG が得られるから，角度の測定と時間の遅れの測定を組み合わせることで H_0 を求めることができる．以下に，このようにして H_0 を求めるのに使われたレンズのいくつかを挙げておく．

• QSO 0957+561：6.1″ 離れた2つの像があり，$z_L=0.36$，$z_S=1.41$ で時間の遅れは 417 ± 3 日（95%の信頼領域）．これから $H_0=64\pm13$ km s^{-1} Mpc^{-1} が得られている[*5]．その後の再解析では 77^{+29}_{-24} km s^{-1} Mpc^{-1} が得られている[*6]．

• B 0218+357：0.335″ 離れた2つの像とアインシュタインリングがあり，$z_S=0.96$，$z_L=0.68$ で時間の遅れは 10.5 ± 0.4 日．これから $H_0=69^{+13}_{-19}$ km s^{-1} Mpc^{-1} が得られている[*7]．

• PKS 1830-211：1.0″ 離れた2つの像とアインシュタインリングがあり，$z_L=0.89$ で（周波数8.6GHzで測定された）時間の遅れは 26^{+4}_{-5} 日[*8]．光源の赤方偏移は $2.507\pm.002$ で，これから $\Omega_M=1$，$\Omega_\Lambda=0$ のときに $H_0=65^{+15}_{-9}$ km s^{-1} Mpc^{-1}，$\Omega_M=0.3$，$\Omega_\Lambda=0.7$ のときに $H_0=76^{+19}_{-10}$ km s^{-1} Mpc^{-1} が得られている[*9]．

• B 1608+656：4つの重力レンズ像があり，それらから求められた3つの時間差から $H_0=75$ km s^{-1} Mpc^{-1} $\pm10\%$ が得られている[*10]．

2003年までに得られた時間の遅れの測定は，コチャネックとシェヒターによる

[*5] T. Kundic *et al.*, *Astrophys. J.* **482**, 75 (1997) [astro-ph/9610162].

[*6] G. Bernstein, P. Fischer, *Astron. J.* **118**, 14 (1999).

[*7] A. D. Biggs *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **304**, 349 (1999) [astro-ph/9811282.

[*8] J. E. J. Lovell *et al.*, *Astrophys. J.* **508**, L51 (1998) [astro-ph/9809301].

[*9] C. Lidman *et al.*, *Astrophys. J.* **514**, L57 (1999) [astro-ph/9902317].

[*10] L. V. E. Koopmans, T. Treu, C. D. Fassnacht, R. D. Blandford, G. Surpi, *Astrophys. J.* **599**, 70 (2003).

レビュー論文にまとめられている*11．2006 年には，10 個の重力レンズの時間の遅れの測定より（$\Omega_M = 0.3$，$\Omega_\Lambda = 0.7$ を仮定して，すべてのレンズが同じハッブル定数を出すように各レンズのパラメータを決めることで）$H_0 = 75^{+7}_{-12}$ km s^{-1} Mpc^{-1} が得られている*12．

9.5　弱い重力レンズ

重力レンズ効果の宇宙論的応用において最も有望なのは，おそらく**弱い重力レンズ効果**を用いたサーベイ観測だろう．これは，わずかに非一様な物質分布中を伝播する光が，弱い重力レンズ効果によって何度も小さく曲げられることで生じる，遠方銀河の像の歪みを用いた方法である．共動座標 $r_S\hat{n}$（$\hat{n}$ は単位ベクトル）に位置する遠方銀河中の点光源から発せられた光線を考えよう．我々と光源の間にあるレンズの性質（銀河，銀河団，あるいは銀河間物質のかたまりなど）に関わらず，光線が受け取る全曲がり角は，位置 $\boldsymbol{x}_L$ にあって質量 M_L を持つ質点のレンズ L が及ぼす曲がり角をすべて足し上げたもので得られると考えて良い（本節では全曲がり角に関して 1 次の項までしか考えないので，レンズを個々の質点として考えて良い．この近似は，たとえこれらの質点が集まって広がった物体を形成している場合でも適用できる）．弱い重力レンズでは，地球から見た光源の方向とレンズ L の方向とがなす角度 α_L は「アインシュタインリング」のパラメータ β_{EL} よりもずっと大きい．すでに学んだように，この場合にできる像は 1 つだけで，それは式（9.1.6）の + 符号に対応する．$\alpha \gg \beta_E$ であるから，レンズによって生じる曲がり角は $\beta_{+L} - \alpha_L = \beta_{EL}^2/\alpha_L$ で与えられる．レンズの位置を表す共動座標ベクトル $\boldsymbol{x}_L$ を光線の進行方向に平行な成分と垂直な成分に分けよう．

$$\boldsymbol{x}_L = r_L\hat{n} + \boldsymbol{y}_L\,, \quad r_L \equiv \hat{n}\cdot\boldsymbol{x}_L\,, \quad \boldsymbol{y}_L \equiv \boldsymbol{x}_L - \hat{n}(\hat{n}\cdot\boldsymbol{x}_L)\,. \tag{9.5.1}$$

レンズ L は光線を $-\hat{y}_L$ の方向に曲げるから，すべてのレンズによって生じる全曲がり角は，

$$\Delta\hat{n} = -\sum_L \hat{y}_L\beta_{EL}^2/\alpha_L = -\sum_L \hat{y}_L\frac{4M_LG\,d_A(LS)}{d_A(ES)d_A(EL)\,\alpha_L} \tag{9.5.2}$$

*11 C. S. Kochanek, P. L. Schecter, *Carnegie Observatories Astrophysics Series*, Vol. 2, ed. W.L. Freedman, Cambridge University Press (2003) [astro-ph/0306040]: 表 1.1.

*12 P. Saha, J. Coles, A. V. Maccio', L. L. R. Williams, *Astrophys. J.*, **660**, L17 (2006) [astro-ph/0607240].

で与えられる．ここで，任意の点 P，Q に対し，$d_A(PQ)$ は点 P から見た点 Q までの角径距離を表す．地球から見たレンズまでの角径距離 $d_A(EL)$ の定義に従えば，光源とレンズの方向とがなす角度は $\alpha_L = a_L|\boldsymbol{y}_L|/d_A(EL)$ と書ける．a_L は光がレンズ L を通過する時刻でのロバートソン–ウォーカースケール因子を表す．また，式（9.1.2）を用いて角径距離を $d_A(LS) = a(t_S)r(r_L, r_S)$，$d_A(ES) = a(t_S)r_S$ のように書くのが便利である．（t_S は光が光源を離れる時刻で，$r(r_L, r_S)$ と r_S はそれぞれレンズと地球を中心とするロバートソン–ウォーカー座標系における光源の動径座標を表す.）式（9.2.15）を用いれば，以下の結果を得る．

$$r(r_L, r_S) = r_S\sqrt{1 - Kr_L^2} - r_L\sqrt{1 - Kr_S^2}\ . \tag{9.5.3}$$

すると曲がり角は，

$$\Delta\hat{n} = -\sum_L \boldsymbol{y}_L \frac{4M_L G\, r(r_L, r_S)}{r_S a_L |\boldsymbol{y}_L|^2} \tag{9.5.4}$$

のように書ける．

この結果は，この形のままでは使えない．というのは，光源中のある点の像が，レンズがないときにどの方向に見えるかを知ることはできないからである．それよりも，光線の始点の位置を変化させたときの曲がり角の変化を考える方が良い．地球から見た，レンズがないときの光線の始点の方向 $\hat{n}$ からの微小な変化 $\boldsymbol{\theta}$ を考えよう．$\boldsymbol{\theta}$ は $\hat{n}$ に垂直なベクトルで，その大きさは $|\boldsymbol{\theta}| \ll 1$ だとする．光線がレンズに最接近したときの光線とレンズ L を結ぶベクトルを $\boldsymbol{y}_L$ とすれば，光源の位置を変化させたときに $\boldsymbol{y}_L$ に生じる変化は，

$$\delta\boldsymbol{y}_L = -\boldsymbol{\theta}(\hat{n}\cdot\boldsymbol{x}_L) - \hat{n}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}_L)$$

で与えられる．$\hat{n}$ に比例する項を落とせば，曲がり角 $\Delta\hat{n}$ の視線方向に垂直な成分の変化量は，摂動 1 次まででで以下のように書ける．

$$\Delta\theta_a = \sum_b M_{ab}(r_S, \hat{n})\,\theta_b\ , \tag{9.5.5}$$

ここで a，b は $\hat{n}$ に垂直な平面上で直交する 2 つの方向を表す添字，$M_{ab}(r_S, \hat{n})$ は距離 r_S にある光源の像がどのように歪むかを表す**歪み行列**と呼ばれる 2×2 の行列を表す．

$$M_{ab}(r_S, \hat{n}) = \sum_L \frac{4M_L G\, r(r_L, r_S)\, r_L}{r_S a_L}\left(\frac{\delta_{ab}}{|\boldsymbol{y}_L|^2} - \frac{2y_{La}y_{Lb}}{|\boldsymbol{y}_L|^4}\right)\ . \tag{9.5.6}$$

この行列は，たいていの場合次のような形に書かれる．

$$M = \begin{pmatrix} \kappa + \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \kappa - \gamma_1 \end{pmatrix}, \tag{9.5.7}$$

ここで κ は**集束場**（convergence），γ_i は**歪み場**（shear）として知られる量を表す．

歪み行列を，レンズ天体から生じるニュートンポテンシャルの摂動を用いて書き換えるのが便利である[*1]．

$$\delta\phi(\boldsymbol{x}, t) = -\sum_L \frac{M_L G}{a_L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_L(t)|} = -\sum_L \frac{M_L G}{a_L\Big((r - r_L(t))^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_L(t))^2\Big)^{1/2}}, \tag{9.5.8}$$

ここで $\boldsymbol{x} = r\hat{n} + \boldsymbol{y}$，$\hat{n}\cdot\boldsymbol{y} = 0$ である．（この表式では，レンズが，たとえば特異速度や宇宙論的進化によって時間に依存する可能性も考慮してある．式（9.5.6）では以下のように記号を定義した．

$$r_L \equiv r_L(t_{r_L}), \qquad \boldsymbol{y}_L \equiv \boldsymbol{y}_L(t_{r_L}).$$

t_r は，現在の時刻に我々に到達した光の波が，まだ動径座標 r にいたときの時刻で，$r = \int_0^{t_r} dt/a(t)$ で与えられる．）光線上のポテンシャルの，光線の進行方向に垂直な方向に関する空間 2 階微分は，

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b}\delta\phi(r\hat{n} + \boldsymbol{y}, t)\right]_{\boldsymbol{y}=0} = \sum_L \frac{M_L G}{a_L}\left(\frac{\delta_{ab}}{\Big((r - r_L(t))^2 + |\boldsymbol{y}_L(t)|^2\Big)^{3/2}} - \frac{3y_{La}(t)y_{Lb}(t)}{\Big((r - r_L(t))^2 + |\boldsymbol{y}_L(t)|^2\Big)^{5/2}}\right)$$

と求められる．関数 $\Big((r - r_L)^2 + |\boldsymbol{y}_L|^2\Big)^{-3/2}$，$\Big((r - r_L)^2 + |\boldsymbol{y}_L|^2\Big)^{-5/2}$ は $r = r_L$ で鋭いピークを持つので，r に関してなめらかな任意関数 $f(r)$（ここでいう「なめらか」とは，r が $|\boldsymbol{y}_L|$ 程度の大きさだけ変化しても $f(r)$ の値がほとんど変化しないという意味）にポテンシャルの 2 階微分をかけたものの積分は次のよう

[*1] 光線から宇宙論的な距離離れたところにあるレンズの効果は無視して良いから，因子 a_L を含む分母はレンズ L までの固有距離とみなして良い．ここでは全質量密度の摂動を質点レンズの和で書いているが，これらの質点は粒子でも銀河でもありうるので，一般性は失っていない．

に近似できる．

$$\int f(r)\,dr\,\left[\frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b}\delta\phi(r\hat{n}+\boldsymbol{y},t)\right]_{\boldsymbol{y}=0,\,t=t_r}$$
$$=\sum_L \frac{f(r_L)M_L G}{a_L}\left(\frac{2\delta_{ab}}{|\boldsymbol{y}_L|^2}-\frac{4y_{La}y_{Lb}}{|\boldsymbol{y}_L|^4}\right)\,.$$

この結果を式（9.5.6）と比較すれば，動径座標 r_S の光源が受ける弱い重力レンズ効果を記述する歪み行列 M_{ab} は次のように書けることがわかる．

$$M_{ab}(r_S,\hat{n})=2\int_0^{r_S}\frac{r(r,r_S)\,r}{r_S}\left[\frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b}\delta\phi(r\hat{n}+\boldsymbol{y},t)\right]_{\boldsymbol{y}=0,\,t=t_r}dr\,. \qquad (9.5.9)$$

したがって，歪み行列を測定することにより，視線方向の物質の重力ポテンシャルに関する情報を得られることがわかる．特に，添字 a，b の縮約をとれば，

$$\kappa=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}M=\int_0^{r_S}\frac{r(r,r_S)\,r}{r_S}\left[\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\delta\phi(r\hat{n}+\boldsymbol{y},t)\right]_{\boldsymbol{y}=0,\,t=t_r}dr$$

を得る．レンズが（銀河団のような）天体の集まりからできており，レンズ天体のすべてがほぼ同じ動径座標 r_L にある場合を考えよう．$\delta\phi$ は $|r-r_L|$ が大きいところで急速に減衰するから，因子 $r(r,r_S)r$ は $r(r_L,r_S)r_L$ に置き換えることができ，かつ $\partial^2\delta\phi/\partial^2 r$ の積分はゼロとみなして良い．ポアソン方程式 $a^{-2}\nabla^2\delta\phi=4\pi G\,\delta\rho_M$ を用いれば，結果を密度ゆらぎ $\delta\rho_M$ を用いて次のように書くことができる．

$$\kappa=\frac{4\pi G d_A(LS)d_A(EL)}{d_A(ES)}\int\delta\rho_M(r\hat{n},t_{r_L})a(t_{r_L})dr. \qquad (9.5.10)$$

ただし，積分はレンズが分布する動径座標 r の範囲に渡ってのみ行う．式（9.5.10）に現れる角径距離がわかっていれば，ある視線方向に観測される光源の重力レンズ像から得られる κ の測定値より，その視線方向上にあるレンズ天体の全質量密度（を視線方向に垂直な平面に射影した値）を求めることができる．

それでは，実際にどうすれば銀河のレンズ像から歪み行列を求められるのか考えてみよう．不規則な形をした銀河を扱うためには，以下のように銀河の形を4重極行列で記述すると良い．

$$Q_{ab}\equiv\frac{\int d^2\theta\ \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})\theta_a\theta_b}{\int d^2\theta\ \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}\,. \qquad (9.5.11)$$

この積分は，視線方向に垂直な平面上で，銀河の像の中心から像の任意の点に向かうベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に渡って行う．a，b などの添字はこの像の平面上で直交する 2 つの方向を表し，$\mathcal{L}$ は像の表面輝度（単位立体角あたりの見かけの光度）を表す．（分子の積分が収束するには，$\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}$ のなんらかの関数で置き換える必要があるかもしれない．たとえば，$\mathcal{L}$ がある輝度のしきい値を超える場合には $\mathcal{L}$ と等しいが，そうでなければゼロになるような関数が考えられる．しかし，このような細いことは以下の議論には影響しない．）9.2 節で述べたように，レンズ効果を受けた光源上の任意の点の表面輝度は，レンズの影響のない場合に観測されるであろう光源上の同一点の表面輝度と等しいので，

$$\mathcal{L}\Big((1+M)\boldsymbol{\theta}\Big) = \mathcal{L}^s\Big(\boldsymbol{\theta}\Big) \tag{9.5.12}$$

が成り立つ（$\mathcal{L}^s$ はレンズがない場合の光源の表面輝度）．式（9.5.11）の積分変数として，$\theta_a = (1+M)_{ab}\theta'_b$ を満たす新しい積分変数 $\boldsymbol{\theta}'$ を導入し，式（9.5.12）を用いれば，

$$\int d^2\theta\ \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})\theta_a\theta_b = (1+M)_{ac}(1+M)_{bd}\,\mathrm{Det}(1+M)\int d^2\theta'\ \mathcal{L}^s(\boldsymbol{\theta}')\theta'_c\theta'_d$$

および，

$$\int d^2\theta\ \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{Det}(1+M)\int d^2\theta'\ \mathcal{L}^s(\boldsymbol{\theta}')$$

と書ける．行列式（$\mathrm{Det}(1+M)$）は分子と分母で相殺するので，

$$Q_{ab} = (1+M)_{ac}(1+M)_{bd}Q^s_{cd} \tag{9.5.13}$$

を得る．ここで Q^s はレンズがない場合の 4 重極行列で，（プライムを落として書けば），

$$Q^s_{ab} \equiv \frac{\displaystyle\int d^2\theta\ \mathcal{L}^s(\boldsymbol{\theta})\theta_a\theta_b}{\displaystyle\int d^2\theta\ \mathcal{L}^s(\boldsymbol{\theta})} \tag{9.5.14}$$

である．見通しを良くするため，これより，重力レンズが十分弱く，M のすべての要素が $|M_{ab}| \ll 1$ を満たす場合のみを扱う．これは，宇宙論にとって最も興味深い場合でもある．すると，式（9.5.13）は以下のように近似できる．

$$Q_{ab} = Q^s_{ab} + M_{ac}Q^s_{cb} + M_{db}Q^s_{ad}\,. \tag{9.5.15}$$

もちろん，レンズがない場合の個々の銀河の 4 重極行列を知ることはできない．しかし，もし，ほぼ同じ方向にほぼ同じ赤方偏移を持ついくつかの銀河のサンプルがあれば，このサンプル中の銀河が受ける重力レンズ効果の歪み行列は同じだから，レンズがないときの異なる銀河の向きの間には相関がないという無難な仮定を置くことで，歪み行列の情報を得ることができる．これを実際に行うには，少なくとも 2 つの方法が考えられる．

標準的な方法[*2]

いわゆる標準的な方法では，**楕円率行列**，

$$X_{ab} \equiv Q_{ab}/\mathrm{Tr}Q\ , \qquad X^s_{ab} \equiv Q^s_{ab}/\mathrm{Tr}Q^s \tag{9.5.16}$$

を用いる．この楕円率行列はトレースが 1 になるように規格化してある．M の 1 次までとれば，式（9.5.15）は以下のように書き直せる．

$$X_{ab} = X^s_{ab} + M_{ac}X^s_{cb} + M_{bd}X^s_{ad} - 2X^s_{ab}\mathrm{Tr}\Big(MX^s\Big)\ . \tag{9.5.17}$$

もし銀河の向きがランダムであれば，十分大きな数の銀河に渡る X^s_{ab} の平均値は δ_{ab} に比例する．この行列はトレースが 1 になるように規格化されているので係数は 1/2 と決まる．

$$\langle X^s_{ab}\rangle = \frac{1}{2}\delta_{ab}\ . \tag{9.5.18}$$

式（9.5.17）の X^s の積を含む項を扱うには，$X^s_{ab}X^s_{cd}$ の平均値が必要となる．銀河の向きがランダムであることと，この積が持つ対称性より，平均値は $\delta_{ab}\delta_{cd}$ と $\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}$ の線形結合で書ける．X^s のトレースは 1 だから，この線形結合は，

$$\langle X^s_{ab}X^s_{cd}\rangle = \frac{1}{4}\left[\delta_{ab}\delta_{cd} + \xi\Big(\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}-\delta_{ab}\delta_{cd}\Big)\right] \tag{9.5.19}$$

でなければならない．式（9.5.19）において a,b と c,d の縮約をとれば，ξ は以下で与えられる．

$$\xi = \Big\langle \mathrm{Tr}\Big(X^{s2}\Big)\Big\rangle - 1/2\ . \tag{9.5.20}$$

（たとえば，もし銀河がすべて球対称であれば，X^s の固有値は 2 つとも 1/2 に等しいので $\xi = 0$ となる．もし銀河がすべて極端にひしゃげた扁長楕円体であれば，X^s の固有値は 1 とゼロなので $\xi = 1/2$ となる．よって，一般的な形に対しては $0 \leqq \xi \leqq 1/2$ である．）式（9.5.17）の平均をとり，式（9.5.18），(9.5.19）を用い

[*2] たとえば M. Bartelmann, P. Schneider, *Phys. Rep.* **340**, 291 (2001) を見よ．

れば以下の結果を得る．

$$\langle X_{ab}\rangle = \frac{1}{2}\delta_{ab} + (1-\xi)\left(M_{ab} - \frac{1}{2}\delta_{ab}\mathrm{Tr}M\right) . \tag{9.5.21}$$

ξ の式（9.5.20）に現れる $\mathrm{Tr}(X^{s2})$ の平均値は観測できない量だが，式（9.5.21）において ξ はすでに 1 次の量である M にかかっているので，1 次の精度までで $\langle X_{ab}\rangle$ を計算するには ξ のゼロ次だけを考えれば良い．その場合には，式（9.5.20）の X^s を観測される楕円率行列 X で置き換えて良い．

$$\xi = \left\langle \mathrm{Tr}\left(X^2\right)\right\rangle - 1/2 . \tag{9.5.22}$$

これは観測される銀河の形から求められる．したがって，式（9.5.21）を用いれば，測定された楕円率行列 X の平均値から歪み行列のトレースを除く成分（$M_{ab} - \frac{1}{2}\delta_{ab}\mathrm{Tr}M$）を求めることができる．

他の文献でよく使われている定式化との関係について少し述べておこう．そこでは，実数の楕円率行列の代わりに複素数の楕円率を定義している．

$$\chi \equiv X_{11} - X_{22} + 2iX_{12} . \tag{9.5.23}$$

そして，式（9.5.21）の代わりに複素数の歪み場 $\gamma \equiv \gamma_1 + i\gamma_2$ を定義し，それを楕円率の関数の平均と関係づけている[*3]．

$$\langle\chi\rangle = 2\gamma - 2\langle\chi\,\mathrm{Re}(\chi^*\gamma)\rangle . \tag{9.5.24}$$

式（9.5.19）を用いれば，右辺の平均量は，

$$\langle\chi\mathrm{Re}(\chi^*\gamma)\rangle = \xi\gamma \tag{9.5.25}$$

のように書け，したがって χ と γ の関係式（9.5.24）は，

$$\left\langle\frac{Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}}{Q_{11} + Q_{22}}\right\rangle = 2(1-\xi)(\gamma_1 + i\gamma_2) \tag{9.5.26}$$

のように書けることを示せる．これは式（9.5.21）と同じ結果となる．

別の方法

パラメータ ξ を測定せずとも済むような方法を考えることもできる．それには，トレースが 1 に規格化されている X_{ab} ではなく，4 重極行列 Q_{ab} の平均値を用いれば良い．光源として使う銀河の向きがランダムであることより，レンズがない

---

*3 P. Schneider, C. Seitz, *Astron. Astrophys.* **294**, 411 (1995)．この式は脚注 2 の文献の式（4.16）で $|\gamma_i| \ll 1$，$|\kappa| \ll 1$ の極限をとったものに相当する．

場合の 4 重極行列の平均値は以下の形をとる．

$$\langle Q^s_{ab}\rangle = \frac{1}{2}\bar{Q}\delta_{ab}\ , \tag{9.5.27}$$

ここで，$\bar{Q}$ は未定の正定数を表す．すると式（9.5.15）より，

$$\langle Q_{ab}\rangle = \bar{Q}\left[\frac{1}{2}\delta_{ab} + M_{ab}\right] \tag{9.5.28}$$

となる．未定の $\bar{Q}$ は，4 重極モーメントのトレースの平均値で割り算することで除くことができる．式（9.5.28）とそのトレースより，M に関して 1 次の精度で以下の結果を得る．

$$\frac{\langle Q_{ab}\rangle}{\langle \mathrm{Tr}Q\rangle} = \frac{1}{2}\delta_{ab} + M_{ab} - \frac{1}{2}\delta_{ab}\mathrm{Tr}M \tag{9.5.29}$$

あるいは，

$$\gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{\langle Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}\rangle}{2\langle Q_{11} + Q_{22}\rangle} \tag{9.5.30}$$

となる．以上の結果を用いれば，ξ などのパラメータを測定せず，4 重極テンソルの測定のみから M_{ab} のトレースを除く成分（つまり歪み場）を求めることができる．

これら 2 つの方法は，単に定式化が異なるだけでなく，異なる種類の平均を扱っていることに注意しよう．2 番目の方法では銀河はそれぞれの像の面積に比例して重みをつけているのに対し，1 番目の標準的な方法ではすべての銀河は面積によらずに等しく重みをつけている．したがって 2 番目の方法では，小さな見かけの面積を持つ銀河がサンプルから漏れてしまうことをそれほど気にする必要がない．

たいていの場合，弱い重力レンズ効果で像が歪められた個々の銀河の赤方偏移を 1 つ 1 つ測定していくのは時間がかかりすぎて現実的ではない．そこで，ある確率分布関数 $\mathcal{N}(r_S)$ によって，これらの銀河が動径座標 r_S にある確率が記述できると仮定しなくてはいけない（確率分布関数は $\int_0^\infty \mathcal{N}(r_S)\,dr_S = 1$ と規格化する）．上記の「別の方法」を用いれば，観測される 4 重極行列の平均から式（9.5.29）を用いて歪み行列のトレースを除いた成分を計算できるが，4 重極行列の平均は視線方向上のすべての銀河に関して計算しなくてはいけないので，歪み行列は次の実効的な歪み行列に置き換わる．

$$M_{ab}(\hat{n}) = \int_0^\infty \mathcal{N}(r_S)\,M_{ab}(r_S,\hat{n})\,dr_S$$

$$= 2\int_0^\infty \mathcal{N}(r_S)\,dr_S \int_0^{r_S} \frac{r(r,r_S)\,r}{r_S}\left[\frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b}\delta\phi(r\hat{n}+\boldsymbol{y},t_r)\right]_{\boldsymbol{y}=0} dr$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b}\delta\phi(r\hat{n}+\boldsymbol{y},t_r)\right]_{\boldsymbol{y}=0} g(r)\,dr\,, \tag{9.5.31}$$

ここで，

$$g(r) \equiv 2\int_r^\infty \frac{r(r,r_S)\,r}{r_S}\mathcal{N}(r_S)\,dr_S \tag{9.5.32}$$

である．

同様に，標準的な方法でも楕円率行列の平均から実効的な歪み行列のトレースを除いた成分を計算できるが，それは銀河の形が進化しない場合に限られる．その場合には式（9.5.21）の歪み行列を式（9.5.31）に置き換え，式（9.5.22）で与えられる ξ の中の楕円率行列の 2 乗の平均を，視線方向上のすべての銀河に渡る平均として計算すれば良い．しかし，もし銀河の形が進化するならば，式（9.5.31）は変更する必要がでてくる．式（9.5.21）において歪み行列に因子 $1-\xi$ を単純にかけるのではなく，まず式（9.5.22）を用いて動径座標 r_S にある銀河の楕円率行列の 2 乗の平均値から関数 $\xi(r_S)$ を求めた後，式（9.5.31）の被積分関数中に因子 $1-\xi(r_S)$ として含めなくてはならない．このような煩雑さは「別の方法」では生じない．

どちらの方法を用いて弱い重力レンズ効果の測定から歪み行列を求めるにせよ，問題点が 1 つ生じる．弱い重力レンズ効果の測定から密度ゆらぎ $\delta\rho$ の情報を得たいわけだが，式（9.5.10）で示したように，密度ゆらぎに直結しているのは集束場 κ であるのに対し，式（9.5.21）と（9.5.29）が示すように，弱い重力レンズ効果の測定から得られるのは歪み場 γ_i であって κ ではない．しかし都合のいいことに，γ_i と κ の間には単純な関係式はないものの，それらの微分の間には単純な関係式がある[*4]．式（9.5.9）より，

$$\frac{\partial}{\partial \hat{n}_c}M_{ab}(r_S,\hat{n}) = 2\int_0^{r_S} \frac{r(r,r_S)}{r_S}\left[\frac{\partial^3}{\partial y_a \partial y_b \partial y_c}\delta\phi(r\hat{n}+\boldsymbol{y},t)\right]_{\boldsymbol{y}=0,\,t=t_r} dr \tag{9.5.33}$$

である．同様に，式（9.5.31）より，

$$\frac{\partial}{\partial \hat{n}_c}M_{ab}(\hat{n}) = \int_0^\infty \left[\frac{\partial^3}{\partial y_a \partial y_b \partial y_c}\delta\phi(r\hat{n}+\boldsymbol{y},t_r)\right]_{\boldsymbol{y}=0} \frac{g(r)}{r}\,dr \tag{9.5.34}$$

[*4] N. Kaiser, *Astrophys. J.* **439**, L1 (1995).

が求まる．どちらの表式も a，b，c に関して完全に対称であるから，歪み行列のトレースを除いた成分の発散はトレースの微分に比例する．

$$\frac{\partial}{\partial \hat{n}_a}\left(M_{ab} - \frac{1}{2}\delta_{ab}\mathrm{Tr}M\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \hat{n}_b}\mathrm{Tr}M \ , \tag{9.5.35}$$

ここで M は $M(r_S, \hat{n})$，$M(\hat{n})$ のどちらでも良い．この式は以下のようにも書ける．

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \hat{n}_1} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial \hat{n}_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \hat{n}_2} \ , \qquad \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{n}_2} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial \hat{n}_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \hat{n}_2} \ . \tag{9.5.36}$$

よって，κ は歪み場 γ_i より（$\hat{n}$ によらない定数の不定性を残して）計算できる．すでに学んだように，このようにして得た κ の値より，視線方向のレンズ天体の質量密度を視線方向に垂直な平面上に射影して求めることができる．1990 年代後期より，多くのグループが中型の口径を持つ望遠鏡を用いて，弱い重力レンズ効果による歪みの検出に成功しはじめた[*5]．これらの測定と上記の理論的な解析を組み合わせることで，様々な銀河団における（バリオンと暗黒物質を含む）全物質の分布が測定されている．この銀河団サンプルには，3.4 節で述べた弾丸銀河団 1E0657−558 も含まれる．

次に，弱い重力レンズ効果を用いて，宇宙論的な質量密度の非一様性の分布を測定することを考えてみよう．弱い重力レンズ効果を用いて宇宙の大規模構造を調べるときには，ある 1 方向の歪み場よりも，天球上に渡る歪み場の分布が重要になる．重力ポテンシャルのゆらぎの符号はランダムなので，天球上に渡る歪み場行列の平均値はゼロとなる．代わりに，2 つの異なる視線方向上で測定された歪み場行列の要素の積の平均を考えるのが便利である．ここでいう「平均」とは，宇宙マイクロ波背景放射のゆらぎの解析で用いたのと同じ意味で用いている．つまり，宇宙の異なる場所にいるさまざまな観測者から見た天球に渡る平均か，あるいは我々が観測するある特定の物質分布を生み出すようなさまざまな時系列に渡る平均である．どちらの平均も観測可能な平均ではないが，観測可能量とこれらの平均との差は多重極展開の高次では無視できるほど小さくなる．これは 2.6 節で学んだ宇宙マイクロ波背景放射の異方性の多重極展開係数の場合と同様である．

[*5] これらの観測結果に関する文献，および一般論の簡潔なレビューは，D. Munshi, P. Valageas, *Roy. Soc. London Trans. Ser. A* **363**, 2675 (2001) [astro-ph/0509216] を見よ．弱い重力レンズ効果の包括的なレビューは，P. Schneider, M. Bartelmann，脚注 2 の文献，もしくは A. Refrigier, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **41**, 645 (2003) や，P. Schneider, in *Gravitational Lensing: Strong, Weak, Micro*, eds. G. Meylan *et al.*, Springer-Verlag (2006): 269 [astro-ph/0509252] を見よ．

異なる視線方向を扱うのだから，集束場と歪み場を定義する式（9.5.7）をより詳しく書き下しておこう．視線方向を表す単位ベクトル $\hat{n}$ を極角と方位角で書けば，

$$\hat{n} = (\sin\vartheta\,\cos\varphi, \sin\vartheta\,\sin\varphi, \cos\,\vartheta) \tag{9.5.37}$$

なので，$\hat{n}$ に垂直な面上の 2 つの直交する単位ベクトル，

$$\hat{\vartheta} = (\cos\vartheta\,\cos\varphi, \cos\vartheta\,\sin\varphi, -\sin\vartheta), \qquad \hat{\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \tag{9.5.38}$$

を定義すれば，以下の表式を得る．

$$\kappa(\hat{n}) + \gamma_1(\hat{n}) = \hat{\vartheta}_i\hat{\vartheta}_j\,M_{ij}(\hat{n})\,, \tag{9.5.39}$$

$$\kappa(\hat{n}) - \gamma_1(\hat{n}) = \hat{\varphi}_i\hat{\varphi}_j\,M_{ij}(\hat{n})\,, \tag{9.5.40}$$

$$\gamma_2(\hat{n}) = \hat{\vartheta}_i\hat{\varphi}_j\,M_{ij}(\hat{n})\,. \tag{9.5.41}$$

ここでは極角と方位角として通常用いられる記号 θ，ϕ の代わりに ϑ，φ を用いたが，これは本節で θ，ϕ を他の用途に使うので，不要な混乱を避けるためにそうした．また，本節では異なる視線方向 $\hat{n}$ を考えるので，2 次元空間の添字 a，b などを 3 次元空間の添字 i，j などに格上げし，それに応じて式（9.5.31）の 2×2 の歪み行列 M_{ab} を 3×3 の行列に拡張した．

$$M_{ij}(\hat{n}) \equiv \int_0^\infty \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\delta\phi(\boldsymbol{x}, t)\right]_{\boldsymbol{x}=r\hat{n},\, t=t_r} g(r)\,dr\,. \tag{9.5.42}$$

等価な表式として，

$$\gamma(\hat{n}) \equiv \gamma_1(\hat{n}) + i\gamma_2(\hat{n}) = e_{+i}(\hat{n})\,e_{+j}(\hat{n})\,M_{ij}(\hat{n}) \tag{9.5.43}$$

も得られる．ここで，7.4 節と同様に $\boldsymbol{e}_+ \equiv (\hat{\vartheta} + i\hat{\varphi})/\sqrt{2}$ である．また，$\hat{\vartheta}$ と $\hat{\varphi}$ は $\hat{n}$ に垂直な平面上にあるので，

$$\kappa(\hat{n}) = \frac{1}{2}\Big(\delta_{ij} - \hat{n}_i\hat{n}_j\Big)M_{ij}(\hat{n}) \tag{9.5.44}$$

と書ける．

集束場の球面調和関数展開は，2.6 節と 7.2 節で学んだ宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎの展開とほぼ同じように扱える．まず，重力ポテンシャルの摂動を以下のように書く．

$$\delta\phi(\boldsymbol{x}, t) = \int d^3q\;\alpha(\boldsymbol{q})\delta\phi_q(t)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\,, \tag{9.5.45}$$

ここで $\alpha(\boldsymbol{q})$ はスカラー型摂動の確率変数で，以下のように規格化する．

$$\langle \alpha(\boldsymbol{q})\alpha^*(\boldsymbol{q}')\rangle = \delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') \,. \tag{9.5.46}$$

すると式（9.5.42），（9.5.44），（9.5.45）より以下の表式が得られる．

$$\kappa(\hat{n}) = -\frac{1}{2}\int d^3q\,\alpha(\boldsymbol{q})\int_0^\infty g(r)\,\delta\phi_q(t_r)\,\left(\boldsymbol{q}^2-(\boldsymbol{q}\cdot\hat{n})^2\right)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}r}dr \,.$$

ここで，$-(\boldsymbol{q}\cdot\hat{n})^2$ は $e^{i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}r}$ にかかっているので $\partial^2/\partial r^2$ に置き換えることができる．その $e^{i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}r}$ はレイリーの公式を使って以下のように展開できる．

$$e^{i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}r} = 4\pi\sum_{\ell m} i^\ell\, j_\ell(qr)\,Y_\ell^m(\hat{n})\,Y_\ell^{m*}(\hat{q}) \,. \tag{9.5.47}$$

すると，集束場を，

$$\kappa(\hat{n}) = \sum_{\ell m} a_{\kappa,\ell m}Y_\ell^m(\hat{n}) \tag{9.5.48}$$

のように部分波で展開でき，展開係数は以下で与えられることがわかる．

$$\begin{aligned} a_{\kappa,\ell m} = -2\pi i^\ell &\int d^3q\, q^2\,\alpha(\boldsymbol{q})\,Y_\ell^{m*}(\hat{q}) \\ &\times\int_0^\infty g(r)\,\delta\phi_q(t_r)\,\Big(j_\ell(qr)+j_\ell''(qr)\Big)\,dr \,. \end{aligned} \tag{9.5.49}$$

この結果を式（9.5.46）と組み合わせれば，集束場とそれ自身，あるいは宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎ，あるいは他のあらゆるスカラー型摂動との相関関数を計算できる．特に，集束場とそれ自身の相関を，

$$\langle a_{\kappa,\ell m}\,a^*_{\kappa,\ell' m'}\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}C_{\kappa\kappa,\ell} \tag{9.5.50}$$

と書けば，多重極展開係数 $C_{\kappa\kappa,\ell}$ が以下のように求まる．

$$C_{\kappa\kappa,\ell} = 4\pi^2\int_0^\infty q^6\,dq\,\left|\int_0^\infty g(r)\,\delta\phi_q(t_r)\,\Big(j_\ell(qr)+j_\ell''(qr)\Big)\,dr\right|^2 \,. \tag{9.5.51}$$

一方，式（9.5.43）と（7.4.6）を比べると，歪み場の成分 $\gamma_1(\hat{n})$，$\gamma_2(\hat{n})$ はストークスパラメータ $Q(\hat{n})$，$U(\hat{n})$ とまったく同じように偏光ベクトル $\boldsymbol{e}_+(\hat{n})$ を含むことがわかるので，7.4 節で学んだのと同じ理由より，複素歪み場 $\gamma_1(\hat{n})+i\gamma_2(\hat{n})$ は式（7.4.16）で定義されるスピン 2 の球面調和関数 $\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n})$ で展開しなくてはいけない．

$$\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) \equiv 2\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\, e_{+\,i}(\hat{n})\, e_{+\,j}(\hat{n})\, \tilde{\nabla}_i\, \tilde{\nabla}_j\, Y_\ell^m(\hat{n})\;, \tag{9.5.52}$$

ここで，$\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ は勾配演算子の角度成分に相当する．

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \equiv \hat{\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\hat{\varphi}}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\;. \tag{9.5.53}$$

式（9.5.42），（9.5.43），（9.5.45），（9.5.47）より複素歪み場を，

$$\gamma_1(\hat{n}) + i\gamma_2(\hat{n}) = \sum_{\ell m} a_{\gamma,\ell m}\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) \tag{9.5.54}$$

と展開でき，その展開係数は以下のように書ける．

$$a_{\gamma,\ell m} = 2\pi i^\ell \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}}\int d^3q\;\alpha(\boldsymbol{q})\,Y_\ell^m(\hat{q})^*\int_0^\infty \delta\phi_q(t_r)\,j_\ell(qr)\,g(r)\,r^{-2}\,dr\;. \tag{9.5.55}$$

$\delta\phi(\boldsymbol{x},t)$ が実数であることから $\alpha^*(\boldsymbol{q})\delta\phi_q^*(t) = \alpha(-\mathbf{q})\delta\phi_q(t)$ であるが，一方で $Y_\ell^{m*}(\hat{q}) = (-1)^\ell Y_\ell^{-m}(-\hat{q})$ なので，結果として $a_{\gamma,\ell m} = a_{\gamma,\ell\,-m}^*$ を得る．すなわち，質量密度の摂動から生じる歪み場は（式（7.4.25）の意味で）「B モード」ではなく「E モード」に相当することがわかる．もし $a_{\gamma,\ell m} = -a_{\gamma,\ell\,-m}^*$ となる B モードの歪み場が観測されれば，たとえば重力波のような，質量密度の摂動以外の何かによって生じた重力レンズ効果の証拠となる．ただし，インフレーション中に生成された重力波によるレンズ効果は小さすぎて観測的に検出することはできない[*6]．

式（9.5.46）とスピン 2 球面調和関数の規格直交性を用いれば，

$$\langle a_{\gamma,\ell m}\, a_{\gamma,\ell' m'}^*\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}C_{\gamma\gamma,\ell} \tag{9.5.56}$$

と書け，歪み場とそれ自身の相関関数の多重極展開係数が以下のように求まる．

$$C_{\gamma\gamma,\ell} = \frac{4\pi^2(\ell+2)!}{(\ell-2)!}\int_0^\infty q^2\,dq\left|\int_0^\infty \delta\phi_q(t_r)\,j_\ell(qr)\,g(r)\,r^{-2}\,dr\right|^2\;. \tag{9.5.57}$$

ポアソン方程式 $\nabla^2\delta\phi = 4\pi Ga^2\delta\rho_M$ を用いれば，式（9.5.51）と（9.5.57）に現れる量 $\delta\phi_q(t)$ を，8.1 節で導入した密度ゆらぎのパワースペクトル $P(q/a_0)$ と関係づけることができる．

---

*6 S. Dodelson, E. Rozo, A. Stebbins, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 021301 (2003).

$$q^4|\delta\phi_q(t)|^2 = (4\pi G)^2 a^4(t)\bar{\rho}_M^2(t)|\delta_{Mq}(t)|^2$$
$$= (4\pi G)^2 a^4(t)\bar{\rho}^2(t)P(q/a_0)\left(\frac{F(t)}{F(t_0)}\right)^2$$
$$= \frac{9\Omega_M^2 H_0^4 a_0^3}{4a^2(t)(2\pi)^3}P(q/a_0)\left(\frac{F(t)}{F(t_0)}\right)^2 , \tag{9.5.58}$$

関数 $F(t)$ は式（8.1.20）で与えられ，$a_0 \equiv a(t_0)$ を表す．

最も興味のある $\ell \gg 1$ の極限では，多重極展開係数の式はずっと簡単になる．まず，$\kappa\kappa$ の相関関数から考えよう．球ベッセル関数 $j_\ell(qr)$ の $\ell \gg 1$ での振る舞いに着目する．もし qr と $\ell + 1/2$ との差が $\ell^{-1/3}$ 程度以上の大きさになれば，$j_\ell(qr)$ は $qr < \ell + 1/2$ では指数関数的に小さくなり，$qr > \ell + 1/2$ では激しく振動する．一方，（マイクロ波背景放射異方性の源泉関数とは異なり）被積分関数中のその他の量は r に関してゆっくりとしか変化しないから，$\ell \gg 1$ では $g(r)$ と t_r の r を ℓ/q に置き換えて近似できる．

$$C_{\kappa\kappa,\ell} \longrightarrow 4\pi^2 \int_0^\infty dq\, q^6|\delta\phi_q(t_{\ell/q})|^2\, g^2(\ell/q)\, \left|\int_0^\infty \Big(j_\ell(qr) + j_\ell''(qr)\Big)\, dr\right|^2 , \tag{9.5.59}$$

ここで，$j_\ell(qr)$ の積分は以下で与えられる[*7]．

$$\int_0^\infty j_\ell(qr)\, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2q}\frac{\Gamma\left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\ell+2}{2}\right)} \longrightarrow \frac{1}{q}\sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} . \tag{9.5.60}$$

一方，ℓ が大きいところでは $r \ll \ell/q$ と $r \gg \ell/q$ からの寄与は非常に小さくなるので，$j_\ell''(qr)$ の r 積分は無視して良い．よって，$\ell \gg 1$ の極限では式（9.5.58）は以下のように近似できる．

$$C_{\kappa\kappa,\ell} \longrightarrow \frac{2\pi^3}{\ell}\int_0^\infty dq\, q^4|\delta\phi_q(t_{\ell/q})|^2\, g^2(\ell/q)$$
$$= 2\pi^3\ell^4\int_0^\infty dr\, r^{-6}\, |\delta\phi_{\ell/r}(t_r)|^2\, g^2(r)$$
$$= \frac{9\Omega_M^2 H_0^4 a_0^3}{16}\int_0^\infty dr\, \frac{g^2(r)}{a^2(t_r)r^2}P(\ell/a_0 r)\left(\frac{F(t_r)}{F(t_0)}\right)^2 . \tag{9.5.61}$$

---

*7 これは，I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, ed. A. Jeffrey, Academic Press (1980) の公式 6.561.14 の特殊な場合に相当する．

ℓ が大きな極限での $\gamma\gamma$ の相関関数の多重極展開係数は，これとまったく同じ形となる．この極限では式（9.5.57）の因子 $(\ell+2)!/(\ell-2)!$ は ℓ^4 となり，式（9.5.57）の r に渡る積分中の因子 r^{-2} は $(q/\ell)^2$ に置き換えられるから，ℓ が大きい極限では式（9.5.57）の q 積分の被積分関数と式（9.5.51）の q 積分の被積分関数（ただし $j_\ell''(qr)$ は無視する）との比は，

$$\frac{\ell^4 q^2 (q/\ell)^4}{q^6} = 1$$

となる．ゆえに，大きい ℓ では以下の結果を得る．

$$C_{\gamma\gamma,\ell} \longrightarrow C_{\kappa\kappa,\ell} \longrightarrow \frac{9\Omega_M^2 H_0^4 a_0^3}{16}\int_0^\infty dr\ \frac{g^2(r)}{a^2(t_r)r^2}P(\ell/a_0 r)\left(\frac{F(t_r)}{F(t_0)}\right)^2 . \quad (9.5.62)$$

よって，大きな ℓ での歪み場の多重極展開係数の測定から得られる情報は，同じ ℓ で集束場の多重極展開係数の測定から得られる情報と等しい．

式（9.5.32）で定義される重み関数 $g(r)$ が与えられれば，$C_{\gamma\gamma,\ell}$（あるいは $C_{\kappa\kappa,\ell}$）の ℓ 依存性を測定することでパワースペクトル $P(k)$ の k 依存性を求めることができる．ところで，もし積分の主な寄与が，真空のエネルギーがまだ重要でない時刻 t_r に対応する動径座標 r からくる場合には，式（8.1.20）より $F(t) \propto a(t)$ であるから，式（9.5.62）は以下のように単純化できる．

$$C_{\gamma\gamma,\ell} \longrightarrow C_{\kappa\kappa,\ell} \longrightarrow \frac{9\Omega_M^2 H_0^4 a_0}{16}\int_0^\infty dr\ \frac{g^2(r)}{r^2}P(\ell/a_0 r) . \quad (9.5.63)$$

これが，文献でよく見られる公式である*8．

宇宙マイクロ波背景放射の偏光と温度ゆらぎの相関関数のためにすでに導いた結果を用いれば，歪み行列の要素とそれ自身，および宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎとの相関関数を計算することができる．式（9.5.54）を式（7.4.15），（7.4.25）と比べ，式（9.5.56）を式（7.4.28）と比べれば，式（7.4.76）–（7.4.78）の Q と U を γ_1 と γ_2 に置き換え，$C_{EE,\ell}$ を $C_{\gamma\gamma,\ell}$ に置き換え，（歪み場には E モードしかないので）$C_{BB,\ell}$ を無視するだけで歪み場の相関関数が求められることがわかる．

$$\langle\gamma_1(\hat{n})\,\gamma_1(\hat{n}')\rangle = \frac{1}{2}\sum_\ell C_{\gamma\gamma,\ell}\,\mathrm{Re}\Big(F_\ell(\hat{n},\hat{n}') + G_\ell(\hat{n},\hat{n}')\Big) , \quad (9.5.64)$$

---

*8 D. J. Bacon, A. R. Refrigier, R. S. Ellis, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **318**, 625 (2000). 歪み行列の要素の相関関数は，N. Kaiser, *Astrophys. J.* **498**, 26 (1998) によって研究されている．

$$\langle\gamma_2(\hat{n})\,\gamma_2(\hat{n}')\rangle = \frac{1}{2}\sum_\ell C_{\gamma\gamma,\ell}\,\mathrm{Re}\Big(F_\ell(\hat{n},\hat{n}') - G_\ell(\hat{n},\hat{n}')\Big)\,, \tag{9.5.65}$$

$$\langle\gamma_1(\hat{n})\,\gamma_2(\hat{n}')\rangle = \frac{1}{2}\sum_\ell C_{\gamma\gamma,\ell}\,\mathrm{Im}\Big(-F_\ell(\hat{n},\hat{n}') + G_\ell(\hat{n},\hat{n}')\Big), \tag{9.5.66}$$

ここで F_ℓ と G_ℓ はそれぞれ式（7.4.88）と（7.4.89）で与えられる次の関数である．

$$F_\ell(\hat{n},\hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi}D^{(\ell)}_{-2,-2}\Big(S^{-1}(\hat{n})S(\hat{n}')\Big)\,, \tag{9.5.67}$$

$$G_\ell(\hat{n},\hat{n}') = (-1)^\ell\frac{2\ell+1}{4\pi}D^{(\ell)}_{-2,-2}\Big(S^{-1}(\hat{n})S(-\hat{n}')\Big)\,, \tag{9.5.68}$$

$D^{(\ell)}$ は角運動量 ℓ に対応する回転群のユニタリ既約表現を表す．$S(\hat{n})$ は式（7.4.12）で与えられる標準的な回転で，$\vartheta=\varphi=0$ を持つ 3 元方向を任意の方向 $\hat{n}$ に移す．また，宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎを式（2.6.1）[訳注 1]のように書き，

$$\Delta T(\hat{n}) = \sum_{\ell m} a_{T,\ell m}Y_\ell^m(\hat{n})\,,$$

回転不変性を用いて以下の量を定義すれば，

$$\langle a_{T,\ell m}\,a^*_{\gamma,\ell' m'}\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}C_{T\gamma,\ell}, \tag{9.5.69}$$

歪み場と温度ゆらぎの相関関数を，再び式（7.4.81），（7.4.82）で Q，U を γ_1，γ_2 に，$C_{TE,\ell}$ を $-C_{T\gamma,\ell}$ に置き換えることで得られる．

$$\langle\Delta T(\hat{n})\,\gamma_1(\hat{n}')\rangle = \sum_\ell C_{T\gamma,\ell}\,\mathrm{Re}H_\ell(\hat{n},\hat{n}')\,, \tag{9.5.70}$$

$$\langle\Delta T(\hat{n})\,\gamma_2(\hat{n}')\rangle = -\sum_\ell C_{T\gamma,\ell}\,\mathrm{Im}H_\ell(\hat{n},\hat{n}')\,, \tag{9.5.71}$$

ここで H_ℓ は式（7.4.89）で与えられる関数である．

$$H_\ell(\hat{n},\hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi}D^{(\ell)}_{0,-2}\Big(S^{-1}(\hat{n})S(\hat{n}')\Big)\,. \tag{9.5.72}$$

最後に，集束場の相関関数は，温度ゆらぎの相関関数の式（2.6.4）[訳注 2]と同様の形で与えられることを述べておく．

$$\langle\kappa(\hat{n})\kappa(\hat{n}')\rangle = \sum_\ell\frac{2\ell+1}{4\pi}C_{\kappa\kappa,\ell}P_\ell(\hat{n}\cdot\hat{n}')\,. \tag{9.5.73}$$

訳注 1　$\Delta T(\hat{n}) \equiv T(\hat{n}) - T_0 = \sum_{\ell m} a_{\ell m}Y_\ell^m(\hat{n}),\ T_0 \equiv \frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{n}\ T(\hat{n})$.

訳注 2　$\langle\Delta T(\hat{n})\Delta T(\hat{n}')\rangle = \sum_{\ell m} C_\ell Y_\ell^m(\hat{n})Y_\ell^{-m}(\hat{n}') = \sum_\ell C_\ell\left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right)P_\ell(\hat{n}\cdot\hat{n}')$.

$C_{\gamma\gamma,\ell}$ の測定，あるいは（式（9.5.36），(9.5.62）を用いた）$C_{\kappa\kappa,\ell}$ の測定からは，パワースペクトル $P(k)$ の情報が得られるだけでなく，$g(r)$ の式（9.5.32）に含まれる宇宙論パラメータへの制限も得ることができる．これまでのところ，カナダ–フランス–ハワイ望遠鏡を用いた広域シノプティック・レガシーサーベイ（Wide Synoptic Legacy Survey）による歪み場の測定*9より，8.1 節で学んだパラメータ σ_8 の値が（$\Omega_M = 0.3$ の仮定のもとで）$\sigma_8 = 0.85 \pm 0.06$ と得られている．このパラメータは宇宙の大規模構造を用いても測定できるが，弱い重力レンズ効果では，光る物質の分布と暗黒物質の分布の関係を仮定しなくても良いという利点がある．このグループは，歪み場のデータより，比 $w \equiv \bar{p}/\bar{\rho}$ は 68% の信頼領域で -0.8 以下だと結論している（ただし w は一定と仮定している）．他のグループ*10は，CTIO の重力レンズサーベイによる歪み場の測定を宇宙マイクロ波背景放射のデータ，および Ia 型超新星の赤方偏移と光度のデータと合わせることで $\sigma_8 = 0.81^{+0.15}_{-0.21}$ と $w = -0.89^{+0.16}_{-0.21}$ を得ている（誤差は 95% の信頼領域を表し，w は一定だと仮定している）．

弱い重力レンズのサーベイを用いた宇宙論の研究は，まだ始まったばかりである．

9.6 宇宙ひも

初期宇宙で対称性が自発的に破れると，宇宙ひもとして知られる，1 次元的な場の不連続線が生み出される可能性がある*1．宇宙ひもは，現代のひも理論でもよく現れる*2．宇宙ひもが太陽系を突き抜けるような不幸な事態でもない限り，宇宙ひもを発見する唯一の方法は重力レンズ効果を用いたものだと考えられている*3．

宇宙ひもから十分に離れた距離 r では，重力場はニュートン理論で記述できる．宇宙ひもが長い直線の場合，円筒対称性を持つラプラス方程式の解から重力ポテ

*9 H. Hoekstra *et al.*, *Astrophys. J.* **647**, 116 (2006) [astro-ph/0511089].

*10 M. Jarvis, B. Jain, G. Bernstein, D. Dolney, *Astrophys. J.* **644**, 71 (2006) [astro-ph/0502243].

*1 T. W. B. Kibble, *J. Phys. A* **9**, 1387 (1976); A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University press (1994).

*2 E. Witten, *Phys. Lett. B* **153**, 243 (1985); E. J. Copeland, R. C. Myers, J. Polchinski, *J. High Energy Phys.* **0406**, 013 (2005) [hep-th/0312067].

*3 宇宙ひもによる重力レンズ効果の相対論的な計算は，J. R. Gott, *Astrophys. J.* **288**, 422 (1985) による．宇宙ひもによって生じる宇宙マイクロ波背景放射の異方性は，A. Stebbins, *Nature* **310**, 391 (1984) によって計算された．

ンシャルの形が,

$$\phi = 2G\sigma \ln r + C \tag{9.6.1}$$

のように決まる．ここで σ と C は積分定数である．もし宇宙ひもが非相対論的であれば，σ はひもの単位長さあたりの質量となる．ひもからの距離が十分大きければポスト・ニュートン近似が使えるので，光線の方向 $\hat{u}$ は以下の微分方程式に従う[*4].

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = 2\hat{u} \times (\hat{u} \times \nabla\phi) \, . \tag{9.6.2}$$

光線の曲がり角が小さければ，曲がり角は以下のように計算できる．

$$\delta\hat{u} = 2\hat{u}_0 \times \left(\hat{u}_0 \times \int dt \nabla\phi\right) , \tag{9.6.3}$$

ここで $\hat{u}_0$ は光線が曲げられる前に持っていた初期の方向を表す．この積分より，光線は宇宙ひもの方へ曲げられ，曲がる方向は宇宙ひもと光線の両方に垂直であることがわかる．曲がり角は

$$|\delta\hat{u}| = \frac{4\pi\sigma G}{\sin\theta} \, , \tag{9.6.4}$$

で与えられる．θ は宇宙ひもと光線がなす角度を表す[*5]．光線は宇宙ひもの方向に曲げられるので，ひもを挟んで互いに反対側を通過する光線は，互いに引きつけあうように曲がる．よって，宇宙ひもの背後にある光源の像は 2 つに分かれることになる．ひもからの距離が十分大きく，非相対論的な公式（9.6.1），(9.6.2) が使える場合には，光線が曲がる方向も曲がる大きさも，光線とひもの間の距離によらないことに注目しよう．

2003 年，あたかも宇宙ひもによる重力レンズ現象であるかのように見える天体が発見されたことで，宇宙ひもへの関心が高まった．約 1.8 秒角離れた 1 対の楕円銀河の像は，実質上同じ赤方偏移 $z = 0.46$ を持ち，同じスペクトルを示していた．これらの像は，単一の銀河がそこそこ球対称な天体によって重力レンズの影響を受けたもののようには見えなかったが，宇宙ひもによるレンズだとすれば説

[*4] 9.3 節の脚注 1 を見よ．

[*5] この結果は，宇宙ひもが非相対論的な場合にのみ成り立つ．真空期待値の特異点のような相対論的な宇宙ひもを扱う場合にはポスト・ニュートン近似は使えない．そのような場合の曲がり角は，A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **23**, 852 (1981) によって導出されている．相対論的な宇宙ひもの曲がり角は，式 (9.6.4) の分母の $\sin\theta$ を分子に移したもので与えられる．

明できたのである[*6]．その後，この宇宙ひも候補の近傍で，重力レンズ効果を受けた天体の数の超過が見られるという報告があり[*7]，この像は単一の銀河が宇宙ひもによってレンズ効果を受けものだという見方をさらに支持することとなった．しかし 2006 年，この解釈は棄却されなければならなくなった．ハッブル宇宙望遠鏡の観測により，これは 1 対の楕円銀河が互いに相互作用しているのであって，重力レンズではないことが明らかになったからである[*8]．このエピソードは，重力レンズ効果を通じた宇宙ひもの検出の難しさを物語っているといえる．

[*6] M. V. Sazhin *et al., Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **343**, 353 (2003) [astro-ph/0302547].

[*7] M. V. Sazhin *et al.*, astro-ph/0406516.

[*8] M. V. Sazhin *et al., Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **376**, 1731 (2007) [astro-ph/0611744].

第10章 宇宙論的ゆらぎの起源としてのインフレーション

4 章で学んだインフレーション宇宙理論の最も面白いところは，インフレーション理論が，宇宙マイクロ波背景放射や宇宙の大規模構造で観測される宇宙論的ゆらぎの起源として，量子力学を用いた自然な説明を与えるところにある[*1]．将来的には，インフレーションで生成された重力波も観測される可能性がある[*2]．6 章では，断熱的なスカラーゆらぎとテンソルゆらぎの大きさと波長依存性は，それぞれ $\mathcal{R}_q^o$ と $\mathcal{D}_q^o$ を通してのみ初期条件に依存することを学んだ．式 (5.4.22) で与えられるように $\mathcal{R}_q^o$ はゲージ不変量 $\mathcal{R}_q(t) \equiv A_q(t)/2 + H(t)\delta u_q(t)$ の地平線の外側（$q/a(t) \ll H(t)$）での値で，断熱ゆらぎでは時間によらず一定となる．同様に，$\mathcal{D}_q^o$ は重力波の振幅 $\mathcal{D}_q(t)$ の $q/a(t) \ll H(t)$ での値で，やはり時間によらず一定である．物質優勢期や放射優勢期では $a(t)$ はそれぞれ $t^{2/3}$，$t^{1/2}$ に比例して増加するが，$H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ は $1/t$ に比例して減少する．したがって，あらゆる波長は，物質優勢期や放射優勢期で十分過去に遡ればいつかは地平線の外側に出ることになる．しかし，放射優勢期の前に起こったと思われるインフレーションの時期では，$H(t)$ は（非常に大雑把にいって）ほぼ一定なのに対し，$a(t)$ はほぼ指数関数的に増加するので，インフレーション期の終わりに地平線の外側にあった摂動でさえ，インフレーション早期には地平線の十分内側にあることになる．このようなとても早期においては，場は宇宙膨張よりもずっと速く振動す

[*1] S. V. Mukhanov, G. V. Chibisov, *Sov. Phys. JETP Lett.* **33**, 532 (1981); S. Hawking, *Phys. Lett.* **115B**, 295 (1982); A. A. Starobinsky, *Phys. Lett.* **117B**, 175 (1982); A. Guth, S.-Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1110 (1982); J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **28**, 679 (1983); W. Fischler, B. Ratra, L. Susskind, *Nucl. Phys. B* **259**, 730 (1985).

[*2] 宇宙論的な重力波の生成は，L. P. Grishchuk, *Sov. Phys. JETP* **40**, 409 (1974) と A. A. Starobinsky, *Sov. Phys. JETP Lett.* **30**, 682 (1979) によって考察され，V. A. Rubakov, M. V. Sazhin, A. V. Veryaskin, Phys. Lett. **115B**, 189 (1982) によってインフレーション理論の枠組みで計算された．

るので，場の量子ゆらぎは通常のミンコフスキー時空のものと基本的に同じであると考えられる．本章では，このような宇宙の非常に早い時期に生成された断熱的なスカラーゆらぎとテンソルゆらぎの発展を，さまざまな波長を持つゆらぎが地平線の外へ出て，$\mathcal{R}_q(t)$ と $\mathcal{D}_q(t)$ の値が一定値 $\mathcal{R}_q^o$，$\mathcal{D}_q^o$ となる時期までを追う．これらの値こそが，宇宙マイクロ波背景放射や物質の大規模構造，さらには将来の宇宙論的重力波の直接検出によって測定されるものである．

10.1 インフレーション中のスカラー場のゆらぎ

まず手始めに，最も単純なインフレーションのモデルとして，単一の実スカラー場 $\varphi(x)$（「インフラトン」場と呼ぼう）を考え，それが式（B.63）で与えられる作用，

$$I_\varphi = \int d^4x\,\sqrt{-\mathrm{Det}g}\,\left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} - V(\varphi)\right] \tag{10.1.1}$$

で記述されるとする．ポテンシャル $V(\varphi)$ は実数で関数形は任意である．このモデルは唯一可能なものではないが，どの程度もっともらしいものかは本節の最後で議論することにしよう．

宇宙を平均的に見ると一様かつ等方であるから，スカラー場を時間のみに依存する平均値 $\bar{\varphi}(t)$ と小さな摂動 $\delta\varphi(\boldsymbol{x},t)$ の和で書くことにする．

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = \bar{\varphi}(t) + \delta\varphi(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{10.1.2}$$

同様に計量も，（5〜7 章でもそうしたように）摂動を含まないロバートソン–ウォーカー計量 $\bar{g}_{\mu\nu}(t)$（ただし $K=0$ とする）と小さな摂動 $h_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)$ の和で書く．

$$g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + h_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{10.1.3}$$

付録 B で示すように，スカラー場のエネルギー–運動量テンソルは完全流体の形をとり，エネルギー密度，圧力，4 元速度ベクトルは式（B.66）–（B.68）から以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}
\rho &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} + V(\varphi),\\
p &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} - V(\varphi),\\
u^\mu &= -\left[-g^{\rho\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma}\right]^{-1/2} g^{\mu\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\tau}\,.
\end{aligned}$$

これより，摂動を含まないスカラー場のエネルギー密度と圧力は，

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}\dot{\bar{\varphi}}^2 + V(\bar{\varphi})\,, \qquad \bar{p} = \frac{1}{2}\dot{\bar{\varphi}}^2 - V(\bar{\varphi}) \tag{10.1.4}$$

となり，摂動を含まない 4 元速度ベクトルの成分は以下で与えられる．

$$\bar{u}^i = 0\,, \qquad \bar{u}^0 = 1\,. \tag{10.1.5}$$

（空間曲率がゼロの）フリードマン方程式は，

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\bar{\varphi}}^2 + V(\bar{\varphi})\right)\,. \tag{10.1.6}$$

である．エネルギー保存則の式 $\dot{\bar{\rho}} = -3H(\bar{\rho}+\bar{p})$ からは，摂動を含まないスカラー場の場の方程式，

$$\ddot{\bar{\varphi}} + 3H\dot{\bar{\varphi}} + V'(\bar{\varphi}) = 0 \tag{10.1.7}$$

が得られる．ここで，いつものように $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ である．

式（5.3.18）のニュートンゲージを用いて計量の摂動 $\delta g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}$ を書くことにしよう．

$$h_{00} = -2\Psi\,, \qquad h_{0i} = 0\,, \qquad h_{ij} = -2a^2\delta_{ij}\Psi\,. \tag{10.1.8}$$

（スカラー型摂動の非等方ストレス π^S，およびその他の非等方ストレス π^V，π^T はスカラー場の理論ではゼロになるので，式（5.3.20）より Ψ でない方のスカラー型重力場摂動 Φ は Ψ と等しい．）圧力，エネルギー密度，4 元速度ベクトルの摂動は，式（B.66）–（B.68）を摂動展開して摂動 1 次の項を拾えば以下のように得られる．

$$\delta\rho = \dot{\bar{\varphi}}\delta\dot{\varphi} + V'(\bar{\varphi})\delta\varphi - \Psi\dot{\bar{\varphi}}^2\,, \tag{10.1.9}$$

$$\delta p = \dot{\bar{\varphi}}\delta\dot{\varphi} - V'(\bar{\varphi})\delta\varphi - \Psi\dot{\bar{\varphi}}^2\,, \tag{10.1.10}$$

$$\delta u_i = \frac{\partial \delta u}{\partial x^i} \quad ここで \quad \delta u = -\frac{\delta\varphi}{\dot{\bar{\varphi}}}\,. \tag{10.1.11}$$

場の方程式にはアインシュタイン方程式（5.3.21）とエネルギー保存の式（5.3.24）を用いればよく，それぞれ，

$$\dot{\Psi} + H\Psi = 4\pi G\,\dot{\bar{\varphi}}\,\delta\varphi\,, \tag{10.1.12}$$

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} + \frac{\partial^2 V(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^2}\delta\varphi - \left(\frac{\nabla^2}{a^2}\right)\delta\varphi = -2\Psi\frac{\partial V(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}} + 4\dot{\Psi}\dot{\bar{\varphi}}, \tag{10.1.13}$$

と書ける．一方，束縛条件の式（5.3.26）は以下のように書ける．

$$\left(\dot{H} - \frac{\nabla^2}{a^2}\right)\Psi = 4\pi G\Big(-\dot{\bar{\varphi}}\delta\dot{\varphi} + \ddot{\bar{\varphi}}\delta\varphi\Big)\,. \tag{10.1.14}$$

（式（10.1.14）を導く際，式（10.1.6）と（10.1.7）から得られる便利な関係式 $\dot{H} = -4\pi G\dot{\bar{\varphi}}^2$ を用いた.）場の方程式（5.3.20）は $\Phi = \Psi$ とすることですでに考慮されている．その他の場の方程式（5.3.19），(5.3.22）と運動量保存の式（5.3.23）は，式（10.1.12）–(10.1.14）に含まれている情報を単に繰り返すだけである．

まずは式（10.1.12）–(10.1.14）の平面波解を求めよう．$\delta\varphi$，Ψ をそれぞれ $\exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})\delta\varphi_q(t)$，$\exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})\Psi_q(t)$ と書く．これらの解を用いて実空間の摂動 $\delta\varphi(\boldsymbol{x},t)$，$\Psi(\boldsymbol{x},t)$ を求める作業は後ほど行う．平面波解の時間発展は式（10.1.12），(10.1.13）で $-\nabla^2$ を $q^2 \equiv \boldsymbol{q}^2$ に置き換えたもので得られる．

$$\dot{\Psi}_q + H\Psi_q = 4\pi G\,\dot{\bar{\varphi}}\,\delta\varphi_q\,, \tag{10.1.15}$$

$$\delta\ddot{\varphi}_q + 3H\delta\dot{\varphi}_q + \frac{\partial^2 V(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^2}\delta\varphi_q + \left(\frac{q^2}{a^2}\right)\delta\varphi_q = -2\,\Psi_q\,\frac{\partial V(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}} + 4\,\dot{\Psi}_q\,\dot{\bar{\varphi}}\,, \tag{10.1.16}$$

一方で束縛条件の式（10.1.14）は以下のようになる．

$$\left(\dot{H} + \frac{q^2}{a^2}\right)\Psi_q = 4\pi G\Big(-\dot{\bar{\varphi}}\,\delta\dot{\varphi}_q + \ddot{\bar{\varphi}}\,\delta\varphi_q\Big)\,. \tag{10.1.17}$$

十分に早期では q/a は H や $\partial^2 V(\bar{\varphi})/\partial\bar{\varphi}^2$ よりもずっと大きくなるので，WKB 近似を使うことができる．WKB 解の時間微分は因子 q/a を与え，以下の形で書ける．

$$\delta\varphi_q(t) \longrightarrow f(t)\,\exp\left(-iq\int_{t_*}^{t}\frac{dt'}{a(t')}\right),$$
$$\Psi_q(t) \longrightarrow g(t)\,\exp\left(-iq\int_{t_*}^{t}\frac{dt'}{a(t')}\right), \tag{10.1.18}$$

ここで $f(t)$ と $g(t)$ は指数関数の引数よりもずっとゆっくり変化する関数で，t_* は任意定数である．指数関数は，式（10.1.16）で q/a に関して 2 次の項が相殺するように選んである．式（10.1.15）と（10.1.17）を q/a の最低次で同時で満たすには，比 g/f を次のようにとれば良い．

$$g/f = 4i\pi G\dot{\bar{\varphi}}a/q\,. \tag{10.1.19}$$

すると，式（10.1.16）で q/a に関して 1 次の項からは $2\dot{f}+2Hf=0$ が得られるから，$f\propto 1/a$ を得る．後に明らかとなる理由から，f と g に共通する比例係数は $f=1/(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q}\,a$ となるように選ぶ．この規格化条件と式（10.1.15）–（10.1.17）を満たす解 $\delta\varphi_q(t)$，$\Psi_q(t)$ は，$a(t)\to 0$ の極限で以下の初期条件を持つ．

$$\delta\varphi_q(t)\longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}a(t)\sqrt{2q}}\exp\left(-iq\int_{t_*}^{t}\frac{dt'}{a(t')}\right)\,, \tag{10.1.20}$$

$$\Psi_q(t)\longrightarrow \frac{4i\pi G\dot{\bar{\varphi}}(t)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q^3}}\exp\left(-iq\int_{t_*}^{t}\frac{dt'}{a(t')}\right)\,. \tag{10.1.21}$$

複素共役 $\delta\varphi_q^*(t)$，$\Psi_q^*(t)$ はもう 1 つの独立解である．式（10.1.15）–（10.1.17）は 2 階の微分方程式系なので，これら以外の解はない．

一般に，式（10.1.12）–（10.1.14）を満たす場 $\delta\varphi(\boldsymbol{x},t)$，$\Psi(\boldsymbol{x},t)$ はこれら 2 つの解の重ね合わせで書ける．場は実数なので，解は以下の形をとる．

$$\delta\varphi(\boldsymbol{x},t)=\int d^3q\left[\delta\varphi_q(t)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha(\boldsymbol{q})+\delta\varphi_q^*(t)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha^*(\boldsymbol{q})\right], \tag{10.1.22}$$

$$\Psi(\boldsymbol{x},t)=\int d^3q\left[\Psi_q(t)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha(\boldsymbol{q})+\Psi_q^*(t)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha^*(\boldsymbol{q})\right]\,. \tag{10.1.23}$$

ここで，係数 $\alpha(\boldsymbol{q})$，$\alpha^*(\boldsymbol{q})$ の素性を明らかにする必要がある．このため，まず場に正準交換関係を課そう．スカラー場と重力場との相互作用のため交換関係は複雑になるが，非常に早期には単純になる．任意の q に対し，宇宙の膨張率 H が q/a に比べて無視できるようになる十分早期の時刻を考える．そのような早期では式（10.1.17）の右辺の $\dot{\bar{\varphi}}$，$\ddot{\bar{\varphi}}$ はともに無視できるほど小さくなるので，Ψ_q もまた無視できるほど小さくなる．これは，式（10.1.18）と（10.1.19）より，Ψ_q と $\delta\varphi_q$ の比が $a(t)\to 0$ の極限で $a(t)$ に比例してゼロに近づくことからもわかる．そのような早期では，$\alpha(\boldsymbol{q})$ と $\alpha^*(\boldsymbol{q})$ を考える限りでは，重力場の摂動を無視して式（10.1.1）の $g_{\mu\nu}$ を摂動を持たないロバートソン–ウォーカー計量とすることで正準交換関係を導ける．

$$I_\varphi=\int d^4x\,\mathcal{L}_\varphi\,,\qquad \mathcal{L}_\varphi=a^3(t)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2a^2(t)}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}-V(\varphi)\right].$$

するとスカラー場 φ の正準共役が $\pi=\partial\mathcal{L}_\varphi/\partial\dot{\varphi}=a^3\dot{\varphi}$ と求まる．摂動を持たない場は c 数[訳注 1]なので，摂動量の交換関係は場そのものの交換関係と同じとな

訳注 1　量子力学における位置と運動量のような交換しない（非可換な）演算子ではなく，可換な変数のこと．本文の例では $\delta\varphi$ と $\delta\dot{\varphi}$ は非可換であるが，$\bar{\varphi}$ と $\dot{\bar{\varphi}}$ は可換．

る．したがって，非常に早期では，スカラー場の摂動の正準交換関係として以下の結果を得る．

$$\Big[\delta\varphi(\boldsymbol{x},t)\,,\,\delta\varphi(\boldsymbol{y},t)\Big]=0\,,\quad \Big[\delta\varphi(\boldsymbol{x},t)\,,\,\delta\dot{\varphi}(\boldsymbol{y},t)\Big]=i\,a^{-3}(t)\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,.\tag{10.1.24}$$

$\delta\varphi_q(t)$ は $a(t)\to 0$ において式（10.1.20）を満たすように規格化されているので，これらの交換関係より，$\alpha(\boldsymbol{q})$，$\alpha^*(\boldsymbol{q})$ はそれぞれ通常通り規格化された消滅，生成演算子のように振る舞うことがわかる．

$$\Big[\alpha(\boldsymbol{q})\,,\,\alpha(\boldsymbol{q}')\Big]=0\,,\quad \Big[\alpha(\boldsymbol{q})\,,\,\alpha^*(\boldsymbol{q}')\Big]=\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\,.\tag{10.1.25}$$

スカラー場と重力場の摂動に同じ生成消滅演算子が現れていることに驚いた読者には，Ψ が重力波を表していないことに気づいてほしい（重力波の量子はスカラー場とは独立な演算子で生成，消滅される）．Ψ は，インフラトン場の摂動 $\delta\varphi$ の汎関数として式（10.1.14）で与えられる補助場である．これは，量子電磁力学でクーロンゲージを用いて量子化を行う際，ベクトルポテンシャルの時間成分が電荷を持った物質場の汎関数になっているのと同じことである[*1]．

次に進む前についでに述べておくと，このようにして構築したスカラー場は一般相対性理論の等価原理とも合致している．(たとえば共動体積が $(2\pi/Q)^3$ 以下の立方体に測定を限るなどして）ある長波長極限に対応する共動波数 Q よりも小さい共動波数を考えないならば，$Q/a\gg H$ を満たす時刻のスカラー場 $\delta\varphi(\boldsymbol{x},t)$ は，通常のミンコフスキー時空での相互作用のない自由な無質量実スカラー場の表式，

$$\int\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k}}\left[A(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot a\boldsymbol{x}}\exp\left(-i\int k\,dt\right)+A^*(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot a\mathbf{x}}\exp\left(i\int k\,dt\right)\right]$$

と本質的に同じはずである．ここで，消滅演算子 $A(\boldsymbol{k})$ と生成演算子 $A^*(\boldsymbol{k})$ は通常のよく知られた交換関係式を満たす．

$$[A(\boldsymbol{k}),A(\boldsymbol{k}')]=0\,,\qquad [A(\boldsymbol{k}),A^*(\boldsymbol{k}')]=\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\,.$$

指数関数に現れる空間座標が $a\boldsymbol{x}$ なのは，$K=0$ のロバートソン–ウォーカー計量ではこれが固有距離を測るベクトルであることによる．すると，$\boldsymbol{k}$ は時間に依存しない共動波数ベクトル $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{q}/a$ のように関係しており，時間に依存することがわかる．これが，時間に依存する因子を $\exp(\mp ikt)$ ではなく $\exp\left(\mp i\int k\,dt\right)$ と書かなくてはいけなかった理由である．また，$\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')=a^3\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')$ なの

*1 QTF 第 1 巻の式（8.2.9）（邦訳『場の量子論 2 巻』，式（8.2.9））を見よ．

で，式（10.1.25）を満たす演算子 $\alpha(\boldsymbol{q})$ を $\alpha(\boldsymbol{q})=a^{-3/2}A(\boldsymbol{k})$ と定義できる．そして積分変数を $\boldsymbol{k}$ から $\boldsymbol{q}$ に変えれば，$a(t)\to 0$ の極限における場は，

$$\int \frac{d^3q/a^3}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q/a}}\left[a^{3/2}\alpha(\boldsymbol{q})e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\exp\left(-i\int q\,dt/a\right)\right.$$
$$\left.+a^{3/2}\alpha^*(\boldsymbol{q})e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\exp\left(i\int q\,dt/a\right)\right]$$

と書きなおせる．これは式（10.1.20），(10.1.22）と一致する．

最後に，インフレーション中のインフラトン場の量子状態を選ばなくてはいけない．いくつかの可能性はあるものの，もっとも単純で自然だと思われる仮定は，インフレーション中の宇宙は以下を満たす真空状態 $|0\rangle$ だという仮定である[*2]．

$$\alpha(\boldsymbol{q})|0\rangle=0\,,\qquad \langle 0|0\rangle=1\,. \tag{10.1.26}$$

他の可能性としては，状態 $|0\rangle$ を消滅させるのは α ではなく，α と α^* の線形結合だとする仮定や[*3]，インフレーション中のインフラトン場の分布が熱的だとする仮定[*4]，などがある．

式（10.1.26）の仮定は確かなものではないが，少なくとももっともらしいということくらいはいえる．式（10.1.20）で与えられる初期条件（これは2階の微分方程式系（10.1.15)–(10.1.17）の一般解から特解を選び出す）は，$q/a\gg H$ となるような早期で課される．そのような早期では，作用はほとんど時間に依存しないとみなせるので，場の時間発展を良い近似で記述するハミルトニアン演算子 H が存在する．

$$[H,\delta\varphi(\boldsymbol{x},t)]\simeq -i\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},t)\,.$$

式（10.1.18）によれば，$q/a\gg H$ では関数 $\varphi_q(t)$ の時間依存性は近似的に，

$$\dot{\varphi}_q\simeq -i(q/a)\varphi_q$$

と与えられるので，

$$[H,\alpha(\boldsymbol{q})]\simeq -(q/a)\,\alpha(\boldsymbol{q})$$

を得る．ゆえに，もし状態 $|\psi\rangle$ がエネルギー E を持つ H の固有状態であれば，

---

*2 この状態はよく**バンチ–デイヴィス真空**と呼ばれる．T. S. Bunch, P. C. W. Davies, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **360**, 117 (1978) を見よ．

*3 E. Mottola, *Phys. Rev. D* **31**, 754 (1985); B. Allen, *Phys. Rev. D* **32**, 3136 (1985).

*4 K. Bhattacharya, S. Mohanty, R. Rangarajan, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 121302 (2006).

$\alpha(\boldsymbol{q})|\psi\rangle$ はそれより低いエネルギー $\simeq E - q/a$ を持つ H の固有状態である（ただし，$|\psi\rangle$ が $|0\rangle$ である場合は除く．$\alpha(\boldsymbol{q})|0\rangle = 0$ より，$|0\rangle$ はエネルギーが最も低い状態であることによる）．通常の実験室での物理とまったく同じように，あらゆる状態はエネルギーが最も低い状態 $|0\rangle$ に遷移すると考えられるが，問題は，ゆらぎが地平線の外側へ出る以前の時期に遷移が起こるほど遷移の効率が十分良いかどうかである[*5]．

式（10.1.26）を満たす状態では，量子的な平均 $\langle 0|\delta\varphi(\boldsymbol{x}_1,t)\delta\varphi(\boldsymbol{x}_2,t)\cdots|0\rangle$（および $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ を含む平均）はすべての消滅演算子 $\alpha(\boldsymbol{q})$ を右へ，すべての生成演算子 $\alpha^*(\boldsymbol{q})$ を左へ移動させ，$\alpha(\boldsymbol{q})$ が $\alpha^*(\boldsymbol{q}')$ を通り過ぎて右へ移動するときや $\alpha^*(\boldsymbol{q})$ が $\alpha(\boldsymbol{q}')$ を通り過ぎて左へ移動するときに交換関係を使うことで計算できる．その結果は**ウィックの定理**で与えられる[*6]．$\delta\varphi$ や Ψ の積の量子的な平均は，（演算子の順序を考慮しなくてはいけないことを除けば）付録 E で記述する意味でガウス的である．場の対の積の平均は，次の場の対の積の真空期待値で与えられる．

$$\langle 0|\delta\varphi(\boldsymbol{x},t)\delta\varphi(\boldsymbol{y},t)|0\rangle = \int d^3q\ |\delta\varphi_q(t)|^2\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,, \tag{10.1.27}$$

$$\langle 0|\Psi(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{y},t)|0\rangle = \int d^3q\ |\Psi_q(t)|^2\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,, \tag{10.1.28}$$

$$\langle 0|\delta\varphi(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{y},t)|0\rangle = \int d^3q\ \delta\varphi_q(t)\Psi_q^*(t)\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,, \tag{10.1.29}$$

$$\langle 0|\Psi(\boldsymbol{x},t)\delta\varphi(\boldsymbol{y},t)|0\rangle = \int d^3q\ \Psi_q(t)\,\delta\varphi_q^*(t)\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,. \tag{10.1.30}$$

たとえば，

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\delta\varphi(\boldsymbol{w},t)\Psi(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{y},t)\delta\varphi(\boldsymbol{z},t)|0\rangle \\
&= \langle 0|\delta\varphi(\boldsymbol{w},t)\Psi(\boldsymbol{x},t)|0\rangle\langle 0|\Psi(\boldsymbol{y},t)\delta\varphi(\boldsymbol{z},t)|0\rangle \\
&\quad + \langle 0|\delta\varphi(\boldsymbol{w},t)\Psi(\boldsymbol{y},t)|0\rangle\langle 0|\Psi(\boldsymbol{x},t)\delta\varphi(\boldsymbol{z},t)|0\rangle \\
&\quad + \langle 0|\delta\varphi(\boldsymbol{w},t)\delta\varphi(\boldsymbol{z},t)|0\rangle\langle 0|\Psi(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{y},t)|0\rangle
\end{aligned}$$

となる．

これらは量子的な平均であって，古典的な場の配置の集合（アンサンブル）に渡る平均ではないことに注意しよう．それは式（10.1.29），（10.1.30）を見れば

[*5] これは C. Armendariz-Picon, *J. Cosm. & Astropart. Phys.* **0702**, 031 (2007) [astro-ph/0612288] によって調べられている．

[*6] QTF 第 1 巻の 9.1 節（邦訳『場の量子論 2 巻』，9.1 節）を見よ．

はっきりとわかる．これらの式は実数場の積の平均値として複素数の結果を与えるので，結果が場の順序に依存してしまう[*7]．そのときは実験室におけるスピンの測定と同じように，なんらかのデコヒーレンス[訳注 2]が生じなくてはいけない．すなわち，場の配置が古典的な場の配置のアンサンブルの 1 つに固定され，そのアンサンブル平均が量子的な期待値の式（10.1.27）–（10.1.30）で与えられるような状態にならなくてはいけない．どのようにしてデコヒーレンスが起こるかはまったくわかっていないが，はっきりしているのは，実数場の積の期待値が実数になるまではデコヒーレンスが起こったとはいえないことである．自由な場の場合には，これは期待値が場の順序によらないことも意味する．これから見るように，摂動が地平線の外側に出ると，場の方程式の解 $\varphi_q(t)$，$\Psi_q(t)$ は単一の解に支配されるようになる．（場の方程式は実数なので，全体にかかっても良い複素数の因子を除けば）この解は必ず実数である．したがって，摂動が地平線の外側に出れば，実数場の積の期待値は実数になる．宇宙がこの意味で古典的になれば，付録 D のエルゴード定理を用い，様々な古典的な宇宙のアンサンブルに渡る平均を**我々の**宇宙の観測者の位置に渡る平均として解釈できるようになる．

任意のポテンシャル $V(\bar{\varphi})$ に対し，式（10.1.15）–（10.1.17）を初期条件の式（10.1.20），（10.1.21）とともに数値的に解けば，常に解 $\delta\varphi_q(t)$，$\Psi_q(t)$ を求めることができる．しかし，そのようにして得られた解は複雑で，我々が求める以上の情報を含んでいる．インフレーションの時期と現在時刻との間には，いわゆる再加熱期と呼ばれる，インフラトン場 φ のエネルギーが通常の物質と放射に転化される時期がある．この再加熱の過程に関してはほぼ何もわかっていないので，インフレーション中に得た $\delta\varphi$，Ψ の解は，現在時刻の宇宙の観測の解釈という意味ではすぐに役に立つものではない．しかし幸運にして，再加熱の時期（および他のよく理解されていない時期）では，観測的に興味のあるスケールにある宇宙論的なゆらぎはすべて地平線の外側に出ている．インフレーション中の場の解を利用する 1 つの方法は，地平線の外側で保存する量を計算しておき，後に摂動が再び地平線の内側に入ってくる時刻において，その保存量を摂動の地平線の内側での進化の計算の初期条件として用いることである．

本節では，5.4 節で議論した量 $\mathcal{R}$ に着目する．この量は，ニュートンゲージで

---

*7 この点に関する議論は，D. H. Lyth, D. Seery, astro-ph/0607647 を見よ．

訳注 2 量子的な重ね合わせの状態から古典的な状態に移ること．

は以下のように書ける．

$$\mathcal{R} \equiv -\Psi + H\delta u\,. \tag{10.1.31}$$

スカラー場が 1 つの場合には，インフレーション中，地平線の外側でこの量は保存する．5.4 節で示したように，$q/a \ll H$ では $\mathcal{R}$ が一定となる解が常に 2 つ存在するが，いま見たようにスカラー場が 1 つのインフレーションの方程式の独立解は 2 つしかないので，これらの解は両方とも $q/a \ll H$ で保存する．式 (10.1.11) と式 (10.1.22)–(10.1.23) を用いれば，インフレーション中には，

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{x},t) = \int d^3q\ \left[\mathcal{R}_q(t)\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha(\boldsymbol{q}) + \mathcal{R}_q^*(t)\,e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha^*(\boldsymbol{q})\right] \tag{10.1.32}$$

で，$\mathcal{R}_q$ は以下で与えられることがわかる．

$$\mathcal{R}_q = -\Psi_q - H\delta\varphi_q/\dot{\bar{\varphi}}\,. \tag{10.1.33}$$

もちろん，$\mathcal{R}(\boldsymbol{x},t)$ の積の量子的な平均は $\Psi_q(t)$ と $\delta\varphi_q(t)$ がガウス的であるのと同じ意味でガウス的であり，積の真空期待値は以下で与えられる．

$$\langle 0|\mathcal{R}(\boldsymbol{x},t)\mathcal{R}(\boldsymbol{y},t)|0\rangle = \int d^3q\ e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,|\mathcal{R}_q(t)|^2\,. \tag{10.1.34}$$

$\Psi_q(t)$ と $\delta\varphi_q(t)$ を計算してから $\mathcal{R}_q(t)$ を求めるよりも，$\mathcal{R}_q(t)$ 自身が従う微分方程式を直接解く方がずっと便利である．この方程式はニュートンゲージの式 (10.1.15)–(10.1.17) からがんばって導くこともできるが，以下の条件で定義される別のゲージを用いた方がずっと簡単に導ける．

$$\delta\varphi_q = 0\,, \qquad B_q = 0.$$

式 (B.66)–(B.68) より，このゲージでは，

$$\delta\rho = \delta p = \frac{1}{2}h_{00}\dot{\bar{\varphi}}^2 = -\frac{1}{2}E\dot{\bar{\varphi}}^2\,, \qquad \delta u = 0$$

を得る．また，付録 B で述べたように，単一の実スカラー場のエネルギー–運動量テンソルは完全流体の形をとるので，非等方ストレス π_{ij} はゼロとなる．すると，重力場の式 (5.1.44)，(5.1.46) とエネルギー保存の式 (5.1.49) から以下の方程式を得る．

$$0 = H\dot{E} + 2(3H^2 + \dot{H})E + a^{-2}\nabla^2 A - \ddot{A} - 6H\dot{A} + 2a^{-1}H\nabla^2 F\,,$$

$$0 = -HE + \dot{A}\,,$$

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(E\dot{H}\right) - 3H\dot{H}E - a^{-1}\dot{H}\nabla^2 F + \frac{3}{2}\dot{H}\dot{A}\,,$$

ここで再び関係式 $\dot{H} = -4\pi G\dot{\bar{\varphi}}^2$ を用いた．E と F を消去すれば A が従う次の微分方程式を得る．

$$\ddot{A} + \left(3H - \frac{2\dot{H}}{H} + \frac{\ddot{H}}{\dot{H}}\right)\dot{A} - \frac{1}{a^2}\nabla^2 A = 0\,.$$

ゲージ不変な公式（5.4.22）よりこのゲージでは $\mathcal{R} = A/2$ であるから，$\mathcal{R}$ もまた同じ微分方程式に従う．これをフーリエ変換すれば，**ムハノフ–佐々木方程式**として知られる微分方程式を得る*8.

$$\frac{d^2\mathcal{R}_q}{d\tau^2} + \frac{2}{z}\frac{dz}{d\tau}\frac{d\mathcal{R}_q}{d\tau} + q^2\mathcal{R}_q = 0\,, \tag{10.1.35}$$

ここで τ は共形時間，

$$\tau \equiv \int_{t_*}^{t}\frac{dt'}{a(t')} \tag{10.1.36}$$

であり，t_* は後ほど選ぶ任意の時刻，そして z は次のように定義される量である．

$$z \equiv \frac{a\dot{\bar{\varphi}}}{H}\,. \tag{10.1.37}$$

初期条件は，ニュートンゲージに戻って式（10.1.20），（10.1.21）を式（10.1.33）に代入することで得られる．$a(t)\dot{\bar{\varphi}}^2(t)/H(t)$ が $a(t)\to 0$ の極限でゼロになると仮定すれば，式（10.1.33）で $\delta\varphi_q$ に比例する項のみがこの極限でゼロにならないので，$a(t)\to 0$ において以下の結果を得る．

$$\mathcal{R}_q(t) \longrightarrow -\frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q}\,a(t)\,\dot{\bar{\varphi}}(t)}\,\exp\left(-iq\tau\right). \tag{10.1.38}$$

任意のポテンシャルに対し，式（10.1.35）は $a=0$ から地平線の外側に出る時期 $q/a \ll H$ まで積分されなくてはならない．地平線の外側では式（10.1.35）の $q^2\mathcal{R}_q$ を無視でき，2 つの独立解の 1 つはゼロでない定数で支配的な解となる．もう 1 つの解では $d\mathcal{R}_q/d\tau$ が $1/z^2$ に比例して減衰し，したがって $\mathcal{R}_q$ がゼロに近づく減衰解となる．我々が必要なのは，$\mathcal{R}_q(t)$ が地平線の外側で持つ定数の極限 $\mathcal{R}_q^o$ である．(5.3 節で学んだように，宇宙論的ゆらぎの解析によく使われる量 ζ_q

---

*8 V. S. Mukhanov, *JETP Lett.* **41**, 493 (1985); S. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.* **76**, 1036 (1986); V. S. Mukhanov, H. A. Feldman, R.H. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992); E. D. Stewart, D. H. Lyth, *Phys. Lett. B* **302**, 171 (1993).

は，地平線のずっと外側では $\zeta_q^o = \mathcal{R}_q^o$ で与えられる）．

本節で展開した一般的な議論の中で，宇宙論的なゆらぎの強さに関して何ら仮定する必要がなかったのは驚くべきことである．ただ単に，任意のポテンシャルに対して式（10.1.35）を初期条件の式（10.1.38）とともに解き，解 $\mathcal{R}_q(t)$ が地平線の外側で一定の値 $\mathcal{R}_q^o$ になるまで積分するだけでよい．

それでは，ポテンシャルのどのような性質が $\mathcal{R}_q^o$ に影響するのだろうか？　地平線のずっと内側での $\mathcal{R}_q(t)$ の振る舞いを記述する式（10.1.38）はポテンシャルの性質に依存しないし，地平線の外側では $\mathcal{R}_q(t)$ は単に定数となるだけである．したがって，$\mathcal{R}_q^o$ **は，摂動が地平線を超える時刻に対応する場の値** $\bar{\varphi}(t)$ **の近傍** φ **におけるポテンシャル** $V(\varphi)$ **の振る舞いのみに依存するはずである．**

この事実は，スカラー型摂動の観測からインフレーションのどの時期の情報が得られるかを決める．たったいま見たように，共動波数 q を持つゆらぎを観測すれば，$q/a(t_q) = H(t_q)$ より求まる，そのゆらぎが地平線の外側に出た時刻 t_q でのインフレーションに関する情報が得られる．これを別の観点から見てみよう．放射優勢宇宙が始まる時刻 t_1 と，波数 q のゆらぎの観測から情報を得られる時刻 t_q でのロバートソン–ウォーカースケール因子の比の自然対数 $\mathcal{N}(q)$ は[*9]，

$$\mathcal{N}(q) \equiv \ln\left(\frac{a(t_1)}{a(t_q)}\right) = \mathcal{N}_0 + \ln\left(\frac{a(t_0)\,H(t_0)}{q}\right) + \ln\left(\frac{H(t_q)}{H(t_1)}\right) \tag{10.1.39}$$

と書ける．$\mathcal{N}_0$ は以下で定義される量である．

$$\mathcal{N}_0 \equiv \ln\left(\frac{a(t_1)H(t_1)}{a(t_0)H(t_0)}\right) . \tag{10.1.40}$$

いつも通り，t_0 は現在時刻を表す．まず，現在時刻までにゆらぎが再び地平線の内側に入って来ないことには観測できないのだから，現在時刻で観測可能なゆらぎの物理的な波長 $a(t_0)/q$ は現在時刻での地平線の距離 $\approx 1/H(t_0)$ よりも小さい必要がある．したがって，放射優勢宇宙が始まる前の時期において，観測可能な領域が持ち得る最大の $\mathcal{N}(q)$ の値は，

$$\mathcal{N}_{\text{最大}} = \mathcal{N}_0 + \ln\left(\frac{H(t)}{H(t_1)}\right)_{\text{最大}} \tag{10.1.41}$$

で与えられる．右辺第 2 項は，$\mathcal{N}_{\text{最大}}$ に対応する時刻から放射優勢宇宙が始まるまでの間に $\ln[H(t)/H(t_1)]$ が最大となる時刻 t での $\ln[H(t)/H(t_1)]$ の値を表す．

[*9] A. R. Liddle, S. M. Leach, *Phys. Rev. D* **68**, 103503 (2003) [astro-ph/0305263].

一般にインフレーション期，およびインフレーション後の再加熱の時期にはエネルギーは減少すると考えられるので，$H(t_{最大}) > H(t_1)$，すなわち $\mathcal{N}_{最大} > \mathcal{N}_0$ である．しかし，スローロールインフレーションでは良い近似でこのエネルギー損失を無視できるので，式（10.1.41）の右辺第 2 項を無視すれば，

$$\mathcal{N}_{最大} \simeq \mathcal{N}_0 \tag{10.1.42}$$

を得る．$\mathcal{N}(q)$ を表す公式を式（10.1.39）のように書いたのは，4.1 節で $\mathcal{N}_0$ をすでに計算しておいたことによる．

$$\mathcal{N}_0 = \ln\left(\frac{\rho_1^{1/4}}{0.037\,h\ \mathrm{eV}}\right), \tag{10.1.43}$$

ここで ρ_1 は放射優勢宇宙が始まる時刻での宇宙のエネルギー密度を表す．たとえば，$h = 0.7$，$\rho_1 = G^{-2} = [1.2 \times 10^{19}\ \mathrm{GeV}]^4$ を代入すれば $\mathcal{N}_0 \simeq 68$ を得るから，式（10.1.42）によれば，我々が観測から情報を得られるのはインフレーション終了時から遡って宇宙が e^{-68} 倍だった時刻までの期間であることがわかる．10.3 節では，この問題を再考することで ρ_1 の値を評価する．

さて，あるポテンシャルを用いると，近似を使うことなく定数 $\mathcal{R}_q^o$ を解析的に求めることができる[*10]．そのポテンシャルとは，以下で与えられる指数関数ポテンシャルである．

$$V(\varphi) = g\,e^{-\lambda\varphi}. \tag{10.1.44}$$

（ここで，g と λ は任意の実定数．）このポテンシャルは 4.2 節ですでに扱った．もちろん，インフレーションが永久に終わらなくなってしまうのでこの形のポテンシャルが成り立つ φ は限られるが，270 ページの第 2 段落で述べたように，$\mathcal{R}_q^o$ の計算には，ゆらぎが地平線を超える時刻に相当する場の近傍でのポテンシャルの値のみが問題となる．

指数関数型ポテンシャルに対する式（10.1.6），（10.1.7）の解は，

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8\pi G g\varepsilon^2 t^2}{3-\varepsilon}\right), \tag{10.1.45}$$

$$H = 1/\varepsilon t \tag{10.1.46}$$

[*10] L. F. Abbott, M. B. Wise, *Nucl. Phys. B* **244**, 541 (1984); F. Lucchin, S. Matarrese, *Phys. Rev. D* **32**, 1316 (1985); *Phys. Lett. B* **164**, 282 (1985); D. H. Lyth, E. D. Stewart, *Phys. Lett. B* **274**, 168 (1992).

で，ε は正の無次元定数である．

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\lambda^2}{16\pi G} . \tag{10.1.47}$$

このポテンシャルによるインフレーションでは $a \propto t^{1/\varepsilon}$ が得られることより，このモデルはよく冪則インフレーションと呼ばれる．このモデルでは，ロバートソン–ウォーカースケール因子が，

$$a = t^{1/\varepsilon} \tag{10.1.48}$$

となるように共動座標を規格化するのが便利である．ここで，$a\dot{\varphi}^2/H \propto t^{(1-\varepsilon)/\varepsilon}$ なので，$a(t) \to 0$ の極限で $a\dot{\varphi}^2/H$ がゼロになるという仮定は $\varepsilon < 1$ のときに満たされる．したがって，これより $\varepsilon < 1$ を仮定する．

このポテンシャルでは，共形時間の定義式（10.1.36）に現れる任意定数 t_* を $t_* = \infty$ ととるのが便利である．この場合，共形時間は負となる．

$$\tau = -\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) t^{-(1-\varepsilon)/\varepsilon} . \tag{10.1.49}$$

t，$a(t)$ がゼロから無限大まで変化すると，τ は $-\infty$ からゼロまで変化する．式（10.1.35）を τ を用いて書き直せば，

$$\frac{d^2\mathcal{R}_q}{d\tau^2} - \frac{2}{(1-\varepsilon)\tau}\frac{d\mathcal{R}_q}{d\tau} + q^2\mathcal{R}_q = 0 \tag{10.1.50}$$

となり，解は τ^ν にハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(-q\tau)$，$H_\nu^{(2)}(-q\tau)$ をかけたものに比例する．ハンケル関数の次数 ν は以下で与えられる．

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1-\varepsilon}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} . \tag{10.1.51}$$

1 番目のハンケル関数は，x が実数で大きな値を持つとき，以下の漸近的な振る舞いを示す．

$$H_\nu^{(1)}(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(ix - i\nu\pi/2 - i\pi/4\right) ,$$

2 番目のハンケル関数は $H_\nu^{(2)}(x) = H_\nu^{(1)*}(x)$ で与えられるから，初期条件の式（10.1.38）は特解として $\propto \tau^\nu H_\nu^{(1)}(-q\tau)$ を選び出し，比例係数も決める．

$$\mathcal{R}_q(t) = -\frac{\lambda\sqrt{\pi}}{4(2\pi)^{3/2}\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{-1/(1-\varepsilon)}$$

$$\times \exp\left(\frac{i\pi\nu}{2}+\frac{i\pi}{4}\right)(-\tau)^{\nu} H_{\nu}^{(1)}(-q\tau) . \tag{10.1.52}$$

逆に x が実数で小さな値を持つときは,

$$H_{\nu}^{(1)}(x) \longrightarrow \frac{-i\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}$$

なので,地平線の外側 ($q/a \ll H$), すなわち $-q\tau \ll 1$ の極限では, $\mathcal{R}_q$ は一定の値 $\mathcal{R}_q^o$ に近づく. 式 (10.1.52) を用いれば, 以下の結果を得る.

$$\mathcal{R}_q^o = i\frac{\lambda\,\Gamma(\nu)}{8\sqrt{2}\,\pi^2\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{-1/(1-\varepsilon)}\exp\left(\frac{i\pi\nu}{2}+\frac{i\pi}{4}\right)\left(\frac{q}{2}\right)^{-\nu} . \tag{10.1.53}$$

他のポテンシャルから得られる結果と比べやすいように, この結果をゆらぎが地平線を超える時刻 t_q で計算された量で書き直そう. t_q は次のように定義される.

$$q/a(t_q) = H(t_q) . \tag{10.1.54}$$

この式を解けば $t_q = (\varepsilon q)^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}$ と $H(t_q) = q^{-\varepsilon/(1-\varepsilon)}\varepsilon^{-1/(1-\varepsilon)}$ が得られる. さらに, 式 (10.1.47) を用いて λ を ε と G で書いておく. すると式 (10.1.53) は以下のように書き直せる.

$$\zeta_q^o = \mathcal{R}_q^o = i\sqrt{16\pi G}q^{-3/2}H(t_q)\frac{\Gamma(\nu)2^{\nu-3/2}}{4\pi^2\sqrt{\varepsilon}}(1-\varepsilon)^{1/(1-\varepsilon)}\exp\left(\frac{i\pi\nu}{2}+\frac{i\pi}{4}\right). \tag{10.1.55}$$

この結果は, 式 (10.1.48) で用いた $a(t)$ の比例定数の選び方によらないことを付記しておく.

十分な量のインフレーションを起こすには, ポテンシャルが平坦であることが要求される. したがって, 我々が主に興味があるのは ε が小さい場合である. $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ を用いれば, 式 (10.1.55) の $\varepsilon \ll 1$ の極限として以下の表式を得る.

$$\zeta_q^o = \mathcal{R}_q^o = -i\sqrt{16\pi G}q^{-3/2}H(t_q)\frac{1}{8\pi^{3/2}\sqrt{\varepsilon}} . \tag{10.1.56}$$

最も重要な結果は, ポテンシャルが平坦な場合, すなわち $H(t_q)$ が q にほぼよらない場合には, $\mathcal{R}_q^o$ は $q^{-3/2}$ にほぼ比例することである. この結果は, 場の値が $\bar{\varphi}(t_q)$ 近傍にあるときのポテンシャルが平坦であれば, 指数関数型ポテンシャルの場合だけでなく一般的に成り立つ.

$\mathcal{R}_q^o$ の q 依存性が近似的に $q^{-3/2}$ であるという理論的予想は，観測結果からも強く支持されている．8.1 節で学んだように，暗黒物質の分布を決めるパワースペクトル $P(k)$ は物理的波数 k が小さいところでは $k^4|\mathcal{R}_{ka_0}^o|^2$ に比例するので，場の値が $\bar{\varphi}(t_q)$ 近傍にあるときのポテンシャルが平坦であれば，k が小さいところでのパワースペクトルはハリソン–ゼルドヴィッチ型スペクトル，つまり $P(k) \propto k$ となる．また，6.3 節で学んだように，ニュートンの重力ポテンシャルのパワースペクトル $\mathcal{P}_\phi(q)$ は長波長極限で $|\mathcal{R}_q^o|^2$ に比例する．これは，2.6 節で示したように（積分ザクス–ヴォルフェ効果と再電離の効果を除けば）ℓ が小さいところでの $\ell(\ell+1)C_\ell$ が ℓ によらなくなることを意味する．さらに，7.2 節と 7.4 節で学んだように，$\mathcal{R}_q^o$ が $q^{-3/2}$ にほぼ比例すると仮定して計算した，ℓ が大きいところでの宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎと偏光の相関関数は，観測結果とよく合致する．

より正確にいえば，7.2 節で $|\mathcal{R}_q^o|^2 \propto q^{-4+n_S}$ となるように定義したスカラー型摂動のパワースペクトルの冪を表すパラメータ n_S は，指数関数型ポテンシャルの場合，式（10.1.53）より以下の定数で与えられる．

$$n_S = 4 - 2\nu = 1 - \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \,.$$

7.2 節で紹介した WMAP 衛星の 3 年目の結果からは $n_S = 0.958 \pm 0.016$ が得られているから，指数関数型ポテンシャルに対して $\varepsilon = 0.021 \pm 0.008$ が得られる．これは十分小さいので，近似式（10.1.56）が使える．$|\mathcal{R}_q^o|^2 \simeq |N|^2 q^{-3}$ と書けば，指数関数型ポテンシャルの場合，

$$|N|^2 \simeq \frac{GH_{\text{地平線超}}^2}{4\pi^2\varepsilon}$$

と書ける．$H_{\text{地平線超}}$ はゆらぎが地平線を超える時刻での宇宙の膨張率を示す（$H_{\text{地平線超}}$ の弱い q 依存性は無視した）．7.2 節で紹介した WMAP の 3 年目の結果からは $|N|^2 = (1.93 \pm 0.12) \times 10^{-10}$ が得られているから，指数関数ポテンシャルを用いて $H_{\text{地平線超}} \simeq 2\pi|N|\sqrt{\varepsilon/G} \simeq 1.5 \times 10^{14}$ GeV が得られる．これは，エネルギー密度で書けば $3H_{\text{地平線超}}^2/8\pi G \simeq [2.6 \times 10^{16}\ \text{GeV}]^4$ に対応する．

もちろん，指数関数型ポテンシャルは 1 つの例に過ぎない．このポテンシャルは $V''/V = (V'/V)^2$ という特殊な性質を持つので，これまで導いた結果の詳細がそのまま他のポテンシャルにあてはまる理由はない．10.3 節ではスローロール近

似を用い，一般的なポテンシャルに対して何がいえるかを学ぶ．しかし，スローロール近似の範囲内で得られる一般的なポテンシャルに対する結果と，本節で指数関数ポテンシャルを用いて得た結果は，大筋で一致する．

本節の最後に，作用が式（10.1.1）のような単純な形をとるという仮定がどれほどもっともらしいのかを考えてみよう[*11]．実スカラー場 χ が 1 つしかなく，作用の各項の時空微分の数が 2 個以下であると仮定すれば，式（10.1.1）の形は一般性を失っていない．この場合の最も一般的な作用は，

$$I_\chi = \int d^4x\,\sqrt{-\mathrm{Det}g}\,\left[-\frac{1}{2}K(\chi)g^{\mu\nu}\frac{\partial\chi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\chi}{\partial x^\nu} - U(\chi)\right]$$

と書ける．ここで K と U は χ の任意関数であるが，ユニタリ性より $K \geqq 0$ が要請される．この作用は，場を $\varphi = \int d\chi\,K^{1/2}(\chi)$ と再定義すれば式（10.1.1）の形にできる．

しかし，なぜ作用の各項の時空微分の数が 2 個を超えてはいけないのか？この疑問は，多くの似たような疑問の 1 つに過ぎない．すなわち，なぜ重力場の作用は $\int d^4x\sqrt{-\mathrm{Det}g}R$ に比例するアインシュタインの項だけを含み，2 個を超える計量の微分を持つ他の一般共変な項は含まないのか？　なぜ電弱標準理論や量子色力学の作用はくりこみ可能な項しか含まないのか？

これらの疑問に対し，我々は確かな答えは持っていないが，少なくとも 1 つ，それなりにもっともらしい答えを持っている．作用におけるこれらの追加項は，演算子の数の上で高次の項となる．しかし，次元解析よりそのような項は何かしらの基本的なスケールに対応する質量の負の冪を持つ係数を伴わなくてはいけな

[*11] 他の可能性は，非常に多くの文献において研究されている．以下挙げたのは部分的な文献リストである：C. Armendariz-Picon, T. Damour, V. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **458**, 209 (1999) [hep-th/9904075]; J. Martin, R. H. Brandenberger, *Phys. Rev. D* **63**, 1235012 (2001) [hep-th/0005209]; R. H. Brandenberger, J. Martin, *Mod. Phys. Lett. A* **16**, 999 (2001) [astro-ph/0005432]; J. C. Niemeyer, *Phys. Rev. D* **63**, 123502 (2001) [astro-ph/0005533]; J. C. Niemeyer, R. Parentani, *Phys. Rev. D* **64**, 101301 (2001) [astro-ph/0101451]; A. Kempf, J. C. Niemeyer, *Phys. Rev. D* **64**, 103501 (2001) [astro-ph/0103225]; R. Easther, B. R. Greene, W. H. Kinney, G. Shiu, *Phys. Rev. D* **64**, 103502 (2001) [hep-th/0104102]; *Phys. Rev. D* **66**, 023518 (2002); *Phys. Rev. D* **67**, 063508 (2003) [hep-th/0110226]; R. H. Brandenberger, S. E. Joras, J. Martin, *Phys. Rev. D* **66**, 083514 (2002) [hep-th/0112122]; N. Kaloper, M. Kleban, A. Lawrence, S. Shenker, *Phys. Rev. D* **66**, 123510 (2002) [hep-th/0201158]; N. Kaloper, M. Kleban, A. Lawrence, S. Shenker, L. Susskind, *J. High Energy Phys.* **0211**, 037 (2002) [hep-th/0209231]; U. H. Danielsson, *Phys. Rev. D* **66**, 023511 (2002); L. Bergström, U. H. Danielsson, *J. High Energy Phys.* **12**, 38 (2002); C. P. Burgess, J. M. Cline, F. Lemieux, R. Holman, *J. High Energy Phys.* **2**, 48 (2003); J. Martin, R. Brandenberger, *Phys. Rev. D* **68**, 063513 (2003); J. Martin, C. Ringeval, *Phys. Rev. D* **69**, 083515 (2004); T. Okamoto, E. A. Lim, *Phys. Rev. D* **69**, 083519 (2004). R. de Putter, E. V. Linder, 0705.0400.

い．もしその質量が十分に大きければ，作用におけるそのような追加項の寄与は通常小さく抑えられる．一般相対性理論の成功を維持するためには，追加項の係数に現れる長さスケール $1/M$ は日常の巨視的な長さスケールより小さければ良い．しかし，バリオン数やレプトン数の厳密な保存を条件として課さないとすれば，理論的に予想される陽子崩壊の反応率を実験的な上限値よりも低く抑えるために，クォークやレプトンの作用に現れる基本的な質量スケールは少なくとも 10^{16}GeV 程度でなければならない．

インフラトン場はプランク質量程度の値をとると考えられているので，インフラトンの作用においてスカラー場の任意の冪乗の項を小さく抑える手だてはない．そのため，たいていの場合ポテンシャル $V(\varphi)$ は任意関数として扱われる．しかし，インフラトン場の時空微分は q/a 程度の大きさの因子を与えるので，微分が 1 つ増えるごとに q/aM 程度の大きさの因子が係数としてかかることになる．ゆらぎが地平線を超えるときには q/a は H と等しくなるが，すでに見たように H は 10^{14} GeV 程度の大きさだと期待されるのに対し，M はずっと大きく $|V|^{1/4} \approx 10^{16}$ GeV から $1/\sqrt{G} \simeq 10^{19}$ GeV の間のどこかの値をとると思われるので，ゆらぎが地平線を超える頃，地平線の外側に出た後，**および地平線の外側に出る少し前**の時期では，最小の数を超える時空微分を持つ項の寄与は小さく抑えられると考えられる．本節の計算を正当化するにはこのような理屈で十分である．少なくとも，スカラー場が 1 つしかない場合のみを扱うならば良い第 1 近似になっているといえる．インフラトン場が複数個ある可能性は 10.4 節で議論する．

10.2 インフレーション中のテンソル場のゆらぎ

インフレーション中のテンソル場のゆらぎ $D_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ は，前節で扱ったスカラー場のゆらぎとほぼ同じように扱える．スカラー場の理論ではテンソル型非等方ストレス π^T_{ij} はゼロとなるので，テンソル型摂動の場の方程式は以下の単純な形となる．

$$\nabla^2 D_{ij} - a^2 \ddot{D}_{ij} - 3a\dot{a}\dot{D}_{ij} = 0 \, . \tag{10.2.1}$$

また，D_{ij} はベクトル型摂動やスカラー型摂動を含まないので，以下の条件を満たす．

$$D_{ij} = D_{ji} \, , \qquad D_{ii} = 0 \, , \qquad \partial_i D_{ij} = 0 \, . \tag{10.2.2}$$

平面波解は $e_{ij}\mathcal{D}_q(t)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}$ と書け，$\mathcal{D}_q(t)$ は以下の微分方程式に従う．

$$\ddot{\mathcal{D}}_q + 3H\dot{\mathcal{D}}_q + (q^2/a^2)\mathcal{D}_q = 0, \tag{10.2.3}$$

ここで，e_{ij} は次の条件を満たす時間に依存しない偏光テンソルを表す．

$$e_{ij} = e_{ji}\,, \qquad e_{ii} = 0\,, \qquad q_i e_{ij} = 0\,. \tag{10.2.4}$$

5.2 節で学んだように，ある単位ベクトル $\hat{q}$ が与えられたとき，上記の条件を満たす独立な偏光テンソルは 2 つある．3 軸方向に $\hat{q}$ をとれば，偏光テンソルの成分を以下のように選ぶことができる．

$$e_{11} = -e_{22} = 1/\sqrt{2}\,, \quad e_{12} = e_{21} = \pm i/\sqrt{2}\,, \quad e_{3i} = e_{i3} = 0\,. \tag{10.2.5}$$

任意の方向を向いた $\hat{q}$ に対する e_{ij} は，3 軸を $\hat{q}$ の方向に移す標準的な回転の式（7.4.12）を式（10.2.5）に作用させることで得られる．式（10.2.5）はヘリシティ ± 2 を持つ波を記述するので，このようにして構築した偏光テンソルを $e_{ij}(\hat{q}, \pm 2)$ と書くことにしよう．

$q/a \gg H$ となる早期では，式（10.2.3）は以下で与えられる WKB 解を持つ．

$$\mathcal{D}_q(t) \longrightarrow h(t)\exp\left(-iq\int_{t_*}^{t}\frac{dt'}{a(t')}\right)\,, \tag{10.2.6}$$

ここで $h(t)$ は指数関数の引数よりもずっとゆっくり変化する関数で，t_* は任意定数を表す．式（10.2.3）で q/a の 2 次の項は相殺し，1 次の項からは $2\dot{h} + 2Hh = 0$ が得られるから，$h \propto a^{-1}$ を得る．そこで，これより $\mathcal{D}_q(t)$ は式（10.2.3）の解で，$a(t) \to 0$ の極限が次のようになるように規格化されているとしよう．

$$\mathcal{D}_q(t) \longrightarrow \frac{\sqrt{16\pi G}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q}\,a(t)}\exp\left(-iq\int_{t_*}^{t}\frac{dt'}{a(t')}\right)\,. \tag{10.2.7}$$

$\mathcal{D}_q(t)$ と $\mathcal{D}_q^*(t)$ は式（10.2.3）の解をすべて与えるので，式（10.2.1），(10.2.2）を満たす最も一般的な実テンソル場は以下の形に書ける．

$$D_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{\lambda=\pm 2}\int d^3q\,\Big[\mathcal{D}_q(t)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\beta(\boldsymbol{q},\lambda)e_{ij}(\hat{q},\lambda)$$
$$+\mathcal{D}_q^*(t)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\beta^*(\boldsymbol{q},\lambda)e_{ij}^*(\hat{q},\lambda)\Big]\,. \tag{10.2.8}$$

（ここでは，5.2 節のように式（10.2.3）の 2 つの独立解を後期における振る舞い $\mathcal{D}_{1q}(t)$，$\mathcal{D}_{2q}(t)$ で区別するのではなく，早期における振る舞い $\mathcal{D}_q(t)$，$\mathcal{D}_q^*(t)$ で区

別していることに注意しよう.）$\mathcal{D}_q(t)$ は式（10.2.7）を満たすように規格化されているので，正準交換関係より，

$$[\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,,\,\beta(\boldsymbol{q}',\lambda')]=0\,,\qquad [\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\,,\,\beta^*(\boldsymbol{q}',\lambda')]=\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\delta_{\lambda\lambda'} \tag{10.2.9}$$

が要請される．したがって，$\beta(\boldsymbol{q},\lambda)$，$\beta^*(\boldsymbol{q},\lambda)$ はヘリシティλを持つ重力子の消滅，生成演算子だと解釈できる．

スカラー型摂動のときのように，インフレーション中の宇宙は真空の条件 $\beta(\boldsymbol{q},\lambda)|0\rangle=0$ を満たす量子状態 $|0\rangle$ にあると仮定する．すると複数の D の積の期待値はガウス的となり，

$$\langle 0|D_{ij}(\boldsymbol{x},t)\,D_{kl}(\boldsymbol{y},t)|0\rangle=\int d^3q\;e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,|\mathcal{D}_q(t)|^2\,\Pi_{ij,kl}(\hat{q}) \tag{10.2.10}$$

を用いて書ける．ここで $\Pi_{ij,kl}(\hat{q})$ は偏光テンソルの積のヘリシティに渡る和で，式（5.2.25）で与えられる．

$$\begin{aligned}\Pi_{ij,k\ell}(\hat{q})&\equiv\sum_\lambda e_{ij}(\hat{q},\lambda)\,e^*_{k\ell}(\hat{q},\lambda)\\&=\delta_{ik}\delta_{j\ell}+\delta_{i\ell}\delta_{jk}-\delta_{ij}\delta_{k\ell}+\delta_{ij}\hat{q}_k\hat{q}_\ell+\delta_{k\ell}\hat{q}_i\hat{q}_j-\delta_{ik}\hat{q}_j\hat{q}_\ell-\delta_{i\ell}\hat{q}_j\hat{q}_k\\&\quad-\delta_{jk}\hat{q}_i\hat{q}_\ell-\delta_{j\ell}\hat{q}_i\hat{q}_k+\hat{q}_i\hat{q}_j\hat{q}_k\hat{q}_\ell.\end{aligned} \tag{10.2.11}$$

任意のポテンシャルに対し，微分方程式（10.2.3）を式（10.2.7）を初期条件として積分すれば $\mathcal{D}_q(t)$ が求められる．地平線の外側 $q/a\ll H$ では解は定数 $\mathcal{D}_q^o$ となるから，これは重力波が再び地平線の内側に入ってきた後の進化の初期条件として使える．計算を実行するには，再び独立変数を通常の時間から共形時間に変えるのが便利である．

$$\tau\equiv-\int_t^\infty\frac{dt'}{a(t')}\,. \tag{10.2.12}$$

さらに式（10.2.7）において $t_*=\infty$ とする．すると式（10.2.3）は次のように書き換えられる．

$$\frac{d^2\mathcal{D}_q}{d\tau^2}+2Ha\frac{d\mathcal{D}_q}{d\tau}+q^2\mathcal{D}_q=0\,. \tag{10.2.13}$$

ここで，

$$Ha=\frac{da}{dt}=\frac{1}{a}\frac{da}{d\tau}$$

である．式（10.2.13）は，$z\equiv a\dot{\varphi}/H$ が a に置き換わった以外はムハノフ–佐々

木方程式（10.1.35）と同じである．

$q/aH \gg 1$ での初期条件の式（10.2.7）はポテンシャルの詳細によらないし，$q/aH \ll 1$ ではテンソル型摂動の振幅 $\mathcal{D}_q(t)$ は定数 $\mathcal{D}_q^o$ に近づくだけである．よって，スカラー型摂動の振幅 $\mathcal{R}_q^0$ のときと同じく，地平線の外側のテンソル型摂動の振幅 $\mathcal{D}_q^o$ は，摂動が地平線を超える時刻（そこでは q/aH が 1 程度となる）での $\bar{\varphi}(t)$ の値近傍のポテンシャルの振る舞いのみに依存する．したがって，地平線の内側に再び入ってきたテンソル型摂動の振幅の測定から情報を得ることのできる期間は，インフレーション終了時から遡って宇宙が e^{-N} 倍だった時刻までの期間で，スカラー型摂動の場合と同じく N は式（10.1.40）によって制限される．

スカラー型摂動のときのように，スローロール近似を用いずに $\mathcal{D}_q^o$ を解析的に計算できるポテンシャルとして，式（10.1.44）の指数関数型ポテンシャルを例題に用いるのが便利である．このポテンシャルでは $\dot{\bar{\varphi}}/H$ は定数 $2\varepsilon/\lambda$ となるから，式（10.1.37）より $z \propto a$ が得られる．すると式（10.2.13）はムハノフ–佐々木方程式と正確に同じとなる．また，初期条件の式（10.2.7）は因子 $-2\varepsilon\sqrt{16\pi G}/\lambda = -2\sqrt{\varepsilon}$ を除けばスカラー型摂動の初期条件の式（10.1.38）と同じなので，指数関数ポテンシャルではテンソル型摂動とスカラー型摂動の比が次のように求まる．

$$\mathcal{D}_q(t)/\mathcal{R}_q(t) = -2\varepsilon\sqrt{16\pi G}/\lambda = -2\sqrt{\varepsilon}\,. \tag{10.2.14}$$

もちろん，地平線の外側での $\mathcal{D}_q^o$ と $\mathcal{R}_q^o$ の比も同じ値を持つ．テンソル型摂動とスカラー型摂動の振幅の比は，たいていの場合以下で定義するテンソル–スカラー比 r で表す．

$$r_q \equiv 4|\mathcal{D}_q^o/\mathcal{R}_q^o|^2\,. \tag{10.2.15}$$

指数関数型ポテンシャルの場合には，r_q は波数によらずに以下の値をとることがわかる．

$$r = 16\varepsilon\,. \tag{10.2.16}$$

10.1 節で，指数関数型ポテンシャルに対しては WMAP 衛星の 3 年目の結果から $\varepsilon = 0.021 \pm 0.008$ が得られることを見た．これは $r = 0.34 \pm 0.13$ に対応する．一方，（この値の ε に対して）WMAP の 3 年目の結果から得られた r の上限値 $r <$

0.3[*1,訳注 1]は指数関数型ポテンシャルの予言値ぎりぎりのところにあるので，摂動が地平線を超えた時刻での場 φ の値近傍のポテンシャルが指数関数的であるインフレーションモデルはほぼ棄却されている（もちろん，インフレーションが永久に終わらないので指数関数型ポテンシャルが成り立つ場の値は限られる．ここでは，摂動が地平線を超えた時刻に対応する場 φ の値以外でのポテンシャルの形には何の仮定もしていない）．より一般的なポテンシャルに対するテンソル型摂動とスカラー型摂動を解析するにはスロー ロール近似が必要となる．これが 10.3 節の主題となる．

10.3　インフレーション中のゆらぎ：スローロール近似

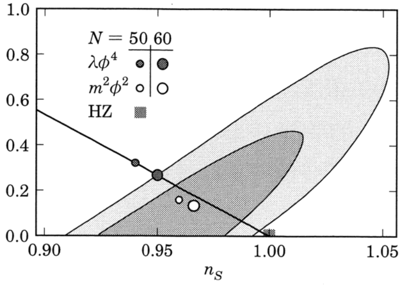
任意の一般的なポテンシャルに対しては，スカラー型摂動 $\mathcal{R}_q(t)$ やテンソル型摂動 $\mathcal{D}_q(t)$ を解析的に計算することはできない．しかし，インフレーション中に宇宙の大きさが（4 章で学んだ必要性から）e の数十乗倍以上も膨張するためには，$1/H$ で与えられる時間スケールよりも長い時間に渡って H の変化が小さくなければならない．したがって，H の変化がごくわずかな期間を「スローロール」の期間とし，その間に q/aH は非常に大きな値から非常に小さな値へと変化するものとする．10.1 節と 10.2 節で学んだように，地平線の外側での漸近的な値 $\mathcal{R}_q^o$，$\mathcal{D}_q^o$ は摂動が地平線を超える時刻（$q/a \approx H$）での場の進化にしか依存しないので，宇宙膨張の始まりからインフレーション期の終わりまでスローロールがずっと成り立っている必要はない．

ムハノフ–佐々木方程式（10.1.35）から出発する[*1]．

[*1] D. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 377 (2007) [astro-ph/0603449] の図 14 を見よ．

[訳注 1] 脚注 1 の文献に掲載された図 14 の一部をここに示す．

WMAP 衛星 3 年目のデータから得られた，（共動的波数 $q = 0.002\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ における）テンソル–スカラー比 $r_{0.002}$ とスカラー型摂動のパワースペクトルの冪 n_S への制限．内側と外側の等高線はそれぞれ 68% と 95% の信頼領域を表す．ポテンシャルが $\lambda\phi^4$ と $m^2\phi^2$ に比例する場合の理論予言値を $N = 50$ と 60 に対して示す（式（10.3.36）を見よ）．$r_{0.002} = 0, n_S = 1$ に対応する点はハリソン–ゼルドヴィッチスペクトルを表す．



$$\frac{d^2\mathcal{R}_q}{d\tau^2}+\frac{2}{z}\frac{dz}{d\tau}\frac{d\mathcal{R}_q}{d\tau}+q^2\mathcal{R}_q=0\ , \tag{10.3.1}$$

τ は共形微分で，z は，

$$z\equiv\frac{a\dot{\bar{\varphi}}}{H} \tag{10.3.2}$$

である．再び $\dot{H}=-4\pi G\dot{\bar{\varphi}}^2$ であることを考慮すれば，

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{d\tau}=aH(1+\delta+\varepsilon) \tag{10.3.3}$$

と書ける．ここで，一般のポテンシャルに対して以下の量を定義した．

$$\varepsilon\equiv-\dot{H}/H^2\ ,\qquad\delta\equiv\ddot{H}/2H\dot{H}\ . \tag{10.3.4}$$

任意の τ に対して aH を与える式も必要となるが，それには次の式を用いれば良い．

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{aH}\right)=-1+\varepsilon\ . \tag{10.3.5}$$

これらの式は（摂動1次の精度で）厳密な結果を与える．これから学ぶスローロール近似では，摂動が地平線を超える時期に ε，δ が小さいことを要請する．すると同時に，この時期の ε の変化が小さいことも要請される．

$$\dot{\varepsilon}=2\varepsilon\Big(\varepsilon+\delta\Big)H\ . \tag{10.3.6}$$

さらに，δ の変化も小さいと仮定する*2．（もちろん，指数関数型ポテンシャルの場合を除けば ε，δ は厳密に一定にはなれない．指数関数型ポテンシャルの場合には $H\propto 1/t$ より $\delta=-\varepsilon$ が得られる．）τ に依存しない積分定数を適当に選べば，式（10.3.5）の積分から以下を得る．

$$aH=-\frac{1}{(1-\varepsilon)\tau}\ . \tag{10.3.7}$$

---

*1 （280 ページ）ムハノフ–佐々木方程式は，以下の形に書かれることが多い．

$$\frac{d^2u_q}{d\tau^2}+\left[q^2-\frac{1}{z}\frac{d^2z}{d\tau^2}\right]u_q=0\ ,$$

ここで $u_q\equiv z\mathcal{R}_q$ である．しかし，z の1階微分しか計算しなくてよい分，式（10.3.1）の方が扱いやすい．

*2 この仮定は，冪乗型ポテンシャルの場合には，4.2 節で学んだスローロール近似の条件 $|\varphi|\gg 1/\sqrt{4\pi G}$ が成り立っていれば成り立つ．この仮定を置かない場合の計算は，S. Dodelson, E. D. Stewart, *Phys. Rev. D* **65**, 101301 (2002) [astro-ph/0109354] や E. D. Stewart, *Phys. Rev. D* **65**, 103508 (2002) [astro-ph/0110322] を見よ．

指数関数型ポテンシャルの場合と同様に τ は負で，その大きさはインフレーション早期には $-\tau \gg 1/q$ で，$q/aH \ll 1$ では $-\tau \ll 1/q$ となる．式（10.3.3）と（10.3.7）を式（10.3.1）に代入すれば，ε，δ に関して 1 次の精度で以下の式を得る．

$$\frac{d^2\mathcal{R}_q}{d\tau^2} - \frac{2(1+\delta+2\varepsilon)}{\tau}\frac{d\mathcal{R}_q}{d\tau} + q^2\mathcal{R}_q = 0\,, \qquad (10.3.8)$$

δ と ε が定数の場合のこの方程式の一般解は $\tau^\nu H_\nu^{(1)}(-q\tau)$ と $\tau^\nu H_\nu^{(2)}(-q\tau)$ の線形結合で書ける．ここで ν は，

$$\nu = \frac{3}{2} + 2\varepsilon + \delta\,. \qquad (10.3.9)$$

これは，式（10.1.51）で与えられる指数関数型ポテンシャルの結果と ε に関して 1 次の精度で合致している（指数関数型ポテンシャルでは $\delta = -\varepsilon$ であることに注意）．

スローロール近似は，宇宙膨張の始まりの時刻までずっと遡って成り立つような近似だとは考えていないし，実際，そのようなことを仮定する必要もない．なぜなら，q/aH が非常に大きければ，初期条件の式（10.1.38）はスローロールが始まる以前の時刻でも適用できるはずである．したがって，この初期条件により，スローロールの時期全体に渡る解が次のように決められる．

$$\mathcal{R}_q(t) = -\frac{\sqrt{-\pi\tau}}{2(2\pi)^{3/2}\,z(\tau)}e^{i\pi\nu/2+i\pi/4}H_\nu^{(1)}(-q\tau)\,. \qquad (10.3.10)$$

（ここで，式（10.3.3）と（10.3.7）より，スローロールの時期では $z(\tau) \propto \tau^{-\nu+1/2}$ となる．）すると，$q/aH \ll 1$ となるスローロールの後期では解（10.3.10）は以下の漸近的な値を持つ．

$$\mathcal{R}_q^o = i\frac{\sqrt{-\tau}\,\Gamma(\nu)}{2\sqrt{\pi}(2\pi)^{3/2}\,z(\tau)}e^{i\pi\nu/2+i\pi/4}\left(\frac{-q\tau}{2}\right)^{-\nu}\,. \qquad (10.3.11)$$

式（10.3.3），（10.3.7）より $z \propto \tau^{-\nu+1/2}$ なので，これは時間に関して一定である．$\mathcal{R}_q^o$ の q 依存性は以下で与えられる[*3]．

$$\mathcal{R}_q^o \propto q^{-\nu} = q^{-3/2-2\varepsilon-\delta}\,. \qquad (10.3.12)$$

[*3] E. D. Stewart, D. H. Lyth, *Phys. Lett. B* **302**, 171 (1993). スローロール近似の高次の計算は，A. R. Liddle, M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **50**, 758 (1994) によって行われた．レビューは J. E. Lidsey, A. R. Liddle, E. W. Kolb, E. J. Copeland, T. Barreiro, M. Abney, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 373 (1997) を見よ．

この結果は，指数関数型ポテンシャルの時の結果 $\mathcal{R}_q^o \propto q^{-3/2-\varepsilon}$ を $\delta \neq -\varepsilon$ の場合に一般化したものとみなせる．

$\mathcal{R}_q^o$ は時間に依らないので，式（10.3.11）の t は適当な時刻に選んで良い．そこで t を，10.1 節と 10.2 節で定義した，摂動が地平線を超える時刻 t_q,

$$q/a(t_q) = H(t_q) \tag{10.3.13}$$

に選ぶことにする．（しかし，式（10.3.10）で $t = t_q$ としても正しい値の $\mathcal{R}_q^o$ は得られ**ない**ことに注意しよう．）ε, δ 程度の大きさを持つ補正項を，冪に現れるものを除いて無視すれば，式（10.3.7）より，

$$\tau(t_q) = -\frac{1}{(1-\varepsilon)q} \simeq -\frac{1}{q} \tag{10.3.14}$$

を得る．また，$\dot{H} = -4\pi G\dot{\varphi}^2$ より，

$$\dot{\varphi}(t_q) = \pm\sqrt{-\dot{H}(t_q)}/\sqrt{4\pi G} = \pm H(t_q)\sqrt{\varepsilon(t_q)}/\sqrt{4\pi G}$$

であるから，

$$z(t_q) = \frac{\pm\sqrt{\varepsilon(t_q)}q}{H(t_q)\sqrt{4\pi G}} \tag{10.3.15}$$

を得る．以上より，スローロール近似の結果として以下の式が得られる[*4]．

$$\mathcal{R}_q^o = \mp i\frac{\sqrt{16\pi G}q^{-3/2}H(t_q)}{8\pi^{3/2}\sqrt{\varepsilon(t_q)}} . \tag{10.3.16}$$

これは，因子 $1/\sqrt{\varepsilon(t_q)}$ が $\mathcal{R}_q^o$ の q 依存性に寄与する以外は指数関数型ポテンシャルの結果の式（10.1.56）と同じである．（$H(t_q)$ と $\varepsilon(t_q)$ の q 依存性から $q^{-2\varepsilon-\delta}$ が得られることを確認するには，まず式（10.3.13）を q に関して微分する．

$$\frac{dt_q}{dq} = \frac{1}{a(t_q)\left(H^2(t_q) + \dot{H}(t_q)\right)} .$$

すると，

$$\frac{q}{H(t_q)}\frac{dH(t_q)}{dq} = \frac{\dot{H}(t_q)}{H^2(t_q) + \dot{H}(t_q)} = -\frac{\varepsilon(t_q)}{1-\varepsilon(t_q)}$$

[*4] S. W. Hawking, *Phys. Lett. B* **115**, 295 (1982); A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **117**, 175 (1982); A. Guth, S.-Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1110 (1982); J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **28**, 679 1983); D. H. Lyth, *Phys. Lett. B* **147**, 403 (1984); *B* **150**, 465 (1985); *Phys. Rev. D* **31**, 1792 (1985).

を得る．次に，式（10.3.6）より，

$$\frac{q}{\varepsilon(t_q)}\frac{d\varepsilon(t_q)}{dq}=\frac{2(\varepsilon(t_q)+\delta(t_q))}{1-\varepsilon(t_q)}$$

を得る．最後に，分母に現れる $1-\varepsilon$ を 1 に近似すれば $H(t_q)\propto q^{-\varepsilon}$，$\varepsilon(t_q)\propto q^{2\varepsilon+2\delta}$ となるので，結果として $H(t_q)/\sqrt{\varepsilon(t_q)}\propto q^{3/2-\nu}$ を得る．これで式（10.3.16）の q 依存性が式（10.3.12）で与えられることを確認できた.）

次に，スローロール近似をテンソル型摂動に適用しよう．一般に，テンソル型摂動の波動方程式（10.2.3）は以下のように書ける.

$$\frac{d^2\mathcal{D}_q}{d\tau^2}+2aH\frac{d\mathcal{D}_q}{d\tau}+q^2\mathcal{D}_q=0\,. \tag{10.3.17}$$

スローロールの時期では，式（10.3.7）を用いてこの式を以下の形に書き換えることができる.

$$\frac{d^2\mathcal{D}_q}{d\tau^2}-\frac{2}{(1-\varepsilon)\tau}\frac{d\mathcal{D}_q}{d\tau}+q^2\mathcal{D}_q=0\,. \tag{10.3.18}$$

ε が時間によらない場合の一般解は $\tau^\mu H^{(1)}_\mu(-q\tau)$ と $\tau^\mu H^{(2)}_\mu(-q\tau)$ の線形結合で書け，μ は以下で与えられる.

$$\mu=\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,. \tag{10.3.19}$$

式（10.2.7）で与えられる初期条件を満たすスローロール期の解は，

$$\mathcal{D}_q(t)=\frac{\sqrt{16\pi G}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q}a(t)}\sqrt{\frac{-q\tau\pi}{2}}\exp(i\mu\pi/2+i\pi/4)\,H^{(1)}_\mu(-q\tau) \tag{10.3.20}$$

と書ける（ここで，式（10.3.7）より $(\tau/a)da/d\tau=aH\tau=-1/(1-\varepsilon)$ を得るので $a\propto\tau^{-1/(1-\varepsilon)}$，したがって $\sqrt{-\tau}/a\propto\tau^\mu$）．これより $q/a\ll H$ での漸近解が以下のように得られる.

$$\mathcal{D}^o_q=-i\frac{\sqrt{16\pi G}\,\Gamma(\mu)\sqrt{-\tau}}{2\sqrt{\pi}(2\pi)^{3/2}a(t)}\exp(i\mu\pi/2+i\pi/4)\left(\frac{-q\tau}{2}\right)^{-\mu}\,. \tag{10.3.21}$$

$\mathcal{D}^o_q$ の q 依存性は以下で与えられる*3.

$$\mathcal{D}^o_q\propto q^{-\mu}\simeq q^{-3/2-\varepsilon}\,. \tag{10.3.22}$$

指数関数型ポテンシャルの場合とは異なり，テンソル型摂動の漸近解の q 依存性とスカラー型摂動の漸近解の q 依存性は一般的には一致しない.

式（10.3.21）で $t = t_q$ とすれば，より便利な $\mathcal{D}_q^o$ の表式が得られる．式（10.3.14）と $a(t_q) = q/H(t_q)$ を用い，さらに $H(t_q)$ の q 依存性を与える項以外の場所で $\varepsilon \to 0$ とすれば，式（10.3.21）は以下のように書き換えられる[*5]．

$$\mathcal{D}_q^o = i\frac{\sqrt{16\pi G}H(t_q)}{4\pi^{3/2}q^{3/2}} \,. \tag{10.3.23}$$

地平線の外側のテンソル型摂動とスカラー型摂動の振幅の 2 乗が持つ q 依存性は以下のようにパラメータ化されることが多い．

$$|\mathcal{D}_q^o|^2 \propto q^{-3+n_T(q)} \,, \qquad |\mathcal{R}_q^o|^2 \propto q^{-4+n_S(q)} \,. \tag{10.3.24}$$

スローロール近似では，式（10.3.12），（10.3.22）より，

$$n_T(q) = -2\varepsilon(t_q) \,, \qquad n_S(q) = 1 - 4\varepsilon(t_q) - 2\delta(t_q) \tag{10.3.25}$$

となる．（指数関数型ポテンシャルの場合は $\delta = -\varepsilon$ なので，式（10.3.25）より $n_S = 1 - 2\varepsilon$ が得られる．これは 10.1 節で導いた結果と合致する．）また，式（10.3.16）と（10.3.23）を比較すると，

$$r(q) = 16\varepsilon(t_q) = -8n_T(q) \tag{10.3.26}$$

という関係式を導くことができる．ここで，r は $r(q) \equiv 4|\mathcal{D}_q^o/\mathcal{R}_q^o|^2$ と定義される量を表す．観測可能量の間に成り立つこの関係式は，**スローロールの整合性条件**（slow-roll consistency condition）として知られている．指数関数型ポテンシャル以外の一般のポテンシャルでは，テンソル–スカラー比 r は q に依存する．

単一のインフラトン場によるインフレーションでは，関係式 $\dot{H} = -4\pi G\dot{\bar{\varphi}}^2$ より $\varepsilon(t)$ は常に正だから，式（10.3.25）より一般に $n_T(q) < 0$ であることがわかる．一方，$n_S(q)$ の値は 1 以上でも 1 以下でも良いが，経験的に[*6]，パラメータの微調整を必要としない物理的にもっともらしいポテンシャルを持つモデルは 1 より小さい（もっといえば，0.98 より小さい）$n_S(q)$ を与える傾向にある．しかし，スローロールインフレーションでは ε，δ は小さいから，$n_S(q)$ は 1 よりそんなに小さくはなれない．7.2 節で紹介した WMAP 衛星 3 年目の結果 $n_S = 0.958 \pm 0.016$ は，こうしたスローロールインフレーションの一般的な描像を支持している．

---

*5 A. A. Starobinsky, *JETP Lett.* **30**, 683 (1979).

*6 M. B. Hoffman, M. S. Turner, *Phys. Rev D* **64**, 023506 (2001); W. H. Kinney, *Phys. Rev. D* **66**, 083508 (2002); H. V. Peiris *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **1148**, 213 (2003); G. Efstathiou, K. J. Mack, *J. Cosm. Astropart. Phys.* **05**, 008 (2005); L. A. Boyle, P. J. Steinhardt, N. Turok, Phys. Rev. Lett. **96**, 111301 (2006).

7 章で学んだように，テンソル型摂動 $q^3|\mathcal{D}_q^o|^2$ とスカラー型摂動 $q^3|\mathcal{R}_q^o|^2$ は宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎの多重極展開係数に寄与する．式（10.3.26）より，テンソル型摂動の $C_{TT,\ell}$ の寄与はスカラー型摂動の寄与よりもずっと小さいことが読み取れる．また，宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎは小さいけれども観測できないほど小さいわけではないので，式（10.3.16）より，スローロールの時期のハッブル定数はプランク質量 $1/\sqrt{G}$ よりは小さいけれども極端に小さいわけではないことが示唆される．$\nu \simeq 3/2$ となるようなスローロールの極限では $|\mathcal{R}_q^o|^2 = |N|^2 q^{-3}$ と書けるので，式（10.3.16）より，

$$|N|^2 = \frac{16\pi G H^2_{\text{地平線超}}}{64\pi^3|\varepsilon_{\text{地平線超}}|} = \frac{(8\pi G)^2 \bar{\rho}_{\text{地平線超}}}{96\pi^3|\varepsilon_{\text{地平線超}}|} ,$$

を得る．ここで添字 "地平線超" は摂動が地平線を超える時刻を表し，またこの時刻が持つ q 依存性はスローロール近似に基づいて無視した．7.2 節で見たように因子 $|N|^2$ の値は $(1.93 \pm 0.12) \times 10^{-10}$ なので，次の結果を得る．

$$\frac{\bar{\rho}_{\text{地平線超}}}{|\varepsilon_{\text{地平線超}}|} = [(6.70 \pm 0.10) \times 10^{16}\ \text{GeV}]^4 . \tag{10.3.27}$$

これまでの宇宙マイクロ波背景放射異方性の測定はスカラー型摂動のスペクトルの冪には厳しい制限を与えたが，テンソル型摂動にはまだそれほど厳しい制限を与えていない．したがって $\delta + 2\varepsilon$ は制限されているが，ε は制限されていない．しかし，δ と 2ε が互いに相殺しあわない限りは，$|\varepsilon|$ が数パーセントを大きく超えるようなことはないように思われる．そこで，たとえば $|\varepsilon|_{\text{地平線超}} = 0.05$ としてみよう．すると $\bar{\rho}_{\text{地平線超}} \simeq [3.2 \times 10^{16}\ \text{GeV}]^4$ を得る．よって，インフレーション理論の枠組みによれば，（ゆらぎが地平線の内側に再び入る時刻以前の）宇宙論的なゆらぎの振幅が小さい理由は，ゆらぎが地平線の外側に出る時刻での宇宙のエネルギー密度に対応するエネルギースケールがプランクエネルギースケール $(8\pi G)^{-1/2} = 2.4 \times 10^{18}$ GeV よりも数桁小さいことによる．しかしその理由，つまり，インフレーション中のエネルギースケールがプランクエネルギースケールよりも数桁小さい理由は，依然として謎のままである．

この謎は，素粒子物理学に見られるもう 1 つの謎と酷似している．電弱相互作用と強い相互作用の結合定数が同じ値となる大統一理論のエネルギースケールは約 2×10^{16} GeV[*7]で，やはりプランクエネルギースケール $(8\pi G)^{-1/2}$ よりも数

[*7] QTF 第 3 巻の 28.2 節（邦訳『場の量子論 5 巻』，28.2 節）を見よ．

桁小さい．もしかしたらこれらの謎は同じものなのかもしれない．

既存の観測から得られた n_S と $|N|$ の測定値とテンソル–スカラー比 r の上限値より，インフラトン場のポテンシャルに対する制限を得ることができる．10.2 節で見たように，摂動が地平線を超える時刻に対応する場 $\bar{\varphi}(t)$ 近傍でのポテンシャル $V(\bar{\varphi})$ が指数関数型をしているインフレーションモデルは，現在の観測データからほぼ棄却されている．他のモデルについて調べるには，まず ε と δ をポテンシャルの関数として表すのが便利である．一般的な式（4.2.3），

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\bar{\varphi}}^2$$

とスローロールの式（4.2.8），

$$\dot{\varphi} = -\frac{V'(\varphi)}{3H} = -\frac{V'(\varphi)}{\sqrt{24\pi G V(\varphi)}}$$

より，

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{V'\big(\bar{\varphi}(t)\big)}{V\big(\bar{\varphi}(t)\big)}\right)^2 \tag{10.3.28}$$

を得る．次に，式（4.2.3）[訳注 1]の時間微分 $\ddot{H} = -8\pi G\dot{\bar{\varphi}}\ddot{\bar{\varphi}}$ と式（4.2.12）[訳注 2]より，

$$\delta(t) = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{V'^2\big(\bar{\varphi}(t)\big)}{V^2\big(\bar{\varphi}(t)\big)} - \frac{2V''\big(\bar{\varphi}(t)\big)}{V\big(\bar{\varphi}(t)\big)}\right) \tag{10.3.29}$$

を得る．たとえば，冪乗型ポテンシャル $V(\varphi) \propto \varphi^\alpha$ に対しては，

$$\varepsilon(t) = \frac{\alpha^2}{16\pi G\bar{\varphi}^2(t)}\,, \qquad \delta(t) = \frac{2\alpha - \alpha^2}{16\pi G\bar{\varphi}^2(t)} \tag{10.3.30}$$

なので $\delta(t) = (2/\alpha - 1)\varepsilon(t)$ を得る．したがって n_S の表式として以下の結果を得る．

$$n_S(q) = 1 - \frac{(\alpha + 2)r(q)}{8\alpha}\,. \tag{10.3.31}$$

観測から得られる n_S の制限は r の値に応じて変わるので，観測からは n_S と r

訳注 1 $\dot{H} = -4\pi G\dot{\varphi}^2$.

訳注 2 $\ddot{\varphi} = -\dfrac{V''(\varphi)\dot{\varphi}}{3H} + \dfrac{V'(\varphi)\dot{H}}{3H^2} = \dfrac{V''(\varphi)V'(\varphi)}{9H^2} - \dfrac{V'^3}{48\pi G V^2}$.

で張られる平面上のパラメータ空間への制限が得られる*8．現在のところ，式（10.3.31）で与えられる直線は 4 より小さい正の α に対し，WMAP 衛星の 3 年目のデータと CBI 実験や VSA 実験から得られたマイクロ波背景放射のデータを組み合わせたものや，スローン・デジタル・スカイサーベイや 2dF 銀河サーベイのデータを組み合わせたものから得られた（68%の信頼領域に相当する）許容範囲に収まっている．小さな α の方がデータとより良く適合しているので，観測から許されるパラメータの範囲がせばまるにつれ，大きな値の α は棄却されていくだろう．

さらにモデルを制限するには，摂動が地平線を超える時刻でのスカラー場の値について考える必要がある．スカラー場の値が φ_1 から φ_2 に変化する間はスローロール近似が成り立つならば，ロバートソン–ウォーカースケール因子の自然対数の変化量 $\Delta\mathcal{N}$ は式（4.2.14）訳注 3から以下のように求められる．

$$\Delta\mathcal{N} = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{8\pi G V(\varphi)}{V'(\varphi)}\right) d\varphi \,. \tag{10.3.32}$$

もし φ が φ_1 から φ_2 に変化する間は $|V'/V| \simeq \sqrt{16\pi G\varepsilon}$ がほぼ一定ならば，φ が変化する間のロバートソン–ウォーカースケール因子の自然対数の変化量は，

$$\Delta\mathcal{N} = \Delta\varphi\sqrt{4\pi G/\varepsilon} \tag{10.3.33}$$

で与えられる．ライス*9は，$\ell \simeq 1$，$\ell \simeq 100$ に対応する波数の摂動がそれぞれ地平線を超えた時刻に対応する場の値 φ_1，φ_2 の差を考え，$\Delta\mathcal{N} = \ln 100 = 4.6$ より，もしテンソル型摂動が観測可能なくらい ε の値が大きければ，スカラー場は少なくともプランクスケール $1/\sqrt{4\pi G}$ くらいの量だけ変化しなくてはいけないことを示した．

もし，ε は一定ではないが，摂動が地平線の外側に出る時刻からインフーレションが終わる時刻までずっとスローロール近似が成り立つという強い仮定を置けば，冪乗型ポテンシャル $V(\varphi) \propto \varphi^\alpha$ に対し，式（10.3.32）を用いて波数 q の

---

*8 D. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 377 (2007) [astro-ph/0603449] の図 14 を見よ（280 ページの脚注 1，訳注 1 を参照）．

訳注 3 $\dfrac{a(t_2)}{a(t_1)} = \exp\left[\int_{t_1}^{t_2} H dt\right] = \exp\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \dfrac{H\,d\varphi}{\dot\varphi}\right] \simeq \exp\left[-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\dfrac{8\pi G V(\varphi)}{V'(\varphi)}\right) d\varphi\right]$．

*9 D. H. Lyth, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1861 (1997) [hep-ph/9606387]. G. Efstathiou, K. J. Mack, *J. Cosm. & Astropart. Phys.* **05**, 008 (2005) [astro-ph/0503360] や R. Easther, W. H. Kinney, B. A. Powell, *J. Cosm. Astropart. Phys.* **08**, 004 (2006) [astro-ph/0601276] も見よ．

摂動が地平線を超えた時刻からインフレーションが終わる時刻までのロバートソン–ウォーカースケール因子の自然対数を求めることができる.

$$\mathcal{N}(q) = \frac{4\pi G}{\alpha}\left[\bar{\varphi}^2(t_q) - \bar{\varphi}^2(t_{終})\right], \tag{10.3.34}$$

ここで t_q は摂動が地平線を超える時刻，$t_{終}$ はインフレーションが終わる時刻を表す．さらに $|\bar{\varphi}(t_{終})| \ll |\bar{\varphi}(t_q)|$ を仮定すれば,

$$\bar{\varphi}^2(t_q) \simeq \frac{\alpha\mathcal{N}(q)}{4\pi G} \tag{10.3.35}$$

を得るので，式（10.3.30）より,

$$\varepsilon(t_q) \simeq \frac{\alpha}{4\mathcal{N}(q)}, \qquad \delta(t_q) \simeq \frac{2-\alpha}{4\mathcal{N}(q)},$$

したがって,

$$n_S(q) \simeq 1 - \frac{\alpha+2}{2\mathcal{N}(q)}, \qquad r(q) = \frac{4\alpha}{\mathcal{N}(q)} \tag{10.3.36}$$

を得る[*10]．10.1 節で見たように，放射優勢期が始まる時刻での宇宙のエネルギー密度がプランクエネルギー密度と等しければ，ちょうど現在時刻に地平線の内側に入ってくる摂動の波数に対しては $\mathcal{N}(q) \simeq 68$ で，より大きな波数に対する $\mathcal{N}(q)$ の値は小さくなる．たとえば，$\ell = 100$ に対応する波数に対しては $\mathcal{N}(q)$ の値は $\ln 100 = 4.6$ だけ小さい．より正確に $\mathcal{N}$ を評価するにはエネルギー密度として式（10.3.27）を用いれば良い．一方，危険な仮定ではあるが，放射優勢期が始まる時刻での宇宙のエネルギー密度 ρ_1 と，摂動が地平線を超える時刻でのエネルギー密度が等しいとすれば，$\varepsilon = O(0.02)$ に対して $\rho_1 \simeq [2.5 \times 10^{16}\ \mathrm{GeV}]^4$ を得る．よって，式（10.1.43）と $h = 0.7$ より，ちょうど現在時刻に地平線の内側に入ってくる摂動の波数に対しては $\mathcal{N} \simeq 62$，$\ell \simeq 100$ に対応する波数に対しては $\mathcal{N} \simeq 57$ が得られる．ポテンシャルが場の 2 乗の場合，$\mathcal{N} = 60$ に対して式（10.3.36）から $n_S = 0.97$ と $r = 0.13$ が得られ，これは WMAP 衛星の 3 年目のデータと無矛盾である．一方，ポテンシャルが場の 4 乗の場合は式（10.3.36）から $n_S = 0.95$ と $r = 0.26$ が得られ，これは WMAP データの許容範囲外になる[*11]．$\alpha > 4$ を持つ冪乗型ポテンシャルは棄却されるが，この結論は，摂動が地平線を出る時刻からインフレーションが終わる時刻までの全期間に渡ってポテン

[*10] D. H. Lyth, A. Riotto, *Phys. Rep.* **314**, 1 (1999).

[*11] D. Spergel *et al.*，脚注 8 を参照.

シャルが $V(\bar{\varphi}(t)) \propto \bar{\varphi}^{\alpha}(t)$ で与えられ，スローロールが成り立つという仮定に基づいている点に十分注意しよう．

10.4 多重場インフレーション

宇宙マイクロ波背景放射と宇宙の大規模構造の観測より，地平線の外側でのスカラー型の原始ゆらぎは以下の性質を満たすことがわかっている．

- ガウス統計にほぼ従い，
- 断熱的で，
- $\mathcal{R}_q^o$ が $q^{-3/2}$ にほぼ比例するという意味でほぼスケール不変で，
- $q^{3/2}\mathcal{R}_q^o \ll 1$ という意味で小さい（7.2 節で学んだように，$q^{3/2}\mathcal{R}_q^o$ は 10^{-5} 程度の大きさ）．

10.1 節と 10.3 節で学んだように，原始スカラー型ゆらぎのこれらの性質は，以下の仮定から導くことができる．

（1）**インフレーション中の宇宙のエネルギー密度は，単一の実スカラー場「インフラトン」からの寄与が大半を占める．**これは，インフレーション中のゆらぎが断熱的であることを意味する．インフレーション中にゆらぎが断熱的であれば，その後も断熱的であり続ける．

（2）**ゆらぎが地平線の外側に出る時期（たとえば q/aH が 10 から 0.1 まで変化する時期）では H は十分小さく，したがって q/a の値は（大統一理論のエネルギースケールやプランクエネルギースケールといった）インフレーション理論の背後にある何らかの基本的なエネルギースケールよりも小さい．さらに，これはゆらぎが地平線の外側に出る時期のみだけでなく，それ以前の短い期間においても成り立つ**（10.1 節で考慮した例では $H \approx 10^{14}$GeV と見積もったが，これは十分小さい値といえる）．よって，この時期のスカラー場は時空微分の数が 2 個を超えない単純な実効的作用で記述できる．すると，摂動が地平線を超える以前の時期にはインフラトン場は自由場のように振る舞うので，インフラトン場のゆらぎはガウス統計に従う．

（3）**観測されるゆらぎが地平線の外側に出る時期ではインフレーションは $|\dot{H}|/H^2 \ll 1$，$|\ddot{H}/H\dot{H}| \ll 1$ を満たすという意味で「スローロール」であった．**この仮定と仮定（1），仮定（2）より，ゆらぎがほぼスケール不変であることが

導かれる.

しかし，インフレーション中のエネルギー密度が**単一の**スカラー場によって支配されると考えなくてはいけない理由はないので，必然的に複数のインフラトン場 $\varphi^n(x)$ を含む場合を考えることになる．本節では，仮定（2）と仮定（3）を保持しつつ，仮定（1）を以下の仮定に置き換えれば，単一スカラー場の場合と同じ原始スカラー型ゆらぎの性質が得られることを示す.

（1′）　**スカラー場が持つすべてのエネルギーはインフレーション終了時に通常の物質と放射に転化され，局所的に熱平衡状態となり，かつすべての化学ポテンシャルはゼロとなる**（3.3 節で議論したように，バリオン数やレプトン数はこれよりも後の時期に生成される必要がある）.

スカラー場がいくつあろうと，仮定（2）が成り立っている限り，摂動が地平線の外側に出る時刻とそれ以降の時期（およびそれ以前の短い時期）におけるスカラー場の実効的作用は，時空微分の数が最も少ない項が支配的となる．そのような場合，任意の数のスカラー場を持つ最も一般的な作用は以下の形をとる.

$$I_\varphi = \int d^4x \sqrt{-\mathrm{Det}g}\left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\gamma_{nm}(\varphi)\frac{\partial\varphi^n}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi^m}{\partial x^\nu} - V(\varphi)\right] , \qquad (10.4.1)$$

ここで，ポテンシャル $V(\varphi)$ は任意の実関数を表す．スカラー場の添字で重複するものに関して和をとり，任意の正定値実対称行列 $\gamma_{nm}(\varphi)$ は**場の計量**と呼ぶことにする（この行列が正定値でなくてはならないのは，場とその時間微分の交換関係に正しい符号を与えるためである）．重力場源となるエネルギー–運動量テンソルは，付録 B で述べる方法に従い，式（10.4.1）で与えられる作用から以下のように導くことができる.

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\gamma_{nm}(\varphi)\frac{\partial\varphi^n}{\partial x^\rho}\frac{\partial\varphi^m}{\partial x^\sigma} - V(\varphi)\right] + \gamma_{nm}(\varphi)\frac{\partial\varphi^n}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi^m}{\partial x^\nu} . \qquad (10.4.2)$$

スカラー場の方程式は変分原理，すなわち，微小なスカラー場の変化に対して I_φ が不変であることから求められ，オイラー–ラグランジュ方程式の形をとる.

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-\mathrm{Det}g}\, g^{\mu\nu}\gamma_{nm}(\varphi)\frac{\partial\varphi^m}{\partial x^\nu}\right) = \sqrt{-\mathrm{Det}g}$$
$$\times\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\gamma_{lm}(\varphi)}{\partial\varphi^n}\frac{\partial\varphi^l}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi^n}{\partial x^\nu} + \frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi^n}\right) . \qquad (10.4.3)$$

各々のスカラー場 $\varphi^n(x)$ を，時間のみに依存する摂動を含まない項 $\bar\varphi^n(t)$ と小

さな摂動項 $\delta\varphi^n(\boldsymbol{x},t)$ の和で書こう．

$$\varphi^n(\boldsymbol{x},t) = \bar{\varphi}^n(t) + \delta\varphi^n(\boldsymbol{x},t) \,. \tag{10.4.4}$$

また，5〜8 章で行ったように，計量も摂動を含まないロバートソン–ウォーカー計量 $\bar{g}_{\mu\nu}(t)$（ただし $K=0$ とする）と小さな摂動 $h_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)$ の和で書く．

$$g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + h_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t) \,. \tag{10.4.5}$$

摂動を含まないエネルギー–運動量テンソルは式（5.1.35）で与えられる完全流体の形をしており，摂動を含まないエネルギー密度，圧力，および速度はそれぞれ以下で与えられる．

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}\gamma_{nm}(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^n\dot{\bar{\varphi}}^m + V(\bar{\varphi}) \,, \tag{10.4.6}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2}\gamma_{nm}(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^n\dot{\bar{\varphi}}^m - V(\bar{\varphi}) \,, \tag{10.4.7}$$

$$\bar{u}^0 = 1 \,, \quad \bar{u}^i = 0 \,. \tag{10.4.8}$$

摂動を含まないスカラー場に対する場の方程式（10.4.3）は，

$$\ddot{\bar{\varphi}}^n + \gamma^n_{ml}(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^m\dot{\bar{\varphi}}^l + 3H\dot{\bar{\varphi}}^n + \gamma^{nm}(\bar{\varphi})\frac{\partial V(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^m} = 0 \tag{10.4.9}$$

となる．γ^{nm} は行列 γ_{nm} の逆行列で，γ^n_{ml} は場の空間で定義されるアフィン接続である．

$$\gamma^n_{ml}(\bar{\varphi}) = \frac{1}{2}\gamma^{nk}(\bar{\varphi})\left(\frac{\partial\gamma_{km}(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^l} + \frac{\partial\gamma_{kl}(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^m} - \frac{\partial\gamma_{ml}(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^k}\right) . \tag{10.4.10}$$

また，H は $H \equiv \dot{a}/a = \sqrt{8\pi G\bar{\rho}/3}$ で定義される宇宙の膨張率を表す．式（10.4.6），（10.4.7）を用いれば，式（10.4.9）がエネルギー保存の式 $\dot{\bar{\rho}} = -3H(\bar{\rho}+\bar{p})$ を満たすことを確認できる．式（10.4.6）と式（10.4.9）から以下の便利な式が得られる．

$$\dot{H} = -4\pi G\gamma_{nm}(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^n\dot{\bar{\varphi}}^m \,. \tag{10.4.11}$$

スカラー場が複数個ある場合の $T_{\mu\nu}$ は，すべての次数の摂動を含めた場合，式（5.1.35）で与えられる完全流体の形で書くことはできない．しかし，式（10.4.2）の摂動 1 次の項と式（5.1.39）–（5.1.41）を比べれば，摂動 1 次では非等方ストレスは消え，エネルギー密度，圧力，速度ポテンシャルの摂動は以下で書けることがわかる．

$$\delta\rho = \gamma_{nm}(\bar\varphi)\dot{\bar\varphi}^n\delta\dot\varphi^m + \frac{1}{2}\dot{\bar\varphi}^n\dot{\bar\varphi}^m\frac{\partial\gamma_{nm}(\bar\varphi)}{\partial\bar\varphi^k}\delta\varphi^k + \frac{\partial V(\bar\varphi)}{\partial\bar\varphi^n}\delta\varphi^n + \frac{1}{2}h_{00}\gamma_{nm}(\bar\varphi)\dot{\bar\varphi}^n\dot{\bar\varphi}^m\ , \tag{10.4.12}$$

$$\delta p = \gamma_{nm}(\bar\varphi)\dot{\bar\varphi}^n\delta\dot\varphi^m + \frac{1}{2}\dot{\bar\varphi}^n\dot{\bar\varphi}^m\frac{\partial\gamma_{nm}(\bar\varphi)}{\partial\bar\varphi^k}\delta\varphi^k - \frac{\partial V(\bar\varphi)}{\partial\bar\varphi^n}\delta\varphi^n + \frac{1}{2}h_{00}\gamma_{nm}(\bar\varphi)\dot{\bar\varphi}^n\dot{\bar\varphi}^m\ , \tag{10.4.13}$$

$$\delta u = -\frac{\gamma_{nm}(\bar\varphi)\dot{\bar\varphi}^n\delta\varphi^m}{\gamma_{kl}(\bar\varphi)\dot{\bar\varphi}^k\dot{\bar\varphi}^l}\ . \tag{10.4.14}$$

これらの式は，$\gamma_{11}=1$ のときに単一スカラー場の場合の式（10.1.9)–(10.1.11）に帰着することを確認しておこう．

摂動 1 次では非等方ストレスが消えるので，ニュートンゲージでは $\Phi=\Psi$，すなわち $h_{00}=-2\Psi$ となるから，アインシュタインの場の方程式（5.3.21）は以下の形になる．

$$\dot\Psi + H\Psi = 4\pi G\,\gamma_{nm}(\bar\varphi)\dot{\bar\varphi}^n\,\delta\varphi^m. \tag{10.4.15}$$

場の方程式（10.4.3）の摂動 1 次の項は，スカラー場の再定義 $\varphi^n \to \varphi'^n(\varphi)$ に対する変数の変換性が明らかとなる記号を用いて簡単化できる．この変換に対し，$\dot{\bar\varphi}^n$，$\delta\varphi^n$ といった量は，

$$\delta\varphi'^n = \frac{\partial\bar\varphi'^n}{\partial\bar\varphi^m}\delta\varphi^m\ , \qquad \dot{\bar\varphi}'^n = \frac{\partial\bar\varphi'^n}{\partial\bar\varphi^m}\dot{\bar\varphi}^m \tag{10.4.16}$$

のように反変ベクトルとして変換される．このように変換する任意のベクトル v^n に対して，その変化量もベクトルとして変換するように定義できる．

$$\frac{D}{Dt}v^n \equiv \frac{\partial}{\partial t}v^n + \gamma^n_{lm}(\bar\varphi)\,\dot{\bar v}^l v^m\ . \tag{10.4.17}$$

この記号を用いれば，場の方程式（10.4.3）の摂動 1 次の項は以下のように書ける．

$$\frac{D^2}{Dt^2}\delta\varphi^n + 3H\frac{D}{Dt}\delta\varphi^n + \gamma^{nm}(\bar\varphi)\frac{\partial^2 V(\bar\varphi)}{\partial\bar\varphi^m\,\partial\bar\varphi^l}\,\delta\varphi^l - \left(\frac{\nabla^2}{a^2}\right)\delta\varphi^n = -2\gamma^{nm}(\bar\varphi)\,\Psi\,\frac{\partial V(\bar\varphi)}{\partial\bar\varphi^m} + 4\dot\Psi\,\dot{\bar\varphi}^n + \gamma^n{}_{lmk}(\bar\varphi)\,\dot{\bar\varphi}^l\dot{\bar\varphi}^m\delta\varphi^k\ , \tag{10.4.18}$$

ここで，$\gamma^n{}_{lmk}(\bar\varphi)$ は場の空間におけるリーマン–クリストッフェルテンソルである．

$$\gamma^n{}_{lmk}(\bar\varphi) \equiv \frac{\partial \gamma^n_{ml}(\bar\varphi)}{\partial \bar\varphi^k} - \frac{\partial \gamma^n_{mk}(\bar\varphi)}{\partial \bar\varphi^l} + \gamma^r_{lm}(\bar\varphi)\gamma^n_{kr}(\bar\varphi) - \gamma^r_{lk}(\bar\varphi)\gamma^n_{mr}(\bar\varphi)\,. \qquad (10.4.19)$$

（スカラー場を再定義することで $\gamma_{nm} = \delta_{nm}$ とできるのは $\gamma^n{}_{lmk} = 0$ である場合に限られる．本節ではそのような仮定は置かない.）また，束縛条件の式（5.3.26）は以下のように書ける．

$$\left(\dot H - \frac{\nabla^2}{a^2}\right)\Psi = 4\pi G \gamma_{nm}(\bar\varphi)\Big(-\dot{\bar\varphi}^n \frac{D}{Dt}\delta\varphi^m + \delta\varphi^m \frac{D}{Dt}\dot{\bar\varphi}^n\Big)\,. \qquad (10.4.20)$$

これらの式の解は平面波の重ね合わせで書ける．

$$\delta\varphi^n(\boldsymbol{x},t) = \sum_N \int d^3q \left[\delta\varphi^n_{Nq}(t) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha(\boldsymbol{q},N) + \delta\varphi^{n*}_{Nq}(t) e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha^*(\boldsymbol{q},N)\right], \qquad (10.4.21)$$

$$\Psi(\boldsymbol{x},t) = \sum_N \int d^3q \left[\Psi_{Nq}(t) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha(\boldsymbol{q},N) + \Psi^*_{Nq}(t) e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha^*(\boldsymbol{q},N)\right]. \qquad (10.4.22)$$

式（10.4.15），（10.4.18），（10.4.20）の ∇^2 を $-q^2$ に置き換えたものからなる連立方程式の解のそれぞれを，添字 N で区別することにしよう．

$$\dot\Psi_{Nq} + H\Psi_{Nq} = 4\pi G\,\gamma_{nm}(\bar\varphi)\dot{\bar\varphi}^n\,\delta\varphi^m_{Nq}\,, \qquad (10.4.23)$$

$$\frac{D^2}{Dt^2}\delta\varphi^n_{Nq} + 3H\frac{D}{Dt}\delta\varphi^n_{Nq} + \gamma^{nm}(\bar\varphi)\frac{\partial^2 V(\bar\varphi)}{\partial\bar\varphi^m\,\partial\bar\varphi^l}\,\delta\varphi^l_{Nq} + \left(\frac{q^2}{a^2}\right)\delta\varphi^n_{Nq}$$
$$= -2\gamma^{nm}(\bar\varphi)\,\Psi_{Nq}\,\frac{\partial V(\bar\varphi)}{\partial\bar\varphi^m} + 4\,\dot\Psi_{Nq}\,\dot{\bar\varphi}^n + \gamma^n{}_{lmk}(\bar\varphi)\,\dot{\bar\varphi}^l\dot{\bar\varphi}^m\delta\varphi^k_{Nq}, \qquad (10.4.24)$$

$$\left(\dot H + \frac{q^2}{a^2}\right)\Psi_{Nq} = 4\pi G\gamma_{nm}(\bar\varphi)\Big(-\dot{\bar\varphi}^n\frac{D}{Dt}\delta\varphi^m_{Nq} + \delta\varphi^m_{Nq}\frac{D}{Dt}\dot{\bar\varphi}^n\Big). \qquad (10.4.25)$$

各スカラー場に対して 2 階の微分方程式が 1 本あり，Ψ に対して 1 階の微分方程式が 1 本ある．よって，1 階微分に対する束縛条件の式を用いれば，独立な解の数はスカラー場の数の 2 倍となる．$(\delta\varphi^n_{Nq}, \Psi_{Nq})$ と $(\delta\varphi^{n*}_{Nq}, \Psi^*_{Nq})$ はすべて独立解であるから，添字 N が取り得る値の個数は添字 n が取り得る値の個数と等しい．

式（10.4.23）–（10.4.25）の初期条件を求め，式（10.4.21），（10.4.22）に現れる演算子 $\alpha(\boldsymbol{q})$，$\alpha^*(\boldsymbol{q})$ の交換関係を求めるため，ゆらぎが地平線の外側へ出始める時刻以前には $q/a \gg H$ であり，かつ q^2/a^2 が行列 $\partial^2 V/\partial\bar\varphi^n\partial\bar\varphi^m$ のどの要素よりもずっと大きくなる時期があることに着目しよう．すると，ゆらぎが地平線の外側へ出る時刻以前の解は WKB 近似の形で書ける．

$$\delta\varphi^n_{Nq}(t) \longrightarrow f^n_{Nq}(t)\,\exp\left(-iq\int_{t_1}^{t}\frac{dt'}{a(t')}\right),$$
$$\Psi_{Nq}(t) \longrightarrow g_{Nq}(t)\,\exp\left(-iq\int_{t_1}^{t}\frac{dt'}{a(t')}\right), \tag{10.4.26}$$

ここで $f^n_{Nq}(t)$ と $g_{Nq}(t)$ は指数関数の引数よりもずっとゆっくり変化し，t_1 は任意定数を表す．q/a が大きい極限で式（10.4.23），(10.4.25）を同時に満たすには，$f^n_{Nq}(t)$ と $g_{Nq}(t)$ を次のように選べば良い．

$$g_{Nq} = \frac{4i\pi Ga}{q}\gamma_{nm}(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^n f^m_{Nq}\,. \tag{10.4.27}$$

すると，式（10.4.24）の q/a に関する 1 次の項から以下の式が得られる．

$$\frac{D}{Dt}f^n_{Nq} + Hf^n_{Nq} = 0\,. \tag{10.4.28}$$

これを解くには，$\gamma^{nm}\Big(\bar{\varphi}(t)\Big)$ は正定値であるから多脚場（vielbein）ベクトル $e^n_N(t)$（N が取り得る値の数は n が取り得る値の数と等しい）を用いて以下のように書けることに着目する．

$$\gamma^{nm}\Big(\bar{\varphi}(t)\Big) = \sum_N e^n_N(t)e^m_N(t)\,. \tag{10.4.29}$$

これらの多脚場は平行移動の式[*1]，

$$\frac{D}{Dt}e^n_{Nq} = 0 \tag{10.4.30}$$

を満たすように選ぶことができる．したがって，式（10.4.28）の解は，

$$f^n_{Nq}(t) \propto a^{-1}(t)e^n_N(t) \tag{10.4.31}$$

と書ける．これらの解が $q/a \gg H$ において，

$$f^n_{Nq} = (2\pi)^{-3/2}(2q)^{-1/2}a^{-1}e^n_N$$

[*1] ベクトル $e^n_{Nq}(t)$ が 1 次の微分方程式（10.4.30）を満たし，かつ初期条件としてある時刻 $t = t_1$ に式（10.4.29）を満たすように定義する．すると式（10.4.30）と定義式（10.4.10）より，すべての時刻で，

$$\dot{D}^n_m = \left[-\gamma^n_{lk}D^k_m + \gamma^k_{lm}D^n_k\right]\dot{\bar{\varphi}}^l\,,$$

$$D^n_m \equiv \sum_N e^n_N e^k_N \gamma_{km}$$

となることが導ける．この D^n_m の微分方程式は $D^n_m = \delta^n_m$ を解に持つが，初期条件より時刻 $t = t_1$ でも $D^n_m = \delta^n_m$ であるから，これはすべての時刻で成り立つ解である．このようにして定義されたベクトル $e^n_{Nq}(t)$ は，多脚場の満たすべき条件式（10.4.29）をすべての時刻において満たす．

となるように規格化しよう（その理由はすぐに説明する）．この規格化を用いれば，ゆらぎが地平線の外側に出始める頃の解は以下のように書ける[*2]．

$$\delta\varphi^n_{Nq}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}a(t)\sqrt{2q}}e^n_N(t)\exp\left(-iq\int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')}\right) , \tag{10.4.32}$$

$$\Psi_{Nq}(t) = \frac{4i\pi G\gamma_{nm}(\bar\varphi)e^m_N(t)\dot{\bar\varphi}^n(t)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q^3}}\exp\left(-iq\int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')}\right) . \tag{10.4.33}$$

$q/a \gg H$ が成り立つくらい十分早期における φ^n の交換関係は，式（10.4.1）の作用において Ψ を無視することで得られる．

$$[\varphi^n(\boldsymbol{x},t), \varphi^m(\boldsymbol{y},t)] = 0 ,$$
$$[\varphi^n(\boldsymbol{x},t), \dot\varphi^m(\boldsymbol{y},t)] = ia^{-3}(t)\,\gamma^{nm}\Big(\bar\varphi(t)\Big)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$

解の規格化条件を式（10.4.32）のように選んだので，式（10.4.21），(10.4.22）の時間に依存しない演算子係数は以下の交換関係を満たす．

$$\Big[\alpha(\boldsymbol{q},N)\,,\,\alpha(\boldsymbol{q}',N')\Big] = 0\,, \quad \Big[\alpha(\boldsymbol{q},N)\,,\,\alpha^*(\boldsymbol{q}',N')\Big] = \delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\delta_{NN'}\,. \tag{10.4.34}$$

ゆらぎが地平線の外側に出る時期以前に宇宙の状態が $\alpha(\boldsymbol{q},N)|0\rangle = 0$ を満たすバンチ–デイヴィス真空 $|0\rangle$ に遷移するのに十分な時間があったとすれば，式（10.4.21），(10.4.22）より，観測される摂動が単一スカラー場の場合と同様に**ガウス統計に従う**ことが示される．

仮定（3）によれば，q/a が H よりも少し大きな値（たとえば $10H$）から少し小さな値（たとえば $0.1H$）に変化する期間において，スカラー場はポテンシャル上をゆっくりと転がり落ちる．ここで，式（10.4.23）–(10.4.25）の $\dot{\bar\varphi}^n_N$ や $\ddot{\bar\varphi}^n_N$ に比例する項，および式（10.4.24）のポテンシャルの 2 階微分の項が無視できるくらい $V(\varphi)$ が平坦であると仮定しよう．すると，ゆらぎが地平線の外側に出る時期には式（10.4.24）は近似的に以下の形になる．

$$\delta\ddot\varphi^n_{Nq} + 3H\delta\dot\varphi^n_{Nq} + \left(\frac{q^2}{a^2}\right)\delta\varphi^n_{Nq} = 0\,. \tag{10.4.35}$$

[*2] 式（10.4.32）と等価な結果は，H.-C. Lee, M. Sasaki, E. D. Stewart, T. Tanaka, S. Yokoyama, *J. Cosm. & Astropart. Phys.* **0510**, 004 (2005) [astro-ph/0506262] の式（4.4）に与えられている．彼らは，M. Sasaki, E. D. Stewart, Prog. Theor. Phys. **95**, 71 (1996) [astro-ph/9507001] によって考案された「δN 形式」と呼ばれる手法を用いてこの結果を導いた．しかし，彼らの論文は本節の式（10.4.41）で与える結論は導いていない．

この時期の H はほぼ一定なので[*3]，式（10.4.35）の独立解は $(1+iq\tau)\exp(-iq\tau)$ とその複素共役に比例する．ここで，共形時間 τ は以下で与えられる．

$$\tau = \int_\infty^t \frac{dt'}{a(t')} \simeq -\frac{1}{Ha(t)}\ .$$

ゆらぎが地平線の外側に出始める頃のスカラー場の摂動は式（10.4.32）で与えられるから，ゆらぎが地平線の外側に出る時期の解は，

$$\delta\varphi^n_{Nq} \simeq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q}}\left(\frac{1}{a}+\frac{iH}{q}\right)e^{+iq/aH}e^n_N\ , \qquad (10.4.36)$$

で与えられる．ゆらぎが地平線の外側に出終わる頃には $q/a \ll H$ となるから，スカラー場の摂動は以下の値に近づく．

$$\delta\varphi^n_{Nq} \longrightarrow \frac{iH}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q^3}}e^n_N\ . \qquad (10.4.37)$$

H と e^n_N はともにゆっくり変化するのでそれらの値はゆらぎが地平線の外側に出る時刻で計算でき，q に弱く依存する．

インフラトン場のエネルギーは最終的には通常の物質や放射に転化されなければいけないから，ゆらぎが地平線の外側に出る時期の後には，スローロール近似の条件が破れる時期が必ず訪れる．式（10.4.24）の左辺のポテンシャルを含む項はもはや無視できず，計算は複雑化する．しかし，ひとたび q/a が H より小さくなってしまえばその後のスカラー場の（インフレーション中の）進化は q に依存できないので，ゆらぎが再び地平線の内側に入るまではすべてのスカラー場の摂動 $\delta\varphi^n_{Nq}$ は同じ波数依存性を持つ．この波数依存性は，ゆらぎが地平線の外側に出終わる時期の解を与える式（10.4.37）に見られる $q^{-3/2}$ に近い．同じことが計量のスカラー型摂動にもあてはまる．a が $q^2/a^2 \ll |\dot{H}|$ を満たすほど十分大きければ，式（10.4.25）より Ψ_{Nq} は近似的に $q^{-3/2}$ に比例する．

一般には，これらの結果と宇宙マイクロ波背景放射や宇宙の大規模構造で観測されるゆらぎを結びつけるのは容易ではない．しかし，重要な結論が得られる場合が1つだけある．仮定（1′）に基づき，インフレーション終了時にすべてのスカラー場のエネルギーが通常の物質や放射に転化して局所的な熱平衡状態になり，その際に電荷のような保存量の密度がすべてゼロであるとしよう．すると，5.4 節

[*3] ゆらぎが地平線の外側へ出る時期の H の変化の割合は，$|\dot{H}/H| \times \ln(100)/H$ で，これは $|\dot{H}|/H^2 \ll 1/\ln(100) = 0.22$ であれば小さい．

で述べたように摂動は断熱的となり，$\mathcal{R}_q$ は後に地平線の内側に入るまでは定数 $\mathcal{R}_q^o$ となる．小さなゆらぎに対しては，$\mathcal{R}_q^o$ は摂動量 $\delta\varphi_{Nq}^n$，Ψ_{Nq} が地平線の外側に出終わる頃に持つ値の線形結合で書ける．一般的には，この線形結合の係数はインフレーションの終了時刻まで場が転がったポテンシャルの形，あるいは場のエネルギーが物質や放射に転化する機構に依存するため，未知のものである．しかし，摂動が地平線の外側に出る時期が終われば摂動は地平線の十分外側にあるので，これらの係数は波数に依存しないはずである．よって，この場合 $\mathcal{R}_q^o$ は $\delta\varphi_{Nq}^n$ や Ψ_{Nq} が地平線の外側に出終わる頃に持つ波数依存性と同じ波数依存性を持つと結論できる．スローロールインフレーションであれば，波数依存性はほぼ $q^{-3/2}$ で与えられる．

波数依存性 $q^{-3/2}$ が普遍的である理由は，以下の一般的な議論を用いて理解できる．共動座標ベクトル $\boldsymbol{x}$ の規格化を変える変換 $\boldsymbol{x} \to \lambda\boldsymbol{x}$ を考えてみよう（λ は定数）．空間曲率が無視できる場合には，いかなる物理量も共動座標ベクトルの規格化に依存しないはずである．この変換に対して $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}$ を不変に保つには，共動波数は $\boldsymbol{q} \to \lambda^{-1}\boldsymbol{q}$ のように変換されなければならない．任意の摂動 $Z(\boldsymbol{x},t)$ を考えよう．そのフーリエ積分は，$\delta\varphi^n(\boldsymbol{x},t)$ や $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ の場合と同様に以下で与えられる．

$$Z(\boldsymbol{x},t) = \sum_N \int d^3q \; \left[e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} a(\boldsymbol{q},N) z_{Nq}(t) + e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} a^*(\boldsymbol{q},N) z_{Nq}^*(t)\right] \, ,$$

ここで N は場の方程式の異なる解を区別する添字で，$a(\boldsymbol{q},N)$ と $a^*(\boldsymbol{q},N)$ は以下の交換関係を満たす消滅・生成演算子を表す．

$$[a(\boldsymbol{q},N) \, , \, a^*(\boldsymbol{q}',N')] = \delta_{NN'}\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') \, .$$

変換 $\boldsymbol{q} \to \lambda^{-1}\boldsymbol{q}$ に対し，交換関係のデルタ関数は $\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') \to \lambda^3\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')$ のように変換するので，$a(\boldsymbol{q},N) \to \lambda^{3/2}a(\boldsymbol{q},N)$ でなくてはならない．また，$d^3q \to \lambda^{-3}d^3q$ なので，$Z(\boldsymbol{x},t)$ がこの変換によって不変に保たれるためには，$z_{Nq}(t)$ は $z_{Nq}(t) \to \lambda^{3/2}z_{Nq}(t)$ のように変換する必要がある．この条件は，$z_{Nq}(t)$ の q 依存性が $\propto q^{-3/2}$ であり，**かつ** $z_{Nq}(t)$ が $a(t)$ の規格化に依存しなければ満たされる．もちろん，物理的な座標ベクトル $\boldsymbol{x}a(t)$ が共動座標系の規格化の選び方によらないためには $a(t)$ は $a(t) \to \lambda^{-1}a(t)$ のように変換されなくてはいけないから，$q/a(t)$ は規格化の選び方によらない．もし $z_{Nq}(t)$ が関数 $a(t)$ の規格化に依存するのであれば $z_{Nq}(t)$ が $q^{-3/2}$ に比例するとは結論できないが，$\delta\varphi_{Nq}^n(t)$ や $\Psi_{Nq}(t)$

のように $z_{Nq}(t)$ が地平線の外側で時間に対してほぼ一定値 z^o_{Nq} をとるならば，$a(t)$ に強く依存しないはずである．一方，$z_{Nq}(t)$ は $H(t_q)$ や $\dot{H}(t_q)$ などには依存する．t_q は摂動が地平線の外側に出る時刻で，規格化によらない条件 $q/a(t_q) = H(t_q)$ で定義される．非常にゆっくりとしたスローロールインフレーションの極限では H や $\dot{H}$ などの量は時間に弱くしか依存しないので，z^o_{Nq} は関数 a の規格化に弱くしか依存しない．よって，$Z(\boldsymbol{x},t)$ が共動座標の規格化の変換に対して不変に保たれるためには，z^o_{Nq} は $q^{-3/2}$ にほぼ比例しなくてはいけない．

観測される断熱ゆらぎの強度は，式（5.4.1）で定義される量 $\mathcal{R}$ と関係している．式（10.4.14），（10.4.11），（10.4.21），（10.4.22）を用いれば，インフレーション中には，

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\boldsymbol{x},t) &\equiv -\Psi(\boldsymbol{x},t) + H(t)\,\delta u(\boldsymbol{x},t)\\ &= -\Psi(\boldsymbol{x},t) + \frac{4\pi G H(t)}{\dot{H}(t)}\gamma_{nm}\Big(\bar{\varphi}(t)\Big)\dot{\bar{\varphi}}^n(t)\delta\varphi^m(\boldsymbol{x},t)\\ &= \sum_N \int d^3q\ \left[e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha(\boldsymbol{q},N)\mathcal{R}_{Nq}(t) + e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\alpha^*(\boldsymbol{q},N)\mathcal{R}^*_{Nq}(t)\right]\end{aligned} \tag{10.4.38}$$

となることがわかる．ここで，

$$\mathcal{R}_{Nq}(t) = -\Psi_{Nq}(t) + \frac{4\pi G H(t)}{\dot{H}(t)}\gamma_{nm}\Big(\bar{\varphi}(t)\Big)\dot{\bar{\varphi}}^n(t)\delta\varphi^m_{Nq}(t) \tag{10.4.39}$$

である．摂動が地平線を出終わる頃は，分母の因子 $\dot{H}$ のため式（10.4.39）の第 2 項が初項 $-\Psi_{Nq}$ に比べて支配的となるから，この時期の式（10.4.37）は以下の結果を与える．

$$\mathcal{R}_{Nq} \longrightarrow i\frac{4\pi G H^2}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q^3}\,\dot{H}}\gamma_{nm}(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^n e^m_N\ . \tag{10.4.40}$$

多脚場の定義式（10.4.29）と式（10.4.11）より，以下の総和則が導ける．

$$\left(\sum_N |\mathcal{R}_{Nq}|^2\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{G}H^2}{2\pi q^{3/2}\sqrt{|\dot{H}|}}\ . \tag{10.4.41}$$

すなわち，摂動が地平線の外側に出終わる頃の $|\mathcal{R}_{Nq}|$ の 2 乗平均平方根は，式（10.3.16）で与えられる単一場のインフレーションの場合の $|\mathcal{R}_q|$ の地平線の外側で与えられる値に等しくなる．しかし，式（10.4.38），（10.4.34）より，バンチ–デイヴィス真空における $\mathcal{R}$ の相関関数は，

$$\int d^4x e^{-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\langle\mathcal{R}(\boldsymbol{x},t)\,\mathcal{R}(\boldsymbol{y},t)\rangle = (2\pi)^3\sum_N|\mathcal{R}_{Nq}|^2 \tag{10.4.42}$$

で与えられることがわかるから，式（10.4.41）より**摂動が地平線の外側に出終わる時刻の相関関数** $\langle\mathcal{R}(\boldsymbol{x},t)\,\mathcal{R}(\boldsymbol{y},t)\rangle$ **は，単一場の場合と等しい**ことが示せる．一般的に，スカラー場が複数個ある場合には式（10.4.42）で与えられる相関関数は時間に関して一定でない．しかし，インフレーション後の熱平衡の期間における $|\mathcal{R}_q|$ の値は，式（10.4.41）で与えられる値から何桁も違うことはないと考えられる．したがって，単一場の場合と同様に，観測される宇宙マイクロ波背景放射の異方性の強度とパワースペクトルの形より，摂動が地平線の外側に出る時刻での H の値は 10^{14} GeV 程度であることが示唆される．

式（10.4.23）の行列 $\gamma^{nm}(\bar{\varphi})\partial^2V(\bar{\varphi})/\partial\bar{\varphi}^m\partial\bar{\varphi}^l$ の固有値が 1 つを残してすべて正で大きな値を持つ場合には，より確かな結論を得ることができる．この場合，摂動を含まないスカラー場は小さな固有値を持つ固有ベクトルの方向に運動するので，主な摂動も同じ方向にのみ存在する．すると，この問題は単一場の場合と同じになる．摂動はほぼ断熱的となり，振幅 $\mathcal{R}_q^o$ はスローロール近似において式（10.3.16）で与えられ，スペクトル指数 $n_S(q)$ はこの近似において式（10.3.25）で与えられる．ここで，ε と δ は式（10.3.4）で与えられる宇宙膨張率の時間微分から計算される量である．しかし，ポテンシャルの形がこれらの結果を正当化する性質を持っていると考える理由は何もない．一方，スカラー場が何個あろうと，インフレーション中のテンソル型摂動は式（10.3.17）によって決められる．スカラー場が果たす唯一の役割は宇宙膨張率 H を決めることだけである．よって，任意の数のスカラー場によるスローロールインフレーションでは，単一場の場合とまったく同様に，テンソル型摂動の振幅 $\mathcal{D}_q^o$ は式（10.3.23）で与えられ，そのスペクトル指数 $n_T(q)$ は式（10.3.25）で与えられる．

宇宙マイクロ波背景放射の異方性と宇宙の大規模構造の観測から示唆されるように，地平線の外側のスカラー型ゆらぎは断熱的でガウス分布に従い，$\mathcal{R}_q^o$ はほぼ $q^{-3/2}$ に比例し，かつ $q^{3/2}\mathcal{R}_q^o \ll 1$ である．これは非常にたくさんのインフレーションモデルと無矛盾である．しかし，一般的なスローロールインフレーションの考え方を支持するという意味では良い結果だが，現在の観測からはインフレーションの詳細に関して何らはっきりした情報が得られないという意味では困った結果である．実験精度が向上することで，より決定的な初期宇宙理論のテストができるようになることを期待しよう．

付録A
いくつかの有用な数値

数値定数

$\pi = 3.1415927$	$1'' = 4.84814 \times 10^{-6}$ ラジアン
$e = 2.7182818$	$\ln 10 = 2.3025851$
$\gamma = 0.5772157$	$\zeta(3) = 1.2020569$

物理定数*1

真空における光速	$c \equiv 2.99792458 \times 10^{10}$ cm s^{-1}
プランク定数	$h = 6.6260693(11) \times 10^{-27}$ erg s
換算プランク定数	$\hbar \equiv h/2\pi = 1.05457168(18) \times 10^{-27}$ erg s
	$= 6.58211915(56) \times 10^{-22}$ MeV s
電荷（非有理単位系）	$e = 4.80320441(41) \times 10^{-10}$ esu
電子ボルト	1 eV$= 1.60217653(14) \times 10^{-12}$ erg
	$\hbar c = 197.326968(17) \times 10^{-13}$ MeV cm
微細結合定数	$\alpha \equiv e^2/\hbar c = 1/137.03599911(46)$
電子質量	$m_e = 9.1093826(16) \times 10^{-28}$ g
	$m_e c^2 = 0.510998918(44)$ MeV
リュードベリエネルギー	$hcR \equiv m_e e^4/2\hbar^2 = 13.6056923(12)$ eV
トムソン断面積	$\sigma_T = 8\pi e^4/3m_e^2 c^4$
	$= 0.665245873(13) \times 10^{-24}$ cm^2
陽子質量	$m_p = 1.67262171(29) \times 10^{-24}$ g
	$m_p c^2 = 938.272029(80)$ MeV
中性子質量	$m_n c^2 = 939.565360(81)$ MeV
重水素質量	$m_d c^2 = 1875.61282(16)$ MeV
原子質量単位	$m(\mathrm{C}^{12})/12 = 1.66053886(28) \times 10^{-24}$ g

*1 *Review of Particle Physics*, S. Eidelman *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Lett. B* **592**, 1 (2004) より抜粋.

	$m(\mathrm{C}^{12})c^2/12 = 931.494043(80)$ MeV
アボガドロ定数	$N_A = 6.0221415(10) \times 10^{23}/\mathrm{mol}$
ボルツマン定数	$k_{\mathcal{B}} = 1.3806505(24) \times 10^{-16}$ erg/K
	$= 8.617343(15) \times 10^{-5}$ eV/K
放射エネルギー定数	$a_{\mathcal{B}} = \dfrac{8\pi^5 k_{\mathcal{B}}^4}{15h^3c^3}$
	$= 7.56577(5) \times 10^{-15}$ erg cm^{-3} K^{-4}
弱結合定数	$G_{wk} = 1.16637(1) \times 10^{-5}$ GeV^{-2}
重量定数	$G = 6.6742(10) \times 10^{-8}$ dyn cm^2 g^{-2}
プランクエネルギー	$\sqrt{\hbar c/G} = 1.22090(9) \times 10^{19}$ GeV

天文定数[*2]

ユリウス年	1 年 $\equiv$ 365.25 日 $= 3.1557600 \times 10^7$ s
光年	1 光（ユリウス）年 $= 9.460730472 \times 10^{17}$ cm
地球–太陽間の平均距離	1 天文単位（A.U.） $= 1.4959787066 \times 10^{13}$ cm
パーセク	1 pc $\equiv 648000/\pi$ A.U. $= 3.0856776 \times 10^{18}$ cm
	$= 3.2615638$ 光（ユリウス）年
太陽質量	$M_\odot = 1.9891 \times 10^{33}$ g
太陽光度	$L_\odot = 3.845(8) \times 10^{33}$ erg s^{-1}

見かけ等級 m に相当する見かけ光度

$$\ell = 2.52 \times 10^{-5}\ \mathrm{erg\ cm^{-2}\ s^{-1}} \times 10^{-2m/5}$$

絶対等級 M に相当する絶対光度

$$\mathcal{L} = 3.02 \times 10^{35}\ \mathrm{erg\ s^{-1}} \times 10^{-2M/5}$$

ハッブル定数を $H_0 = h \times 100$ km s^{-1} Mpc^{-1} としたとき：

ハッブル時間	$H_0^{-1} = 3.0857\, h^{-1} \times 10^{17}$ s
	$= 9.778\, h^{-1} \times 10^9$ 年
ハッブル距離	$c/H_0 = 2997.92458\, h^{-1}$ Mpc
臨界密度	$\rho_{\mathrm{crit}} \equiv \dfrac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.878\, h^2 \times 10^{-29}$ g cm^{-3}
	$= [0.00300\ \mathrm{eV}]^4\, h^2$

[*2] *Allen's Astrophysical Quantities*, ed. A. N. Cox, AIP Press (2000) より抜粋.

付録B
一般相対性理論の復習

この付録では，アインシュタインの重力理論である一般相対性理論を手短に復習する．この付録で一般相対性理論を網羅することはせず，理論のうち本書で必要となる部分を解説し，本書で用いている記号を導入するのに留めておく．

B.1 等価原理

一般相対性理論は，重力と慣性力の等価性の原理に基づいている．これを短くして等価原理と呼んでいる．等価原理は，重力質量と慣性質量が等しいため，自由落下する観測者が重力の効果を感じないというおなじみの観測を一般化したものである．等価原理によれば，任意の重力場があるとき，時空のどの点においても「局所慣性」座標系が存在し，その点近傍の十分小さい時空領域では重力の効果が存在しないような座標系を取ることができる．この原理により，もし時空の小さな領域で重力場がないときの物理系を記述する方程式が与えられていれば，重力場があるときの物理系を記述する方程式も導くことができる．必要なのは方程式を一般共変的な形，つまり時空を記述する座標系の選び方によらない形で書き，その方程式が重力がないときには既知の正しい方程式となるようにしておくことである．そのように書かれた方程式は，重力場がある場合にも正しい方程式となるはずである．等価原理によれば，あらゆる時空点で局所慣性座標系を選ぶことができ，重力の効果を消すことができるため，そのような座標系では重力場がないときの方程式が**成り立つ**．一方，一般共変性により，ある方程式がある座標系で正しければ，その方程式はどの座標系においても正しい．一般的には，重力場がないときに正しい方程式になる一般共変的な方程式の書き方は複数個あるが，これらの方程式の違いはつねに時空座標に関する微分を余計に含む．したがって，重力場や他の場が変化する空間あるいは時間スケールに比べて小さな時空領域に限ってさえいれば，これらの違いは無視できる．

B.2 計量：時を刻む時計

この手順の例として，重力場に置かれた時計が時間を刻む速さを記述する方程式を考えよう．まず，重力場がなく，静止している時計が時間間隔 dT 毎に 1 回

時を刻むとする．特殊相対性理論より，重力場がなく，運動している時計が刻む連続した時刻と時刻の間の時空距離 $d\xi^\alpha$ は以下の式で与えられる．

$$\eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = -dT^2. \tag{B.1}$$

（ここで，ξ^1，ξ^2，ξ^3 は空間座標を表すデカルト座標で，光速を 1 とする単位系で長さの次元を持つ．ξ^0 は $\xi^0 \equiv t$ で定義され，$\eta_{\alpha\beta}$ は対角行列要素が $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$，$\eta_{00} = -1$ で与えられるミンコフスキー計量である．重複する添字については和を取るものとする.）すると，重力場がある場合の時計の刻みを記述する方程式は，

$$g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = -dT^2 \tag{B.2}$$

で与えられる．$g_{\mu\nu}(x)$ は**計量**で，以下の 2 つの性質を持つ場である．まず，別の座標系 x'^μ に移ると計量は，

$$g'_{\rho\sigma}(x') = g_{\mu\nu}(x)\, \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \tag{B.3}$$

のように変化する．次に，ある点 x で選べる局所慣性座標系をデカルト座標で書いたとき，その点 x における計量は $\eta_{\alpha\beta}$ で，x における計量の 1 階微分はゼロとなる（式（B.3）において，x^μ と x'^μ は同一点を 2 つの異なる座標系で表している）．式（B.2）は一般共変形式で書かれている．というのは，位置座標の差は変換則，

$$dx'^\rho = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} dx^\mu \tag{B.4}$$

に従うため，以下の結果が得られる．

$$g'_{\rho\sigma}(x')\, dx'^\rho dx'^\sigma = g_{\mu\nu}(x)\, \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} dx^\kappa \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} dx^\lambda = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu.$$

ここで用いた議論をもう一度繰り返し述べておこう．式（B.2）は正しい方程式である．なぜなら，局所慣性座標系ではこの式は式（B.1）になり，それは重力がないときの時計の刻みを記述する正しい方程式だからである．一般共変性より，ある方程式がある座標系で正しければ，その方程式はいかなる座標系でも正しい．同じ議論により，重力がないときに静止系で長さ dL を持つ小さなものさしの端と端の間の時空距離 dx^μ は，一般座標系において以下で与えられる．

$$g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu = +dL^2.$$

同様に，光線に沿う 2 つの連続した位置の時空座標の差 dx^μ は以下で与えられる．

$$g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu = 0.$$

B.3 テンソル，ベクトル，スカラー

式（B.3）や式（B.4）のように変換する量はそれぞれ**共変テンソル**，**反変ベクトル**として知られている．一般的に，反変的な量は上付き添字を持つ形で書き，共変的な量は下付き添字を持つ形で書く．座標変換に伴ってこれらの量も変換されるが，その際には上付き添字 1 つにつき $\partial x'/\partial x$ が，下付き添字 1 つにつき $\partial x/\partial x'$ がかかる．これらの添字は混合しても良い．つまり，ある量が上付き添字と下付き添字の両方を持っていても良い．たとえば，混合テンソルの例として δ^μ_ν があり，これはあらゆる座標系において以下のように定義される．

$$\delta^\mu_\nu \equiv \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}. \tag{B.5}$$

このテンソルの成分はすべての座標系で同じ値を持つが，この量は以下の変換則に従うれっきとしたテンソルである．

$$\delta^\mu_\nu \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} = \delta^\rho_\sigma.$$

反変テンソルの例としては，計量の逆行列 $g^{\mu\nu}$ が挙げられる．

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu. \tag{B.6}$$

これがテンソルであることは，以下の計算で確かめられる．

$$\begin{aligned}\left(g^{\rho\sigma}(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}\right)g'_{\lambda\nu}(x') &= g^{\rho\sigma}(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}g_{\eta\tau}(x) \\ &= g^{\rho\sigma}(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\delta^\eta_\sigma\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}g_{\eta\tau}(x) = \delta^\rho_\tau\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu_\nu.\end{aligned}$$

これより，最初の行の括弧の中の量は x' 座標に変換された計量の逆数，

$$g^{\rho\sigma}(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} = g'^{\mu\lambda}(x')$$

であることがわかり，したがって計量の逆数は反変テンソルであることが証明できた．

スカラー $s(x)$ は，時空の任意の点 x^μ における $s(x)$ の値が座標変換によって変化しない量である．すなわち，変換された座標 x'^μ においても，

$$s'(x') = s(x) \tag{B.7}$$

が成り立つ．スカラー $s(x)$ の微分 $v_\mu \equiv \partial s/\partial x^\mu$ は**共変ベクトル**となる．

$$v'_\rho \equiv \frac{\partial s'}{\partial x'^\rho} = \frac{\partial s}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} = v_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}. \tag{B.8}$$

スカラーやベクトルは，それぞれ添字がない，あるいは添字が 1 つしかないテンソルだと考えて良い．いくつかのテンソルの直積はやはりテンソルである．たとえば 2 つのテンソル $A^\mu{}_\nu$，$B_{\rho\sigma}$ の直積 $C^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \equiv A^\mu{}_\nu B_{\rho\sigma}$ はテンソルである．また，式（B.2），(B.6) で行ったようにいくつかのテンソルの添字の縮約を取ることにより，添字の数がより少ないテンソルを作ることもできる．特別なケースとして，計量を使うことでテンソルの添字を上げ下げすることができる．テンソルと計量の直積を取り，テンソルの上付き添字と計量の添字との縮約を取ることでテンソルの上付き添字を下げることができる．逆に，テンソルと計量の逆行列の直積を取り，テンソルの下付き添字と計量の逆行列の添字との縮約を取ることでテンソルの下付き添字を上げることができる．たとえば，$A^{\mu\nu}$ がテンソルであれば $A_\rho{}^\nu \equiv g_{\mu\rho}A^{\mu\nu}$ もテンソルであるし，$B_\rho{}^\nu$ がテンソルであれば $B^{\sigma\nu} = g^{\sigma\rho}B_\rho{}^\nu$ もテンソルである．ただし，同じ添字を上下させれば，それは単にもとのテンソルに戻る．つまり $g^{\sigma\rho}(g_{\mu\rho}A^{\mu\nu}) = A^{\sigma\nu}$ である．テンソル 2 つを結ぶ等式や，あるテンソルがゼロであるとする方程式は一般共変的で，ある 1 つの座標系で成り立てばその他のあらゆる座標系でも成り立つ．

B.4　アフィン接続：落下する物体

しかし，みんながみんなテンソルというわけではない．たとえば式（B.4）より，粒子の座標 x^μ を粒子の軌跡を表すあるスカラー量 u（たとえばある固定された時計で測った時刻）に関して 1 階微分を取った量はベクトルである，

$$\frac{dx'^\rho}{du} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{du} \tag{B.9}$$

が，2 階微分を取った量はベクトルでは**ない**．

$$\frac{d^2x'^\rho}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{du}\right)$$

$$= \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{d^2 x^{\mu}}{du^2} + \frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}\, \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{du} \frac{dx^{\nu}}{du}. \tag{B.10}$$

これは，重力がないときの粒子の運動方程式 $d^2\xi^{\alpha}/du^2 = 0$ を一般化した式が $d^2x^{\mu}/du^2 = 0$ ではないことを表している．なぜなら，$d^2x^{\mu}/du^2 = 0$ は一般共変的でないことによる．したがって，式（B.10）の右辺 2 項目を打ち消すように，以下の変換則を持つ $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$ という量を導入する必要がある．

$$\Gamma'^{\tau}_{\sigma\rho} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu}\, \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}}, \tag{B.11}$$

ただし，$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$ は x 近傍で局所慣性系を取り，デカルト座標を用いた場合はゼロになる．重力場中を自由落下している粒子の正しい運動方程式は，

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{du^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{du} \frac{dx^{\nu}}{du} = 0 \tag{B.12}$$

と与えられる．これは一般共変的で**あり**，重力場がないときには正しい運動方程式 $d^2\xi^{\alpha}/du^2 = 0$ に帰着する．$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ は**アフィン接続**として知られ，もちろんテンソルではない．

アフィン接続は計量を用いて以下のような単純な形に書ける．

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right]. \tag{B.13}$$

これが一般共変的であることは容易に確かめられる．さて，デカルト座標で書いた局所慣性系では両辺がゼロになるからこの方程式が成り立つ．したがってこの方程式は，一般共変性より一般の座標系で重力場がある場合にも成り立つ．

式（B.12）を満たす軌跡は**時空測地線**と呼ばれる．この軌跡上では，終点 u_1，u_2 における $x^{\mu}(u)$ の値が固定されていれば，以下の積分，

$$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g_{\mu\nu}(x(u)) \frac{dx^{\mu}(u)}{du} \frac{dx^{\nu}(u)}{du}}\, du$$

は $x^{\mu}(u)$ の変化に対して一定に保たれる．計量を指定する代わりに，任意の dx^{μ} に対する**線素** $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ を指定することがよくある．

運動方程式（B.12）はパラメータ u のあらゆる選び方に対して成り立っているわけではない．これを理解するため，式（B.12）から以下の保存則が導けることに着目しよう．

$$\frac{d}{du}\left[g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{du} \frac{dx^{\nu}}{du} \right] = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\mu}}{du} \frac{dx^{\nu}}{du} \frac{dx^{\lambda}}{du} + g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^{\mu}}{du^2} \frac{dx^{\nu}}{du} + g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{du} \frac{d^2 x^{\nu}}{du^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - g_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - g_{\nu\kappa}\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \right) \frac{dx^\mu}{du}\frac{dx^\nu}{du}\frac{dx^\lambda}{du} \\
&= 0. \qquad \text{(B.14)}
\end{aligned}
$$

これより，u は**固有時間** τ,

$$d\tau \equiv \sqrt{-g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu} \qquad \text{(B.15)}$$

の線形関数であることがわかる．固有時間は粒子に沿って自由落下する時計が測定する時間である（式（B.2）を見よ）．この結論に対する唯一の例外は光子のような質量を持たない粒子で，その運動の時空における軌跡は同じ運動方程式（B.12）に従うが，保存量 $d\tau/du$ はゼロとなる．質量を持たない粒子や光線に対しては，それらに沿う時計ではなく，他の自由落下する時計によって測定される時間を u として選ぶ必要がある．

質量 m がゼロでない場合には，アフィンパラメータ u を $u=\tau/m$ と選ぶと便利であり，これを用いてエネルギーと運動量を表す 4 元ベクトルを，

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{du}$$

のように定義できる．式（B.15）を用いれば，p^μ が次の式に従うことがわかる．

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -m^2.$$

質量を持たない粒子に対しては u がどのように規格化されていようと $g_{\mu\nu}(dx^\mu/du)(dx^\nu/du)=0$ であるから，エネルギーと運動量を表す 4 元ベクトルが単に $p^\mu = dx^\mu/du$ となるように u を規格化すれば良い．

B.5　重力による時間の遅れ

これらの結果を用いると，非常に重要な等価原理の帰結の 1 つを導くことができる．ゆっくり運動する粒子の dx^i/du は dx^0/du よりもずっと小さいので，式（B.12）を以下のように近似する．

$$\frac{d^2x^i}{du^2} + \Gamma^i_{00}\frac{dx^0}{du}\frac{dx^0}{du} = 0. \qquad \text{(B.16)}$$

弱い重力場では計量 $g_{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量に近いので $g_{\mu\nu}$ を以下のように書き，

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad \text{(B.17)}$$

$h_{\mu\nu}$ の成分は 1 よりずっと小さいとする．すると $u = \tau \simeq x^0 \equiv t$ と近似できるので，弱い重力場中をゆっくり自由落下する粒子の運動方程式は，

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{00} \tag{B.18}$$

と書ける．ここで i は 1，2，3 を取り，それぞれデカルト座標の空間方向に対応する．弱い重力場のアフィン接続は，

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \simeq \frac{\eta^{\lambda\rho}}{2}\left[\frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right] \tag{B.19}$$

で与えられる．特に，時間に依存しない弱い重力場に対しては，

$$\Gamma^i_{00} \simeq -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \tag{B.20}$$

となる．式（B.18）と（B.20）を見ると $-h_{00}/2$ はニュートンの重力ポテンシャル ϕ と対応づけられることがわかるから，弱い静的な重力場を表す計量の成分として以下の結果を得る．

$$g_{00} \simeq -1 - 2\phi. \tag{B.21}$$

ここで，そのような重力場中にある静止した時計を考えよう．式（B.2）を用いれば，重力場がないときの時間間隔 dT から重力場があるときの時間間隔 dt を以下のように求められる．

$$(-1-2\phi)dt^2 \simeq -dT^2.$$

ゆえに，時間間隔は dT でなく，

$$dt \simeq (1-\phi)dT \tag{B.22}$$

で与えられる．したがって星の表面では，負の重力ポテンシャルにより，星間空間や重力がずっと弱い地球の表面と比べて時間がゆっくり進む．すべての物理過程が同じだけゆっくり進むため星の表面にいる観測者がこの効果を観測することはできないが，遠方にいる観測者は星の表面の原子が発する光の周波数の減少を測定することでこの効果を観測できる．この重力的な時間の遅れは，地球の重力場中を光子が昇ったり降りたりする際に生じるスペクトル線の移動を観測することで正確に測定されている．

B.6 共変微分

スカラー場を時空に関して1階微分したものはベクトルだが，一般にベクトルの微分はテンソルではない．たとえば，反変ベクトル場 v^μ は以下の変換則，

$$v'^\rho = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} v^\mu \tag{B.23}$$

に従うから，その微分は以下のように変換する．

$$\frac{\partial v'^\rho}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} v^\mu. \tag{B.24}$$

したがって，テンソルを構築するにはこの変換則に現れる2項目を打ち消すような項を加えねばならない．このようにして以下の**共変微分**，

$$v^\mu{}_{;\nu} \equiv \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} v^\lambda \tag{B.25}$$

が得られ，これが混合テンソルのように変換することが以下のように確かめられる．

$$v'^\rho{}_{;\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} v^\mu{}_{;\nu}. \tag{B.26}$$

同様に，共変ベクトルの共変微分は，

$$v_{\nu\,;\mu} \equiv \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} v_\lambda \tag{B.27}$$

のように定義でき，これは共変テンソルである．より一般的に，任意の数の上付き添字や下付き添字を持つテンソルの共変微分も似たような形で与えられる．つまり，上付き添字1つにつき $+\Gamma$，下付き添字1つにつき $-\Gamma$ が加えられる．計量テンソル $g_{\mu\nu\,;\lambda}$ の共変微分がゼロになることは容易に確かめられるが，これは物理的にそうでなくてはならない理由がある．局所慣性的デカルト座標では共変微分は通常の微分と等しく，局所慣性系における計量の1階微分はゼロであるから共変微分はゼロで，ある座標系で $g_{\mu\nu\,;\lambda}$ がゼロであればすべての座標系で $g_{\mu\nu\,;\lambda}$ がゼロでなければならない．

B.7 重力の効果：マクスウェル方程式

重力がないときの場の方程式が与えられれば，その方程式に含まれるすべてのミンコフスキー計量 η を計量テンソル g に変え，すべての微分を共変微分に置き

換えることで（少なくとも十分小さい時空領域においては）重力があるときの方程式を導くことができる．ただし，すでに述べたようにこの手順で得られる結果は唯一のものではない．というのは，計量の時空に関する 2 階微分やさらに高階微分から得られるテンソルも重力がないときにゼロとなるので，そのような項を加える自由度が残るためである．しかし，十分に小さな時空領域ではそのようなテンソルが一般共変的な場の方程式に与える影響は無視できる．

たとえば，電磁場を記述するマクスウェル方程式を重力がないときにデカルト座標を用いて書けば，

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -J^\beta \tag{B.28}$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{B.29}$$

であり，ここで $F^{\alpha\beta}$ は電磁場テンソル（$F^{01} = E_1$，$F^{23} = B_1$ 等），J^α は電流を記述する 4 元ベクトル（J^0 は電荷密度で J^1，J^2，J^3 は電流密度）で，$F_{\alpha\beta}$ は以下のように定義される．

$$F_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}F^{\gamma\delta}. \tag{B.30}$$

したがって，重力がある場合の場の方程式は，

$$F^{\nu\mu}{}_{;\nu} = -J^\mu, \tag{B.31}$$

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;\nu} = 0 \tag{B.32}$$

および

$$F_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}F^{\lambda\kappa} \tag{B.33}$$

で与えられる．計量との縮約で添字を上下することで互いに関係づけられる $F_{\mu\nu}$ と $F^{\mu\nu}$ のようなテンソルは同じ物理量を表しているから，同じ文字（この場合は F）を用いる．

B.8 電流と保存則

添字 n によって個々にラベルをつけた粒子の系を考え，それぞれの粒子の時空座標を $x_n^\mu(u)$，電荷を e_n と書けば，電流を記述する 4 元ベクトルは以下の式で与えられる．

$$J^\mu(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}} \int du \sum_n e_n\,\delta^4\Big(x_n(u) - x\Big)\frac{dx_n^\mu(u)}{du}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}} \sum_n e_n \, \delta^3\Big(\boldsymbol{x}_n(t) - \boldsymbol{x}\Big) \frac{dx_n^\mu(t)}{dt}. \tag{B.34}$$

ここで $\delta^4(z)$ はデルタ関数として知られる超関数で，$z = 0$ で幅が無限小，高さが無限大のピークを持ち，なめらかな関数 $f(z)$ に対して以下の式が成り立つように規格化されている．

$$\int d^4x \, f(x) \, \delta^4(y - x) = f(y),$$

$\delta^3(\boldsymbol{z})$ は 3 次元における同様の超関数を表す．$\sqrt{-\mathrm{Det}g} \, J^0$ の有限体積に渡る空間積分はその体積中の全電荷に相当する（宇宙論では電流よりもバリオン流（バリオンカレント）の方により興味があるが，その場合は e_n を n 番目の粒子や銀河のバリオン数に置き換える）．4 次元のデルタ関数はスカラーではないため因子 $1/\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}$ が必要となるが，これは以下のように理解できる．x^μ を x'^μ に移す座標変換により，微分時空体積要素は，

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x \tag{B.35}$$

のように変換される．ここで $|\partial x'/\partial x|$ は座標変換のヤコビアン，つまり成分が $\partial x'^\mu/\partial x^\nu$ で与えられる行列の行列式である．このヤコビアンは計量の行列式を用いて表すことができる．式（B.3）の行列式を計算すれば，

$$\mathrm{Det}\, g' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-2} \mathrm{Det}\, g \tag{B.36}$$

を得るから，d^4x ではなく，$d^4x\sqrt{-\mathrm{Det}g}$ がスカラーであることがわかる（計量の行列式の前に負の符号があるのは，物理的な時空では行列式が負となることによる）．デルタ関数の定義式，

$$\begin{aligned} f(y) &= \int d^4x \, f(x) \, \delta^4(x - y) \\ &= \int \Big(d^4x \sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}\Big) f(x) \Big(\delta^4(x - y)/\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}\Big) \end{aligned}$$

より，デルタ関数そのものではなく，電流の式（B.34）に現れる比 $\delta^4(x_n - x)/\sqrt{-\mathrm{Det}\, g(x)}$ がスカラーのように変換することがわかる．この電流は保存則，

$$\partial_\mu\Big(\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)} \, J^\mu(x)\Big) = \int du \frac{d}{du} \sum_n e_n \, \delta^4(x_n(u) - x) = 0 \tag{B.37}$$

に従う (ただし x は積分の両方の端点において $x_n(u)$ と等しくないとした). この保存則は，以下の一般共変的な保存則と等しい.

$$0 = J^\mu{}_{;\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} J^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\mu} J^\nu. \tag{B.38}$$

なぜなら，

$$\Gamma^\nu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \partial_\mu g_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} \partial_\mu \ln\Big(- \mathrm{Det} g\Big)$$

であるからによる．重力がなければ電流はデカルト座標で書いた保存則 $\partial_\mu J^\mu = 0$ を満たすから，一般共変的な式（B.38）が重力があるときの一般座標系での正しい保存則の表式である.

B.9 エネルギー–運動量テンソル

同様に，重力がない場合にはいかなる粒子や場も対称なエネルギー–運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$ を持つ．これは以下の意味で保存される.

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{B.39}$$

J^β が電流の β 成分であったように，$T^{\alpha\beta}$ は p^α の流れの β 成分であると考えることができる．重力がある場合の保存則は次のように与えられる.

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu} T^{\kappa\nu} + \Gamma^\nu_{\kappa\nu} T^{\mu\kappa} = 0. \tag{B.40}$$

最後の Γ の項は幾何学的な効果で電流の保存則の式にも現れたが，もう 1 つの Γ の項は重力と他の場との間のエネルギーと運動量のやり取りを表している.

たとえば，重力や，空間に局在する衝突以外の外力を受けずに自由に運動する粒子からなる理想気体を考えよう．エネルギー–運動量テンソルは式（B.34）の e_n をエネルギー–運動量 4 元ベクトル $p^\mu_n = E_n\, dx^\mu_n/dt$ に置き換えることで得られる．p^μ_n の空間成分は 3 元運動量の成分で，$p^0_n = E_n$ である.

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{Det} g(x)}} \int du \sum_n \delta^4\Big(x_n(u) - x\Big) \frac{dx^\mu_n(u)}{du} p^\nu_n(u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{Det} g(x)}} \sum_n \delta^3\Big(\boldsymbol{x}_n(t) - \boldsymbol{x}\Big) p^\mu_n(t) p^\nu_n(t)/E_n(t). \end{aligned} \tag{B.41}$$

特に，T^{00} はエネルギー密度を表す．運動方程式（B.12）を使った直接計算により，このテンソルが一般共変的な保存則の式（B.40）を満たすことが示せる.

B.10　完全流体と不完全流体

ある流体が運動しているとしよう．その流体の各点において，その点近傍の流体素片とともに運動する系に移り，局所慣性的デカルト座標を張ったとする．この座標系で見たときの流体の性質が等方的となるような流体を完全流体と定義する．そのような局所慣性的かつ共動的な座標系では，完全流体のエネルギー–運動量テンソルの成分は以下の形を取る．

$$T^{ij} = \delta_{ij} p, \quad T^{i0} = T_{0i} = 0, \quad T^{00} = \rho,$$

ここで i と j は 1，2，3 を取り，それぞれデカルト座標の空間方向に対応する（T^{i0} や δ_{ij} に比例しない T^{ij} の成分は特別な空間方向，つまり T^{i0} の方向や T^{ij} の縮退していない固有ベクトルの方向を持つため，等方性に反する）．係数 p，ρ はそれぞれ流体の圧力，密度を表す．次に，共動座標系を離れて任意の速度を持つ局所慣性デカルト座標系に移れば，エネルギー–運動量テンソルは以下の形となる．

$$T^{\alpha\beta} = p\,\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)u^\alpha u^\beta, \tag{B.42}$$

ここで ρ と p は共動的局所慣性系で定義したものと同じ量であるが，u^α はローレンツ変換に対して 4 元ベクトルとして変換し，共動的局所慣性系ではデカルト座標の成分として $u^0 = 1$，$u^i = 0$ を持つ．この 4 元ベクトルは速度ベクトルとして知られ，すべての慣性系において $\eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$ を満たすように規格化される．

以上より，一般的に重力場がある場合の完全流体のエネルギー–運動量テンソルは，

$$T^{\mu\nu} = p\,g^{\mu\nu} + (p+\rho)u^\mu u^\nu, \quad g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \tag{B.43}$$

で与えられ，p と ρ は共動的局所慣性座標系におけるエネルギー–運動量テンソルの係数と等しいという条件で定義される．つまりこれらは座標系の取り方によらない量で，スカラーである．次に u^μ は一般座標変換に対して 4 元ベクトルのように変換し，共動的局所慣性座標系における成分は $u^0 = 1$，$u^i = 0$ であるとして定義される．$T^{\mu\nu}$ に関するこの公式は一般共変的であり，局所慣性座標系で正しいためすべての座標系において正しい．重力場があるときの相対論的流体力学の方程式は，このテンソルを保存則の式（B.40）に代入することで導ける．さらに，圧力が密度 ρ だけでなくバリオン数などの保存量の数密度 n にも依存する場合には，数密度の流れに関する保存式が必要で，それは局所慣性的デカルト座標で以

下のように与えられる．

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(n\,u^\alpha\Big) = 0. \tag{B.44}$$

したがって任意の重力場がある場合の一般座標系では，保存式は以下のようになる．

$$\Big(n\,u^\mu\Big)_{;\mu} = 0. \tag{B.45}$$

不完全流体では，局所慣性的デカルト座標系におけるエネルギー–運動量の式（B.42）に小さな補正項 $\Delta T^{\alpha\beta}$,

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)u^\alpha u^\beta + \Delta T^{\alpha\beta} \tag{B.46}$$

が加わり，また保存量の数密度の流れの式にも以下のように小さな補正項 ΔN^α が加わる．

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(n\,u^\alpha + \Delta N^\alpha\Big) = 0. \tag{B.47}$$

スカラー量 ρ は流体素片とともに運動する共動座標系 $u^i = 0$ で観測されるエネルギー密度として定義されているので，この系では $\Delta T^{00} \equiv 0$ となる．つまり，すべての（共動的とは限らない）局所慣性的デカルト座標では $u_\alpha u_\beta \Delta T^{\alpha\beta} = 0$ となる（なぜならこの量はスカラーで共動座標系でゼロとなるからである．スカラー量は座標系の取り方によらず値が同じであることを思い出そう）．スカラー量 n は共動座標系で観測される保存量の数密度として定義できるので，同じ理由からすべての局所慣性的デカルト座標で $u_\alpha \Delta N^\alpha = 0$ となる．圧力は ρ や n の任意の関数であり，静的で一様な流体の持つ圧力として定義できる（ただし 5 章以降では異なる定義を用いている）．一方，4 元速度ベクトル u^α の定義は幾分曖昧なままである．u^i を粒子が運ばれる速度として定義[*1]すれば，共動座標系 $u^i = 0$ において $\Delta N^i = 0$，$\Delta N^0 = 0$ となるので，すべての局所慣性的デカルト座標で $\Delta N^\alpha = 0$ となる．本書では u^i をエネルギーが運ばれる速度として定義する[*2]．すると共動座標系では $T^{i0} = \Delta T^{i0} = 0$ となる．すなわち共動座標系では $u_\beta \Delta T^{\alpha\beta} = \Delta T^{\alpha 0} = 0$ であるから，すべての局所慣性的デカルト座標で $u_\beta \Delta T^{\alpha\beta} = 0$ であり，一方で $\Delta N^\alpha \neq 0$ である．このように速度を定義すれば，熱力学第 2 法則を

[*1] この定義は以下の文献によって用いられている．C. Eckart, *Phys. Rev.* **58**, 919 (1940)．G&C の 2.11 節と 15.10 節も見よ．

条件 $u_\beta \Delta T^{\alpha\beta} = 0$，$u_\alpha \Delta N^\alpha = 0$ と組み合わせることで以下の結果を得る[*3]．

$$\Delta T_{\alpha\beta} = -\eta\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} + u_\beta u^\gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\gamma} + u_\alpha u^\gamma \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\gamma}\right) - (\zeta - \frac{2}{3}\eta)\frac{\partial u^\gamma}{\partial x^\gamma}\left(\eta_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta\right), \tag{B.48}$$

$$\Delta N_\alpha = -\chi\left(\frac{nT}{\rho + p}\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\mu}{T}\right) + u_\alpha u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right]. \tag{B.49}$$

ここで η，ζ，χ はそれぞれ剪断粘性（shear viscosity），体積粘性（bulk viscosity），熱伝導（heat conduction）を表す正の係数で，μ は保存量子数に付随する化学ポテンシャルでエントロピー密度が $(p + \rho - \mu n)/T$ になるように定義される．流体の平均自由行程および平均自由時間以内でほとんど変化しない任意の重力場を表す一般座標系における表式は，等価原理を用いればすぐに導ける．

$$\Delta T_{\mu\nu} = -\eta\left(u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu} + u_\nu u^\kappa u_{\mu;\kappa} + u_\mu u^\kappa u_{\nu;\kappa}\right) - (\zeta - \frac{2}{3}\eta)u^\kappa{}_{;\kappa}\left(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu\right), \tag{B.50}$$

$$\Delta N_\mu = -\chi\left(\frac{nT}{\rho + p}\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\mu}{T}\right) + u_\mu u^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right]. \tag{B.51}$$

B.11　作用原理

理想気体や完全流体よりももっと複雑な系を記述するエネルギー–運動量テンソルを導くための一般的手法がある．この手法は，その系が作用原理に従う場合にのみ適用できる．作用原理に従えば，粒子や場の振る舞いを記述する微分方程式は，場と粒子の軌跡の汎関数である「物質の作用」I_m が場と粒子の微小な変化に対して定常的であるとすることで導かれる．等価原理により，重力の効果は I_m が一般座標変換に対して不変になるように計量を I_m に含めることで考慮できる．計量に微小な変化 $\delta g_{\mu\nu}$ を与えれば（ただし他のすべての変数は固定する），作用は以下のように変化する．

---

*2　（315 ページ）この定義は以下の文献で用いられている．L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Fluid Mechanics*, trans. by J. B. Sykes, W. H. Reid, Pergamon Press (1959), 127 節．邦訳は竹内均訳『流体力学 2』（ランダウ=リフシッツ理論物理学教程）．本書でこの定義を用いる理由は，この定義がエネルギー–運動量テンソルに最も厳しい制限を与えるからである．その代償として電荷やバリオン数などの保存量のカレントにはあまり制限を与えないが，宇宙論で扱う状況下では多くの場合においてゼロでない保存量が存在しない（たとえば宇宙論的なレプトン生成やバリオン生成以前の初期宇宙）か，たとえ存在しても，圧力と密度の関係式を変えるほど大きくない（たとえば温度が 10^4 K より高い放射優勢宇宙の時期）．

*3　Landau & Lifschitz，脚注 2 を参照．

$$\delta I_m = \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-\mathrm{Det}\,g(x)}\,T^{\mu\nu}(x)\,\delta g_{\mu\nu}(x), \tag{B.52}$$

ここで $T^{\mu\nu}(x)$ は対称テンソルで，エネルギー–運動量テンソルとして同定する．

たとえば，質量 m_n，電荷 e_n，軌跡 $x_n^\mu(u)$ を持ち，電磁場と相互作用する粒子からなる気体を記述する作用は，

$$\begin{aligned} I_m = &-\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-\mathrm{Det}\,g}\,F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \\ &-\sum_n m_n\int du\left[-g_{\mu\nu}(x_n(u))\frac{dx_n^\mu(u)}{du}\frac{dx_n^\nu(u)}{du}\right]^{1/2} \\ &+\sum_n e_n\int du\frac{dx_n^\mu(u)}{du}A_\mu(u) \end{aligned}$$

と書け，斉次マクスウェル方程式（B.29）は電磁場テンソルをベクトルポテンシャル A_μ を用いて $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と書くことで満たされる．また，物質の作用が $A_\mu(x)$ と $x_n^\mu(u)$ の任意の微小な変化（ただしこれらの変化は $x^\mu \to \infty$，あるいは $u \to \pm\infty$ でゼロになるとする）に対して定常的だとして，非斉次マクスウェル方程式（B.28），および重力場と電磁場中を運動する電荷を持った粒子を記述する運動方程式，

$$m_n\left[\frac{d^2x_n^\mu}{d\tau_n^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\rho}{d\tau_n}\right] = e_n\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}F^\mu{}_\nu(x_n)$$

を導くことができる．ここで τ_n は n 番目の粒子の軌跡に沿って測定される不変固有時間で，以下のように定義される．

$$\frac{d\tau_n}{du} \equiv \left[-g_{\mu\nu}(x_n(u))\frac{dx_n^\mu(u)}{du}\frac{dx_n^\nu(u)}{du}\right]^{1/2}.$$

式（B.52）からこの系を記述するエネルギー–運動量テンソルを以下のように導ける．

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) = &[-\mathrm{Det}g(x)]^{-1/2}\sum_n m_n\int d\tau_n\,\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}\,\delta^4(x - x_n) \\ &+ F^{\rho\mu}(x)F_\rho{}^\nu(x) - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}(x)F^{\rho\sigma}(x)F_{\rho\sigma}(x), \end{aligned}$$

ここで第 1 項は式（B.41）と同じで，残りの項は電磁場の持つエネルギーと運動量を表す（この結果を導く際，$\delta\mathrm{Det}g = \mathrm{Det}g\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$ および $\delta g^{\mu\rho} = -g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\sigma}g^{\sigma\rho}$ を用いた）．

式（B.52）で $T^{\mu\nu}$ を同定したが，これはこのテンソルが式（B.40）の意味で保存することから正当化できる．このように同定された $T^{\mu\nu}$ が保存することを示してみよう．I_m はスカラーであると仮定しているので，一般にその値は以下の同時変換によって変化しない．

$$d^4x \longrightarrow d^4x', \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu}, \tag{B.53}$$

$$x_n^\mu(u) \longrightarrow x'^\mu_n(u), \quad A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x), \tag{B.54}$$

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x). \tag{B.55}$$

作用が A_μ と $g_{\mu\nu}$ 以外の場を含むときは，それらの場に対しても同様な変換を行う．ここで座標 x'^μ は（軌跡 $x'^\mu_n(u)$ と異なり）単なる積分変数であるから，至るところで x'^μ を x^μ に戻しても I_m の値は変わらない．ということは，I_m の値は以下の変換に対して不変である．

$$x_n^\mu(u) \longrightarrow x'^\mu_n(u), \tag{B.56}$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) - [A'_\mu(x') - A'_\mu(x)], \tag{B.57}$$

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) - [g'_{\mu\nu}(x') - g'_{\mu\nu}(x)], \tag{B.58}$$

ただし x^μ と $\partial/\partial x^\mu$ は変化させない（このように座標変換と座標の張り替えを同時に行う作業はしばしば**ゲージ変換**と呼ばれる）．一般的な微小座標変換 $x^\mu \longrightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ を考えよう．ここで $\varepsilon^\mu(x)$ は微小な関数を表す．すると式（B.56）–（B.58）で与えられる変換は以下のように書き直せる．

$$x_n^\mu(u) \longrightarrow x_n^\mu(u) + \varepsilon^\mu(x_n), \tag{B.59}$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \frac{\partial \varepsilon^\nu(x)}{\partial x^\mu} A_\nu(x) - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} \varepsilon^\nu(x), \tag{B.60}$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g_{\mu\nu}(x) &- \frac{\partial \varepsilon^\rho(x)}{\partial x^\mu} g_{\rho\nu}(x) - \frac{\partial \varepsilon^\sigma(x)}{\partial x^\nu} g_{\mu\sigma}(x) \\ &- \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\rho} \varepsilon^\rho(x). \end{aligned} \tag{B.61}$$

さて，粒子の運動方程式と「物質」場（電磁場を含む）を記述する場の方程式が満たされていれば，作用は粒子の軌跡と物質場の微小な変化に対して不変であ

る．一方，物質と重力を合わせた全体の系を記述する作用とは異なり，物質の作用は計量の変化に対して定常的ではない．たとえ計量の従う場の方程式が満たされていたとしても，物質の作用は計量の変化に対して定常的ではない．式（B.61）を式（B.52）に代入すれば，一般的な微小座標変換に対して I_m がスカラーである条件は以下のように書ける．

$$0 = \delta I_m = \int d^4x\,\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}\,T^{\mu\nu}(x)\left[-\frac{\partial\varepsilon^\rho(x)}{\partial x^\mu}g_{\rho\nu}(x) - \frac{\partial\varepsilon^\rho(x)}{\partial x^\nu}g_{\mu\rho}(x) - \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\rho}\varepsilon^\rho(x)\right]. \tag{B.62}$$

これを部分積分し，$\varepsilon^\rho(x)$ の係数をゼロとすることによってエネルギー–運動量テンソルの保存式（B.40）を得る．

B.12 スカラー場の理論

宇宙論では，以下の作用を持つスカラー場 $\varphi(x)$ に頻繁に出会う[*4]．

$$I_\varphi = -\int d^4x\,\sqrt{-\mathrm{Det}g}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} + V(\varphi)\right], \tag{B.63}$$

ここで $V(\varphi)$ はポテンシャルとして知られる関数を表す．重力場中の φ を記述する場の方程式はこの作用が φ の変化に対して定常的であるという条件から導ける．

$$\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{Det}g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\sqrt{-\mathrm{Det}g}\;g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}\right] = \frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi}. \tag{B.64}$$

スカラー場のエネルギー–運動量テンソルは作用を計量について変分し，式（B.52）と比較することで得られる．

$$T_\varphi^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma} + V(\varphi)\right] + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma}. \tag{B.65}$$

これは完全流体のエネルギー–運動量テンソルを記述する式（B.43）と同じ形をしている．エネルギー密度，圧力，4 元速度ベクトルはそれぞれ以下のように与えられる[*5]．

[*4] 一般には角括弧内の最初の項の係数も φ に依存するが，そのように場に依存する係数はスカラー場を再定義することで常に定数にできる．しかし，このような単純化はスカラー場を複数個含むモデルでは一般的に可能ではない．この点は 10.4 節で議論する．

$$\rho = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} + V(\varphi), \tag{B.66}$$

$$p = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} - V(\varphi), \tag{B.67}$$

$$u^\mu = -\left[-g^{\rho\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma}\right]^{-1/2} g^{\mu\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\tau}. \tag{B.68}$$

（u^μ の符号はエネルギー–運動量テンソルに影響を与えないので式（B.65）と式（B.43）を比較しても符号は決まらない．ここでは，u^0 の値が 4 章で考える状況下で $u^0 = +1$ となるように符号を選ぶ．その状況というのは，$g^{00} = -1$ を持つ時空でスカラー場が空間にはよらないが時間とともに増加する場合である．このとき平方根の中は正である.）φ の従う場の方程式（B.64）を用いれば，$T_\varphi^{\mu\nu}$ が式（B.40）の意味で保存することを示せる．

B.13　平行移動

軌道 $x^\mu = x^\mu(t)$ に沿って運動する物体は 1 つあるいは複数のベクトルやテンソルで記述でき，それらのベクトルやテンソルは t に依存する．もしこれらのベクトルやテンソルが，時刻 t に $x^\mu(t)$ における局所慣性系で変化しなければ（時間微分がゼロであれば），任意の系では**平行移動**と呼ばれる変化が生じる．たとえば反変ベクトル $v^\mu(t)$ の変化率は以下で与えられる．

$$\frac{dv^\mu(t)}{dt} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Big(x(t)\Big)v^\nu(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt}. \tag{B.69}$$

この式を確かめてみよう．時刻 t において，アフィン接続 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Big(x(t)\Big)$ がゼロとなる系ではこの式は正しい（つまり局所慣性系において $v^\mu(t)$ は変化しない）．こ

---

*5　（319 ページ）ここで与える圧力の表式は E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison–Wesley (1990) の式（8.21）で（説明なしに）与えられている表式とは異なっている．彼らによれば，スカラー場の圧力はロバートソン–ウォーカー計量において，

$$p = \dot{\varphi}^2/2 - V(\varphi) - (\nabla\varphi)^2/6a^2$$

で与えられ，式（B.67）をロバートソン–ウォーカー計量を用いて計算した結果の，

$$p = \dot{\varphi}^2/2 - V(\varphi) - (\nabla\varphi)^2/2a^2$$

とは異なっている．このコルブとターナーによる結果を再現するには，圧力を 4 元速度 v_μ を持って運動する観測者が局所慣性座標系において測定する $T^i{}_i/3$ の値として定義し，

$$p \equiv \frac{1}{3}\,(g_{\mu\rho} + v_\mu v_\rho)T^{\rho\sigma}(\delta^\mu_\sigma + v_\sigma v^\mu)$$

その速度 v^μ の成分を $v^0 = 1$，$v^i = 0$ とすれば良い．しかし，圧力に関するこの式を使うなら，速度 v^μ として式（B.68）で与えられる u^μ を用いる方がより自然なように思う．なぜなら，完全流体のエネルギー–運動量テンソルの式（B.43）に現れる速度は u^μ だからである．v^μ を u^μ とすれば式（B.67）を得る．

の式は一般共変的なので，局所慣性系で正しければすべての座標系において正しい．これを式（B.12）と比較すれば，運動量 $p^\mu = dx^\mu/du$ は平行移動の式を満たすことがわかる．同様に，ある軌道に沿って運動するテンソルが軌道上のある点における局所慣性系で変化しなければ，任意の系でこのテンソルが得る変化率は式（B.69）の右辺のような項の和で与えられる．このとき，反変（上付き）添字1つにつき $-\Gamma$，共変（下付き）添字1つにつき $+\Gamma$ を与える．たとえば共変テンソル $J_{\mu\nu}$ に対する平行移動の式は以下で与えられる．

$$\frac{dJ_{\mu\nu}(t)}{dt} = +\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Big(x(t)\Big)J_{\rho\nu}(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Big(x(t)\Big)J_{\mu\rho}(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt}.$$

B.14 重力場の方程式

あと残っている作業は，重力場の従う方程式を導くだけである．これらの方程式は2つの条件を満たさねばならない．まずこれらの方程式は一般共変的でなくてはならず，次にほとんど時間変化しない弱い重力場に対してこれらの方程式は式（B.21）にあるニュートンポテンシャル ϕ の従うポアソン方程式，

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\,T^{00} \tag{B.70}$$

に帰着せねばならない．G はニュートンの重力定数である．ここで，もし我々が偏微分方程式の形として（ポアソン方程式のように）計量の時空に関する2階微分だけしか含まないものを考えれば，重力場の方程式は一意に決まる．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}R_{\lambda\kappa} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{B.71}$$

ここで $T_{\mu\nu}$ は下付き添字を持つエネルギー–運動量テンソルで，

$$T_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\lambda}\,g_{\nu\kappa}\,T^{\lambda\kappa}, \tag{B.72}$$

$R_{\mu\nu}$ は以下で定義される**リッチテンソル**である．

$$R_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\kappa}. \tag{B.73}$$

g_{00} と ϕ の関係が式（B.21）で与えられるとすれば，時間変化しない弱い重力場に対して場の方程式の時間–時間成分（$\mu = 0 = \nu$ 成分）からポアソン方程式（B.70）が得られる．式（B.71）の左辺に現れるテンソルは，以下の微分形式で書かれた**ビアンキ恒等式**を満たす．

$$\left[g^{\lambda\nu}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\rho\kappa}R_{\rho\kappa}\right)\right]_{;\lambda}=0. \tag{B.74}$$

この恒等式により，なぜ $R_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}R_{\lambda\kappa}$ の線形結合として $R_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}R_{\lambda\kappa}/2$ が重力場の方程式の左辺に現れるかが理解できる．なぜなら，そうでなければ場の方程式がエネルギー–運動量テンソルの保存則の式（B.40）と整合しないからである．重力場の方程式は，作用に以下のような重力の項を入れることでより容易に導ける．

$$I_g=-\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}\;g^{\lambda\kappa}(x)\,R_{\lambda\kappa}(x). \tag{B.75}$$

ビアンキ恒等式（B.74）は I_g が計量の一般座標変換のもとで不変であることから導出でき，重力場の方程式（B.71）は作用の和 I_g+I_m が計量の任意の変化に対して定常的であるとすることで導出できる．

もし，重力場の方程式に時空微分の数が 2 個より少ない項を許せば，場の方程式（B.71）の左辺に $g_{\mu\nu}$ に比例する項を足すことができる．これがいわゆる**宇宙定数**の項で，これについては 1.5 節で議論する．この項は $T_{\mu\nu}$ に対する「真空のエネルギー」の寄与だと解釈することもできる．宇宙定数を除けば，式（B.71）の左辺に加えることのできる項は時空微分の数が 2 個より**多い**項になる（これらの項は，たとえば重力の作用の被積分関数に $\sqrt{-\mathrm{Det}g}\,R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ や $\sqrt{-\mathrm{Det}g}\;(R^{\mu}{}_{\mu})^2$ に比例する項を足すことで導ける）．次元解析より，そのような項の係数は（式（B.75）の係数 $1/16\pi G$ と比べて）長さの正の冪の次元を持つ．一般相対性理論と実験結果の一致よりこの長さは太陽系の大きさよりもずっと小さくなくてはならないから，時空微分の数が 2 個よりも多い項の効果は宇宙論的な距離では完全に無視できる．

付録C
放射と電子間のエネルギー輸送

光子が電離ガスを通過すると，どれほどの割合でエネルギーを得たり失ったりするだろうか？　この情報は，たとえば 2.5 節で学ぶスニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果や，2.2 節で扱う物質と放射の熱平衡状態がどう保持されるかを理解するのに必要となる．本付録では，まず 1 個の光子が 1 個の電子に衝突した際に生じる光子のエネルギー変化量の平均値，および 2 乗平均値の式を導く．次にこれらの結果を用いて光子が電離ガスを通過した際に生じる光子の分布関数の変化の割合を導く．

ある電子が 4 元運動量ベクトル，

$$p = (0, 0, p_e, E_e), \qquad E_e \equiv \sqrt{p_e^2 + m_e^2} \tag{C.1}$$

を持って運動しているとしよう．この電子に入射エネルギー ω を持ち，極角 η，方位角 ϕ の方向に運動する光子が衝突し，衝突後の光子のエネルギーが ω'，衝突後の極角と方位角がそれぞれ η'，ϕ' に変化したとする．このとき，衝突前の光子の 4 元運動量ベクトル q と衝突後の 4 元運動量ベクトル q' はそれぞれ以下のように書ける．

$$q = \Big(\sin\eta\cos\phi,\ \sin\eta\sin\phi,\ \cos\eta, 1\Big)\omega, \tag{C.2}$$

$$q' = \Big(\sin\eta'\cos\phi',\ \sin\eta'\sin\phi',\ \cos\eta', 1\Big)\omega'. \tag{C.3}$$

この衝突による光子散乱の散乱断面積を計算するため，まずローレンツ変換によって電子の静止系に移ろう．このとき散乱断面積はよく知られた単純な形を取る．電子の静止系から見れば衝突前と衝突後の光子の 4 元運動量ベクトルはそれぞれ Lq，Lq' で，$L^\mu{}_\nu$ はローレンツ変換，

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \tag{C.4}$$

を表す．ここで，$\beta \equiv p_e/E_e$ は電子の速度を表し，γ は $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$ で定義

される．したがって，電子の静止系から見た衝突前と衝突後の光子の 4 元運動量ベクトルはそれぞれ

$$Lq = (\sin\alpha\cos\phi,\, \sin\alpha\sin\phi,\, \cos\alpha, 1)\, k, \tag{C.5}$$

$$Lq' = (\sin\alpha'\cos\phi',\, \sin\alpha'\sin\phi',\, \cos\alpha', 1)\, k' \tag{C.6}$$

で与えられる．ここで k，k' は電子の静止系から見た衝突前と衝突後の光子のエネルギー，

$$k = (-\beta\gamma\cos\eta + \gamma)\omega, \qquad k' = (-\beta\gamma\cos\eta' + \gamma)\omega' \tag{C.7}$$

で，この系において光子の進行方向が持つ衝突前と衝突後の極角はそれぞれ

$$\cos\alpha = \frac{\cos\eta - \beta}{1 - \beta\cos\eta}, \quad \cos\alpha' = \frac{\cos\eta' - \beta}{1 - \beta\cos\eta'} \tag{C.8}$$

で与えられる．方位角は衝突前と衝突後で同じである．さらに，電子の静止系におけるエネルギーと運動量の保存を考えることで，この系における衝突後の光子のエネルギーを，

$$k' = \frac{k}{1 + (k/m_e)(1 - \cos\theta)} \tag{C.9}$$

と書けることを思い出そう[*1]．ここで θ は以下の式で与えられる電子の静止系における散乱角を表す．

$$\cos\theta \equiv \widehat{Lq} \cdot \widehat{Lq'} = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos(\phi - \phi')\sin\alpha\sin\alpha'. \tag{C.10}$$

以上の結果を合わせると，もとの（電子が運動する）系における光子のエネルギーの変化の割合が電子の静止系の量で書ける．

$$\frac{\omega' - \omega}{\omega} = \frac{1}{1 + \beta\cos\alpha}\left(\frac{1 + \beta\cos\alpha'}{1 + (k/m_e)(1 - \cos\theta)} - \beta\cos\alpha - 1\right). \tag{C.11}$$

本書で興味あるほとんどの場合では k/m_e も β も 1 よりずっと小さいので，k/m_e に関して 1 次かつ β に関してゼロ次の項，および β に関して（今のところ）任意の次数かつ k/m_e に関してゼロ次の項だけ残せば以下の近似式を得る．

$$\frac{\omega' - \omega}{\omega} \simeq -(k/m_e)(1 - \cos\theta) + \frac{\beta(\cos\alpha' - \cos\alpha)}{1 + \beta\cos\alpha}. \tag{C.12}$$

　電子が静止していて，かつ光子のエネルギーが $k \ll m_e$ の場合，微分散乱断面

[*1] QTF 第 1 巻，式 (8.7.14)（邦訳『場の量子論 2 巻』，式 (8.7.14)）．

積は（終状態における光子のスピンおよび偏光が取りうる状態について和を取り，始状態における光子のスピンおよび偏光が取りうる状態について平均を取れば）*2,

$$d\sigma = \frac{3\sigma_{\mathcal{T}}}{16\pi}\left(1+\cos^2\theta\right) d(\cos\alpha')\, d\phi' \tag{C.13}$$

で与えられる．$\sigma_{\mathcal{T}}$ はトムソン散乱断面積 $e^4/6\pi m_e^2$ を表す．微分散乱断面積はそれ自身でローレンツ変換に対して不変であるが，微分散乱断面積の表式に含まれる個々の変数はローレンツ不変ではない．散乱ごとに生じる光子のエネルギー変化の平均値は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\langle\omega'-\omega\rangle &= \frac{1}{\sigma_{\mathcal{T}}}\int(\omega'-\omega)\,d\sigma \\ &= \frac{3}{16\pi}\int_{-1}^{1} d(\cos\alpha')\int_0^{2\pi} d\phi'\;(\omega'-\omega)\,(1+\cos^2\theta) \\ &= -\frac{\beta\omega\cos\alpha}{1+\beta\cos\alpha}-\frac{k\omega}{m_e}. \end{aligned}\tag{C.14}$$

この結果を電子の運動方向，すなわち α に関して平均する．この平均値を計算するにあたり，$\cos\eta$ の -1 から $+1$ における分布は平坦であるが，$\cos\alpha$ の分布は平坦でないことに注意しよう．また，遷移確率は $d\sigma$ だけでなく，以下で与えられる相対速度にも比例していることに注意しよう*3.

$$u = \frac{|p\cdot q|}{E_e\omega} = 1-\beta\cos\eta = \frac{1-\beta^2}{1+\beta\cos\alpha}. \tag{C.15}$$

これらを用い，上で導出した光子のエネルギー変化の平均値を，電子と光子の衝突前の運動方向に関してさらに平均すると以下の結果を得る．

$$\begin{aligned}\langle\langle\omega'-\omega\rangle\rangle &= \int_{-1}^{+1}\langle\omega'-\omega\rangle\, u\, d\cos\eta \Big/ \int_{-1}^{+1} u\, d\cos\eta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\beta^2)^2}{(1+\beta\cos\alpha)^3}\left[-\frac{\beta\omega\cos\alpha}{1+\beta\cos\alpha}-\frac{k\omega}{m_e}\right] d\cos\alpha. \end{aligned}\tag{C.16}$$

β に関して 1 次の項は α に渡る積分でゼロになるので，β に関して 2 次の項，および ω/m_e に関して 1 次の項が主要な寄与をする．これらの主要な項だけ残せば，光子のエネルギー変化の割合の平均値は以下のように近似できる．

---

*2 QTF 第 1 巻，式（8.7.42）（邦訳『場の量子論 2 巻』，式（8.7.42））.

*3 QTF 第 1 巻，式（3.4.17）（邦訳『場の量子論 1 巻』，式（3.4.17））.

$$\langle\langle\omega' - \omega\rangle\rangle/\omega \simeq \frac{4}{3}\beta^2 - \frac{k}{m_e} \simeq \frac{4}{3}\beta^2 - \frac{\omega}{m_e}. \qquad \text{(C.17)}$$

光子のエネルギー変化の平均値は β^2 と ω/m_e 程度の大きさの項を含むので，光子のエネルギー変化の 2 乗平均値を計算する際にも同程度の大きさの項まで残して計算する．式（C.12）より，

$$(\omega' - \omega)^2/\omega^2 \simeq \beta^2(\cos\alpha' - \cos\alpha)^2 \qquad \text{(C.18)}$$

が得られるが，いま考えている近似の精度（次数）では u と 1，$d\cos\eta$ と $d\cos\alpha$ の違いは無視して良い．これより以下の結果を得る．

$$\begin{aligned}\langle\langle(\omega' - \omega)^2\rangle\rangle &\simeq \frac{3\beta^2\omega^2}{32\pi}\int_{-1}^{+1} d\cos\alpha \int_{-1}^{+1} d\cos\alpha' \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\phi'(\cos\alpha' - \cos\alpha)^2(1+\cos^2\theta) \\ &= \frac{2}{3}\beta^2\omega^2. \end{aligned} \qquad \text{(C.19)}$$

ここまでで得た結果はすべて，電子がある単一の速度 β を持つと仮定して導かれたものである．速度が β から $\beta + d\beta$ の間にある電子の数が，電子の温度が T_e のときのマクスウェル–ボルツマン分布 $\propto \beta^2 \exp(-m_e\beta^2/2k_{\mathcal{B}}T_e)\,d\beta$ で与えられるとすれば，β^2 の平均値は $3k_{\mathcal{B}}T_e/m_e$ となる．したがって式（C.17）と式（C.19）はそれぞれ，

$$\langle\langle\omega' - \omega\rangle\rangle \simeq \frac{4k_{\mathcal{B}}T_e}{m_e}\omega - \frac{\omega^2}{m_e}, \qquad \text{(C.20)}$$

$$\langle\langle(\omega' - \omega)^2\rangle\rangle = \frac{2k_{\mathcal{B}}T_e}{m_e}\omega^2 \qquad \text{(C.21)}$$

となる．

さて，エネルギーが ω から $\omega + d\omega$ の間にある $N(\omega)d\omega$ 個の光子が非相対論的電子からなるガスと相互作用する場合を考えよう．光子のエネルギーが $\omega \ll m_e$ のとき，光子の分布関数の変化率は以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned}\dot{n}(\omega)d\omega &= n_e \int d\omega'\, n(\omega')\, R(\omega' \to \omega)\, d\omega\, (1 + N(\omega)) \\ &\quad - n_e\, n(\omega)\, d\omega \int d\omega'\, R(\omega \to \omega')\, (1 + N(\omega')). \end{aligned} \qquad \text{(C.22)}$$

ここで n_e は電子の数密度，$R(\omega \to \omega')d\omega'$ は $u\,d\sigma$ を電子の衝突前の速度で平均したもので，衝突によって光子のエネルギーが ω と $\omega + d\omega$ の間から ω' と $\omega' +$

$d\omega'$ の間に移る過程の遷移率を表す．$N(\omega) = (2\pi\hbar)^3 n(\omega) d\omega / 8\pi\omega^2 d\omega$ はエネルギー ω を持つ光子の量子状態あたりの数（分母が $4\pi\omega^2 d\omega$ ではなく $8\pi\omega^2 d\omega$ なのは光子が 2 つの偏光状態を持つため）で，因子 $1 + N(\omega)$ と $1 + N(\omega')$ は光子がすでに占有しているエネルギー状態に遷移する誘導放射を表す．式（C.22）の 1 項目は散乱によって光子のエネルギー ω' が ω に移ることで $n(\omega)$ を増やす効果，2 項目は ω が ω' に移ることで $n(\omega)$ を減らす効果である．すでに見たように，エネルギー $\omega \ll m_e$ を持つ光子が温度 T にある電子の非相対論的ガスを通過すると，光子のエネルギーは ω/m_e や $k_{\mathcal{B}}T/m_e$ といった小さな量だけ変化する．したがって $R(\omega' \to \omega)$ や $R(\omega \to \omega')$ は $\omega' \simeq \omega$ のまわりで鋭いピークを持つから，式（C.22）の 1 項目の積分変数を ω' から $\Delta \equiv \omega - \omega'$ に変え，2 項目の積分変数を ω' から $\Delta \equiv \omega' - \omega$ に変えるのが便利である．両辺の $d\omega$ を消去し，両辺に $(2\pi\hbar)^3/8\pi\omega^2$ をかければ以下の式を得る．

$$\dot{N}(\omega) = \frac{n_e}{\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,(\omega - \Delta)^2\,N(\omega - \Delta)\,R(\omega - \Delta \to \omega)\,(1 + N(\omega))$$
$$- n_e N(\omega)\int d\Delta\,R(\omega \to \omega + \Delta)\,(1 + N(\omega + \Delta)). \qquad \text{(C.23)}$$

係数 $R(\omega - \Delta \to \omega)$ と $R(\omega \to \omega + \Delta)$ は $\Delta = 0$ に鋭いピークを持つから，式（C.23）に含まれる他の因子（および $R(\omega - \Delta \to \omega)$ と $R(\omega \to \omega + \Delta)$ の差）を Δ に関して 2 次まで展開すると，

$$\begin{aligned}
\dot{N}(\omega) = &-\frac{n_e}{\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta\Big(1 + N(\omega)\Big)\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^2\,N(\omega)\,R(\omega \to \omega + \Delta)\right] \\
&+ \frac{n_e}{2\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta^2\Big(1 + N(\omega)\Big)\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left[\omega^2\,N(\omega)\;R(\omega \to \omega + \Delta)\right] \\
&- n_e\,N(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta\,\frac{\partial N(\omega)}{\partial\omega}\,R(\omega \to \omega + \Delta) \\
&- \frac{n_e}{2}\,N(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta^2\,\frac{\partial^2 N(\omega)}{\partial\omega^2}\,R(\omega \to \omega + \Delta)
\end{aligned}$$

を得る．これは次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned}
\dot{N}(\omega) = &-\frac{n_e}{\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta\,\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^2\,N(\omega)\,R(\omega \to \omega + \Delta)\Big(1 + N(\omega)\Big)\right] \\
&+ \frac{n_e}{2\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta^2\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left[\omega^2\,N(\omega)\;R(\omega \to \omega + \Delta)\Big(1 + N(\omega)\Big)\right]
\end{aligned}$$

$$-\frac{n_e}{\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta^2\,\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^2\,N(\omega)\;R(\omega\to\omega+\Delta)\,\frac{\partial N(\omega)}{\partial\omega}\right].$$

積分と微分の順序を入れ替えれば，

$$\begin{aligned}\dot{N}(\omega) = -\frac{n_e\sigma_{\mathcal{T}}}{\omega^2}&\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega^2\,N(\omega)\left(1+N(\omega)\right)\langle\langle\omega'-\omega\rangle\rangle\right)\right.\\ &-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(\omega^2\,N(\omega)\left(1+N(\omega)\right)\langle\langle(\omega'-\omega)^2\rangle\rangle\right)\\ &\left.+\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega^2\,N(\omega)\,\langle\langle(\omega'-\omega)^2\rangle\rangle\frac{\partial N(\omega)}{\partial\omega}\right)\right]\end{aligned} \tag{C.24}$$

を得る．ここで，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta\,R(\omega\to\omega+\Delta) &= \sigma_{\mathcal{T}}\langle\langle\omega'-\omega\rangle\rangle,\\ \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta^2\,R(\omega\to\omega+\Delta) &= \sigma_{\mathcal{T}}\langle\langle(\omega'-\omega)^2\rangle\rangle\end{aligned} \tag{C.25}$$

を用いた．式（C.20）と式（C.21）でそれぞれ与えられる $\langle\langle\omega'-\omega\rangle\rangle$ と $\langle\langle(\omega'-\omega)^2\rangle\rangle$ の値を代入すれば，以下の**カンパニーツ方程式**[*4]を得る．

$$\dot{N}(\omega) = \frac{n_e\sigma_{\mathcal{T}}\,k_{\mathcal{B}}T_e}{m_e\omega^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^4\,\frac{\partial N(\omega)}{\partial\omega}\right] + \frac{n_e\sigma_{\mathcal{T}}}{m_e\omega^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^4\,N(\omega)\left(1+N(\omega)\right)\right]. \tag{C.26}$$

この式の正しさを確認するため，光子の分布関数がプランク分布で与えられ，**光子の温度が電子の温度と等しい**としよう．このとき $N(\omega) = [\exp(\omega/k_{\mathcal{B}}T_e) - 1]^{-1}$ であるから式（C.26）の 2 つの項は互いに打ち消し合い，$N(\omega)$ は変化しない．光子と電子の温度が等しいということは光子と電子が熱平衡状態にあるのだから，もちろんこの結果は期待通りのものである．さらなる確認のため，（$\omega^4 N(\omega)$ と $\omega^4\,\partial N/\partial\omega$ が両方とも $\omega=0$，$\omega\to\infty$ でゼロになるならば）光子の数 $\int_0^{\infty} 4\pi\omega^2\,N(\omega)\,d\omega$ は時間によらない，つまり光子の数が確かに保存していることに注目しよう．この結果は式（C.22）を ω に関して積分し，2 項目の ω と ω' を入れ替えることでも導ける．

---

*4　A. Kompaneets, *Zh. Exper. Teor. Fiziki* **312**+, 876 (1956).

付録**D**

エルゴード定理

宇宙論では温度や密度，あるいはスカラー場のように位置に依存し，そのゆらぎの分布がある種の確率分布に従うような変数をよく扱う．本付録では，一般的な実数の確率変数として D 次元のユークリッド座標 x の関数 $\varphi(x)$ を扱う．いくつかの確率変数を含む問題への一般化は自明である．

$\varphi(x)$ の様々な関数形の確率を与える分布関数が**一様**，すなわち異なる引数 x に対する $\varphi(x)$ の値の積の平均はそれらの引数の差にしか依存しない，と仮定すれば任意の z について以下の式が成り立つ．

$$\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)\rangle = \langle\varphi(x_1+z)\varphi(x_2+z)\cdots\varphi(x_n+z)\rangle\,. \tag{D.1}$$

x が時間座標であれば，このような分布は**定常**という．

次に，大きく離れた引数を持つ φ は互いに相関していないと仮定する．これを式で書けば，$|u|\to\infty$ に対して，

$$\begin{aligned}&\langle\varphi(x_1+u)\varphi(x_2+u)\cdots\varphi(y_1-u)\varphi(y_2-u)\cdots\rangle\\ &\quad\longrightarrow\langle\varphi(x_1+u)\varphi(x_2+u)\cdots\rangle\,\langle\varphi(y_1-u)\varphi(y_2-u)\cdots\rangle\\ &\quad=\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\rangle\,\langle\varphi(y_1)\varphi(y_2)\cdots\rangle\end{aligned} \tag{D.2}$$

となる．最後の表式では式（D.1）を用いた．

これらの条件を置くことで**エルゴード定理**として知られる重要な結果を証明できる．式（D.2）の極限への収束が十分速ければ，積 $\varphi(x_1+z)\varphi(x_2+z)\cdots$ を任意の点 z_0 のまわりの z の範囲 R に渡って平均したものと，この積のアンサンブル平均を取ったものとの差は R を大きくするにつれて $R^{-D/2}$ に比例して小さくなる．この定理を式で書いてみよう．上記の差の 2 乗平均値を，

$$\begin{aligned}&\varDelta_R^2(x_1,x_2,\cdots)\\ &\quad\equiv\left\langle\left(\int d^Dz\,N_R(z)\,\varphi(x_1+z)\varphi(x_2+z)\cdots\;-\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\rangle\right)^2\right\rangle\end{aligned} \tag{D.3}$$

と書いたとき，

$$N_R(z)\equiv(\sqrt{\pi}R)^{-D}\exp\Big(-|z-z_0|^2/R^2\Big) \tag{D.4}$$

と選べば*1，$R \to \infty$ のとき Δ_R は以下のようにゼロに近づく．

$$\Delta_R \to O(R^{-D/2}). \tag{D.5}$$

この定理を証明するため，まず条件 $\int N_R(z)\, d^D z = 1$ を用いて式（D.3）を，

$$\begin{aligned}
&\Delta_R^2(x_1, x_2, \cdots) \\
&= \left\langle \left(\int d^D z\, N_R(z) \left[\varphi(x_1 + z)\varphi(x_2 + z)\cdots - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots \rangle \right] \right)^2 \right\rangle
\end{aligned}$$

のように書き直す．2 乗を展開して再び式（D.1）と N_R の規格化条件を使い，さらに新しい積分変数 $u \equiv (z - w)/2$，$v \equiv (z + w)/2$ を導入すれば以下の式を得る．

$$\begin{aligned}
\Delta_R^2 &= \int d^D z\, N_R(z) \int d^D w\, N_R(w) \\
&\quad \times \left[\left\langle \varphi(x_1 + z)\varphi(x_2 + z)\cdots\varphi(x_1 + w)\varphi(x_2 + w)\cdots \right\rangle \right. \\
&\qquad \left. - \left\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots \right\rangle^2 \right] \\
&= \left(\frac{2}{\pi R^2} \right)^D \int d^D v\, \exp\left(-2|v - z_0|^2/R^2 \right) \int d^D u\, \exp\left(-2|u|^2/R^2 \right) \\
&\quad \times \left[\left\langle \varphi(x_1 + u)\varphi(x_2 + u)\cdots\varphi(x_1 - u)\varphi(x_2 - u)\cdots \right\rangle \right. \\
&\qquad \left. - \left\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots \right\rangle^2 \right] \\
&= \left(\frac{2}{\pi R^2} \right)^{D/2} \int d^D u\, \exp\left(-2|u|^2/R^2 \right) \\
&\quad \times \left[\left\langle \varphi(x_1 + u)\varphi(x_2 + u)\cdots\varphi(x_1 - u)\varphi(x_2 - u)\cdots \right\rangle \right. \\
&\qquad \left. - \left\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots \right\rangle^2 \right].
\end{aligned}$$

---

*1 式（D.4）で与えられるような N_R の特定の関数形は重要ではない．重要なのはこの関数が $|z - z_0|^2 \ll R^2$ のときに一定で，$|z - z_0|^2 \gg R^2$ のときに速くゼロに近づき，$\int N_R(z)\, d^D z = 1$ と規格化されているということだけである．

式（D.2）の極限への収束が十分速ければ u に渡る積分は因子 $\exp\left(-2|u|^2/R^2\right)$ がなくても収束するので，$R\to\infty$ のときにこの因子を 1 と置くことができ，最終的な表式，

$$\begin{aligned}\Delta_R^2 \longrightarrow \left(\frac{2}{\pi R^2}\right)^{D/2} &\int d^D u \\ &\times \left[\left\langle \varphi(x_1+u)\varphi(x_2+u)\cdots\varphi(x_1-u)\varphi(x_2-u)\cdots\right\rangle\right. \\ &\qquad \left. -\left\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\right\rangle^2\right] \end{aligned} \tag{D.6}$$

を得る．したがって式（D.5）を証明できた．

付録E

ガウス分布

D 次元座標 x に依存する確率変数 $\varphi(x)$ を考えよう．φ の平均値はあらかじめ差し引いておく（つまり φ の平均値はゼロ）．偶数個の φ の積の平均値を考えよう．偶数個の φ を 2 個ずつのペア（pairs）に分けてそれぞれのペアの積の平均値を取り，これらすべてのペアの積の平均値をかけ合わせる．これを可能なペアの取り方（parings）について繰り返し，最後にすべてを足し合わせる．偶数個の φ の積の平均値がこのようなペアの平均値の積の和で書けるとき，φ の確率分布関数は**ガウス的**だといわれる．以上を式で表せば，

$$\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\rangle = \sum_{\text{pairings}}\prod_{\text{pairs}}\langle\varphi\varphi\rangle \tag{E.1}$$

と書ける（ただし，1 つのペアの中で単に座標を入れ替えたものや，単にペアの積の順番を入れ替えたものは区別しない）．一方，奇数個の φ の積の平均値はゼロとなる．1 例を挙げれば，

$$\begin{aligned}\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\rangle &= \langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle\langle\varphi(x_3)\varphi(x_4)\rangle \\ &+ \langle\varphi(x_1)\varphi(x_3)\rangle\langle\varphi(x_2)\varphi(x_4)\rangle + \langle\varphi(x_1)\varphi(x_4)\rangle\langle\varphi(x_2)\varphi(x_3)\rangle.\end{aligned} \tag{E.2}$$

（もちろん奇数個の φ をペアに分けることはできないから，これからもガウス分布において奇数個の φ の積がゼロになることが理解できる.）より一般的にいえば，$2n$ 個の φ の積の平均を取る際，$(2n)!$ 個ある座標の順列の 1 つ 1 つがあるペアの取り方に対応する（たとえば積の最初の φ が 2 番目とペアになり，3 番目が 4 番目とペアになる，等）が，これらのうち $2^n n!$ 個はそれぞれのペアの中の 2 つの座標を入れ替えたり，n 個のペアの順番を組み替えたりしただけのものだから，実際に独立なペアの数は $(2n)!/2^n n!$ である．

もし $\varphi(x)$ がガウス分布に従うなら，$\varphi(x)$ の線形汎関数もまたガウス分布に従う．たとえば，以下の形の線形汎関数を考えよう．

$$F_i[\varphi] \equiv \int d^D x\, f_i(x)\,\varphi(x). \tag{E.3}$$

式（E.2）に $f_1(x_1)\,f_2(x_2)\,f_3(x_3)\,f_4(x_4)$ をかけて積分すれば以下を得る．

$$\langle F_1 F_2 F_3 F_4 \rangle = \langle F_1 F_2 \rangle \langle F_3 F_4 \rangle + \langle F_1 F_3 \rangle \langle F_2 F_4 \rangle + \langle F_1 F_4 \rangle \langle F_2 F_3 \rangle. \tag{E.4}$$

このような分布がガウス的だと呼ばれるのは，φ の一般的な線形汎関数 $F[\varphi] = \int d^D x f(x)\varphi(x)$ の確率分布が取る関数形による．$\langle F^{2n}[\varphi] \rangle$ に含まれる $(2n)!/2^n n!$ 個の組み合わせの１つ１つは同じ寄与 $\langle F^2[\varphi] \rangle^n$ を持つので，

$$\langle F^{2n}[\varphi] \rangle = \langle F^2[\varphi] \rangle^n (2n)!/2^n n! \tag{E.5}$$

となる．これは，この汎関数が F と $F + dF$ の間にある確率 $P(F)\,dF$ がガウス関数となることを意味する．

$$P(F)\,dF = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle F^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{F^2}{2\langle F^2 \rangle} \right) dF. \tag{E.6}$$

この種の分布は，$\varphi(x)$ が独立なゆらぎを持つ多くの項の和で与えられるときに頻繁に現れる．このような和の分布は**中心極限定理**によりガウス関数となる．いま最も興味のある場合でいえば，宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎはほぼガウス的と考えられているが，それは温度ゆらぎが１つ，あるいは複数のほぼ自由な（つまりほぼ相互作用のない）量子場の量子ゆらぎから生じているからである（これに関しては 10 章で議論する）．

付録F

ニュートン力学的宇宙論

宇宙のエネルギー密度が冷たい暗黒物質によって支配されている時期のゆらぎのふるまいはニュートン力学で十分扱うことができる．この手法は，2.6 節で宇宙マイクロ波背景放射の異方性の初歩を学ぶ際，および 8.1 節で物質の大規模構造を扱う際に用いる．

質量密度 ρ と速度 $\boldsymbol{v}$ を持ち，圧力がゼロで重力ポテンシャルが ϕ の流体の運動を記述する非相対論的流体力学の方程式，およびニュートンの重力理論の方程式は，連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \Big(\boldsymbol{v}\rho\Big) = 0, \tag{F.1}$$

オイラーの式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \Big(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Big)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla}\phi, \tag{F.2}$$

およびポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho \tag{F.3}$$

である．これらの方程式から得られる非摂動解は（摂動解と区別するため棒線を付与して書くと）

$$\bar{\rho} = \rho_0 (a_0/a)^3, \quad \bar{\boldsymbol{v}} = H\boldsymbol{X}, \quad \bar{\phi} = 2\pi G\bar{\rho}\boldsymbol{X}^2/3 \tag{F.4}$$

で与えられる．ここで $H \equiv \dot{a}/a$ で，a_0 と ρ_0 は定数である．$a(t)$ は以下の式を満たし，

$$\dot{a}^2 + K = 8\pi G\bar{\rho}a^2/3, \tag{F.5}$$

K は定数である（ここで $\boldsymbol{X}$ は通常のユークリッド的座標ベクトルを表す．共動座標ベクトル $\boldsymbol{x}$ と混同しないように注意しよう）．これはもちろんロバートソン–ウォーカー計量を持つ宇宙論に対応し，実際，1.5 節でフリードマン方程式（F.5）の別の導出法としてこの解をすでに見ている．特に，共動的な物体の運動方程式 $d\boldsymbol{X}/dt = \bar{\boldsymbol{v}} = H\boldsymbol{X}$ の解は $\boldsymbol{X}(t) = [a(t)/a(t_0)]\boldsymbol{X}(t_0)$ で，これは式（1.5.22）と一致する．よって共動座標は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}/a$ で与えられる．

この ρ，$\boldsymbol{v}$，ϕ の非摂動解に小さな摂動 $\delta\rho$，$\delta\boldsymbol{v}$，$\delta\phi$ を加えよう．式（F.1）–（F.3）よりこれらの摂動に関して 1 次の項を取り出せば以下の式を得る．

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + 3H\delta\rho + H\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta\rho + \bar{\rho}\boldsymbol{\nabla}\cdot\delta\boldsymbol{v} = 0, \tag{F.6}$$

$$\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} + H\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{v} + H\delta\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla}\delta\phi, \tag{F.7}$$

$$\nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho. \tag{F.8}$$

式（F.6）–（F.8）は並進変換に対して不変でないように見えるが，並進対称性はこれらの方程式を共動座標 $\boldsymbol{X}/a$ を用いて書き換えることで明らかになる．そのためには摂動を共動座標に関してフーリエ変換するのが便利である．

$$\delta\rho(\boldsymbol{X},t) = \int d^3q\ \exp\left(\frac{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{X}}{a(t)}\right)\delta\rho_{\boldsymbol{q}}(t), \tag{F.9}$$

$\delta\boldsymbol{v}$，$\delta\phi$ も同様にフーリエ変換する．すると偏微分方程式（F.6）–（F.8）は以下のような常微分方程式の形に書ける．

$$\frac{d\delta\rho_{\boldsymbol{q}}}{dt} + 3H\delta\rho_{\boldsymbol{q}} + ia^{-1}\bar{\rho}\,\boldsymbol{q}\cdot\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}} = 0, \tag{F.10}$$

$$\frac{d\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}}}{dt} + H\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}} = -ia^{-1}\boldsymbol{q}\delta\phi_{\boldsymbol{q}}, \tag{F.11}$$

$$\boldsymbol{q}^2\delta\phi_{\boldsymbol{q}} = -4\pi Ga^2\delta\rho_{\boldsymbol{q}}. \tag{F.12}$$

式（F.10）–（F.12）の解は，3 次元回転に対して従属変数がどう変換するかによって以下のように分類できる．

ベクトル型： ベクトル型の解では，すべてのスカラーはゼロとなる．$\delta\rho_{\boldsymbol{q}}$ と $\delta\phi_{\boldsymbol{q}}$ だけではなく，$\boldsymbol{q}\cdot\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}}$ もゼロとなる．すると式（F.10）と式（F.12）は自動的に満たされ，式（F.11）からは，

$$\frac{d\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}}}{dt} + H\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}} = 0 \tag{F.13}$$

が得られる．解は単純に $\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}} \propto 1/a$ である．このようにベクトル型の解は減衰してしまうので，ほとんどの場合において無視される．

スカラー型： スカラー型の解では，速度場の摂動 $\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},t)$ は速度のスカラーポテンシャルの摂動 $\delta u(\boldsymbol{X},t)$ の（$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}/a$ に関する）勾配として書ける．フーリエ変換すれば，

$$\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}} = i\boldsymbol{q}\,\delta u_{\boldsymbol{q}} \tag{F.14}$$

を得る．式（F.12）を用いて $\delta\phi_{\boldsymbol{q}}$ を消去すれば，式（F.11）は，

$$\frac{d\delta u_{\boldsymbol{q}}}{dt} + H\delta u_{\boldsymbol{q}} = -a^{-1}\delta\phi_{\boldsymbol{q}} = \frac{4\pi Ga}{\boldsymbol{q}^2}\delta\rho_{\boldsymbol{q}} \tag{F.15}$$

となり，式（F.10）は，

$$\frac{d\delta\rho_{\boldsymbol{q}}}{dt} + 3H\delta\rho_{\boldsymbol{q}} - a^{-1}\bar{\rho}\,\boldsymbol{q}^2\delta u_{\boldsymbol{q}} = 0 \tag{F.16}$$

となる．さて，$K=0$ のときに $4\pi G\bar{\rho} = 3H^2/2$ であることを思い出そう．$\bar{\rho} \propto a^{-3}$ と H の定義を用いれば上記の方程式から $\delta u_{\boldsymbol{q}}$ を消去でき，密度ゆらぎに関する 2 階の微分方程式，

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\rho_{\boldsymbol{q}}}{\bar{\rho}}\right)\right) - \frac{3}{2}H^2a^2\left(\frac{\delta\rho_{\boldsymbol{q}}}{\bar{\rho}}\right) = 0 \tag{F.17}$$

を得る．さらに $K=0$ のときに $a \propto t^{2/3}$，$H = 2/3t$ であることを思い出せば以下の式を得る．

$$\frac{d}{dt}\left(t^{4/3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\rho_{\boldsymbol{q}}}{\bar{\rho}}\right)\right) - \frac{2}{3}t^{-2/3}\left(\frac{\delta\rho_{\boldsymbol{q}}}{\bar{\rho}}\right) = 0. \tag{F.18}$$

この式の一般解は $t^{2/3}$ と t^{-1} の線形結合で書ける．光子の最終散乱の時刻までには最初の項 $\delta\rho_{\boldsymbol{q}}/\bar{\rho} \propto t^{2/3} \propto a$ だけが生き残っていると考えて良い．平均密度 $\bar{\rho}(t)$ は $a^{-3}(t)$ に比例するから，$\delta\rho_{\boldsymbol{q}}(t) \propto a^{-2}(t)$ を得る．これを式（F.12）に代入すれば $\delta\phi_{\boldsymbol{q}}$ が時間に依存しないことが示せる．この結果は 2.6 節で用いた．

以上が式（F.10)–(F.12）の最も一般的な解であることを確認するには，単に方程式の数と解の数を数えてみれば良い．式（F.12）を用いて $\delta\phi_{\boldsymbol{q}}(t)$ を消去すれば式（F.10）と式（F.11）は $1+3=4$ 本の 1 階の微分方程式を構成するから，4 つの 1 次独立な解があるはずである．これまでに 2 つの独立なベクトル型の解（$\boldsymbol{q}$ に垂直な 2 つの方向に対応する）と 2 つの独立なスカラー型の解（$t^{2/3}$ と t^{-1} に比例する $\delta\rho_{\boldsymbol{q}}/\bar{\rho}$）を見つけたので，これらは確かに最も一般的な解である．

圧力がゼロでない場合や $K \neq 0$ の場合は，G&C の 15.9 節で詳しく扱っている．

付録G
光子の偏光

光子の偏光は宇宙論において重要な役割を果たす．宇宙マイクロ波背景放射から光子の偏光を観測できるだけでなく，スカラー型摂動とテンソル型摂動の重力場の方程式に現れる非等方ストレスにも寄与する．この付録では，個々の光子のスピン状態を記述するのに使える，光子の偏光ベクトルとそれに関係する密度行列，および重力場中の光子の偏光ベクトルと密度行列の時間依存性を決める一風変わった平行移動の方程式を紹介する．

まず，重力場がない場合の光子の偏光の取り扱い方を復習しておこう．1個の光子の純粋状態を記述する最も一般的な状態は線形結合 $\alpha_+\Psi_+ + \alpha_-\Psi_-$ で書ける．$\Psi_\pm$ はヘリシティが ∓ 1 の状態（つまり，光子の到来方向 $\hat{n}$[*1]に沿う角運動量ベクトルの成分の固有状態で固有値は $\sigma = \pm\hbar$，規格化は $(\Psi_\sigma, \Psi_{\sigma'}) = \delta_{\sigma\sigma'}$），$\alpha_\pm$ は規格化条件 $|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1$ を満たす複素数である．この状態を表すのに偏光ベクトル $\boldsymbol{e} = \alpha_+\boldsymbol{e}_+ + \alpha_-\boldsymbol{e}_-$ を用いる（規格化は $\boldsymbol{e}^* \cdot \boldsymbol{e} = 1$）．ここで，$\boldsymbol{e}_\pm$ はヘリシティ ∓ 1 の光子を表す偏光ベクトルである．たとえば，方向，

$$\hat{n} = (\sin\theta\,\cos\phi,\ \sin\theta\,\sin\phi,\ \cos\theta) \tag{G.1}$$

から到来する1個の光子を表す偏光ベクトルは，

$$\boldsymbol{e}_\pm = (\hat{\theta} \pm i\hat{\phi})/\sqrt{2} \tag{G.2}$$

と書ける[*2]．ここで，$\hat{\theta}$，$\hat{\phi}$ は $\hat{n}$ に垂直な平面上で互いに直交する単位ベクトルを表す．

$$\hat{\theta} \equiv (\cos\theta\,\cos\phi,\ \cos\theta\sin\phi,\ -\sin\theta)\,, \qquad \hat{\phi} \equiv (-\sin\phi,\ \cos\phi\,, 0)\,. \tag{G.3}$$

直線偏光する光子は $|\alpha_+| = |\alpha_-|$ を持つので，（全体にかかる重要でない位相の因子を除けば）その偏光ベクトルは実数である．逆の場合は円偏光で，$|\alpha_+|$ と $|\alpha_-|$ のどちらかがゼロになる．これら2つの極端な例の間に位置するのが楕円偏光で，

---

*1 これは光子の運動方向とは逆方向なので，光子の運動方向に沿う角運動量ベクトルの成分であるヘリシティは，光子の到来方向に沿う成分とは符号が逆になる．そのため，ここではヘリシティが ∓ 1 の光子の状態を記述するのに添字 $\pm$ を用いている．

*2 空の小さな領域における偏光の相関を記述する場合には，この領域の方向 $\hat{n}$ が z 軸となるような座標系を選ぶのが便利である．すると，1個の光子を表す偏光ベクトルは単純に $(1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$ となる．

$|\alpha_+|$ と $|\alpha_-|$ は等しくないが，どちらもゼロでない．

一般に，個々の光子が様々な純粋状態 $\Psi_m = \alpha_{m+}\Psi_+ + \alpha_{m-}\Psi_-$ の 1 つにある確率を P_m としよう．すると量子力学の規則により，光子を偏光ベクトル $\boldsymbol{e} = \alpha_+\boldsymbol{e}_+ + \alpha_-\boldsymbol{e}_-$ で表されるある状態 $\Psi = \alpha_+\Psi_+ + \alpha_-\Psi_-$ に見いだす確率は

$$P(\boldsymbol{e}) = \sum_m P_m|(\Psi_m, \Psi)|^2 = \sum_m P_m|\alpha^*_{m+}\alpha_+ + \alpha^*_{m-}\alpha_-|^2 = \boldsymbol{e}^{*i}\boldsymbol{e}^j N^{ij} \tag{G.4}$$

で与えられる．ここで N^{ij} は以下で定義される光子の**密度行列**を表す．

$$N^{ij} \equiv \sum_m P_m\, e^i_m\, e^{j*}_m\ . \tag{G.5}$$

（重複する i，j などの添字は座標の添字 1，2，3 に渡って和をとるものとする．）確率は正の実数なので，行列 N^{ij} は正のエルミート行列となる．

$$N^{ij*} = N^{ji}\ , \quad N^{ij}\xi^i\xi^{j*} \geqq 0 \quad (\text{すべての } \xi^i \text{ に対して})\ , \tag{G.6}$$

また，$\sum_m P_m = 1$ かつ $e^i_m e^{i*}_m = 1$（ただし重複する m に関しては和をとらない）なので，この行列のトレースは 1 である．

$$N^{ii} = 1\ . \tag{G.7}$$

光子の偏光ベクトルは光子の運動方向 $-\hat{n}$ と直交するので，密度行列は

$$N^{ij}\,\hat{n}^i = N^{ij}\,\hat{n}^j = 0\ , \tag{G.8}$$

を満たす．非相対論的な電子による光の散乱では円偏光は生じないので，宇宙マイクロ波背景放射の光子はすべて直線偏光していると考えられる．その場合，N^{ij} は実数となる．

これまでは，重力がない場合の偏光ベクトル e^i を光子の運動方向に垂直な単位 3 元ベクトルとして定義してきた．重力場中での偏光ベクトルを，4 つの成分を持つ量 e^μ（ただし $e^0 = 0$）の空間成分として定義してみよう．この量は以下の条件を満たすものとする．

$$p_i\, e^i = p_\mu e^\mu = 0\ , \quad g_{ij}e^i e^{j*} = g_{\mu\nu}e^\mu e^{\nu*} = 1\ , \tag{G.9}$$

ここで $p^\mu = g^{\mu\nu}p_\nu$ は光子の 4 元運動量を表す[*3]．しかし，この量は明らかに 4

[*3] 局所慣性系に張った座標系 ξ^α で定義した光子の偏光ベクトル $e^i_{\text{慣性系}}$ から出発し，一般座標系 x^μ で定義した重力場中の e^μ を構築するには，以下のようにすれば良い．

$$e^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} e^i_{\text{慣性系}} + \beta p^\mu\ ,$$

ただし，β は $e^0 = 0$ となるように選ぶ．

元ベクトルとして変換しないので，その時間依存性が平行移動の式（B.69）で与えられるとは考えられない．実際，平行移動の式に従うとするならば条件 $e^0 = 0$ は光子の軌跡 $x^i = x^i(t)$ に沿って維持されないので，確かに e^μ は平行移動の式に従わない.（平行移動によって条件 $e^0 = 0$ が光子の軌跡に沿って維持されるには $\Gamma^0_{ij}(\boldsymbol{x}(t), t)$ がゼロである必要があるが，これはたいていの場合ゼロではない.）その代わり，アフィン接続 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Big(x(t)\Big)$ がゼロとなる局所慣性系では，ゲージ変換の自由度 $e^\mu \to e^\mu + \alpha p^\mu$ を除けば光子の偏光ベクトルは時間に依存しないと考えられるので，場の強さ $p^\mu e^\nu - p^\nu e^\mu$ のようなゲージ不変な量は時間に依存しない．したがって，一般座標系での光子の偏光ベクトルの平行移動はゲージ変換の項を含む.

$$\frac{de^\mu(t)}{dt} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Big(x(t)\Big)e^\nu(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt} + \alpha(t)\frac{dx^\mu(t)}{dt} \ . \tag{G.10}$$

ゲージ変換のパラメータ $\alpha(t)$ は条件 $e^0 = 0$ が維持される，つまり $de^0/dt = 0$ となるように決める.

$$\alpha(t) = \Gamma^0_{\nu\lambda}\Big(x(t)\Big)e^\nu(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt} \ . \tag{G.11}$$

式（G.10）で $e^0 = 0$ とすれば以下の結果を得る.

$$\frac{de^j(t)}{dt} = \left[-\Gamma^j_{i\lambda}\Big(x(t)\Big) + \Gamma^0_{i\lambda}\Big(x(t)\Big)\frac{dx^j(t)}{dt}\right] e^i(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt} \ . \tag{G.12}$$

式（G.9）で与えられる条件は時間が経っても維持されることを確認しておこう．$p_\mu e^\mu$ と $g_{\mu\nu}e^\mu e^\nu$ はスカラーなので通常の平行移動のもとで維持され，$p_\mu p^\mu = 0$, $p_\mu e^\mu = 0$ であるからゲージ変換のもとでも維持される.

重力場がある場合でも密度行列 N^{ij} は式（G.5）で定義し，行列がエルミート的かつ正である条件式（G.6）もそのまま適用するが，式（G.7）と式（G.8）は以下の式に取って代わられる.

$$g_{ij}N^{ij} = 1 \ , \quad p_iN^{ij} = p_jN^{ij} = 0 \ . \tag{G.13}$$

式（G.12）より，重力場中を運動する光子の密度行列は以下の平行移動の式を満たすことが導かれる.

$$\frac{dN^{ij}(t)}{dt} = \left[-\mathit{\Gamma}^i_{k\lambda}\Big(x(t)\Big) + \mathit{\Gamma}^0_{k\lambda}\Big(x(t)\Big)\frac{dx^i(t)}{dt}\right] N^{kj}(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt}$$
$$+ \left[-\mathit{\Gamma}^j_{k\lambda}\Big(x(t)\Big) + \mathit{\Gamma}^0_{k\lambda}\Big(x(t)\Big)\frac{dx^j(t)}{dt}\right] N^{ik}(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt}\ . \tag{G.14}$$

付録H 相対論的ボルツマン方程式

この付録では，ニュートリノと光子が従うボルツマン方程式を導く．ボルツマン方程式は，これら相対論的粒子の位相空間における分布関数の進化を与える方程式である．これは，広く利用されているスカラー型摂動の進化の数値計算結果を，6.1 節で説明をする際の基礎となる．加えて，本節で導く結果は，6.6 節で自由に運動するニュートリノの非等方ストレスによってテンソル型摂動が減衰する効果を計算する際や，7.4 節で非等方的に分布する光子を非相対論的電子が散乱することで生成される宇宙マイクロ波背景放射の偏光を計算する際に必要となる．ここでは，散乱が無視できるため簡単に扱えるニュートリノの計算をまず学んだ後，散乱が本質的な役割を果たすため複雑となる光子の計算を学ぶ．光子の計算結果の初歩的な応用例として，光子と荷電粒子からなる系における音波の減衰率の公式を導く（この公式は 6.4 節で用いた）．

ここでは，座標系を，

$$g_{00} = -1 \,, \qquad g_{i0} = 0 \tag{H.1}$$

となるように選び，$g_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ は任意関数とする．線形近似では，テンソル型摂動では自動的にこの計量が得られ，スカラー型摂動では同期ゲージを用いることでこの計量が得られる．しかし，しばらくの間は線形摂動の場合に限らず一般的な議論を展開する．この計量から得られるゼロでないアフィン接続の成分は以下で与えられる．

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \,, \tag{H.2}$$

$$\Gamma^j_{i0} = \frac{1}{2} g^{jk} \dot{g}_{ki} \,, \qquad \Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij} \,. \tag{H.3}$$

H.1 ニュートリノ

ニュートリノの分布関数 $n_\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$ を次のように定義すると良い．

$$n_\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) \equiv \sum_r \left(\prod_{i=1}^{3} \delta(x^i - x^i_r(t)) \right) \left(\prod_{i=1}^{3} \delta(p_i - p_{ri}(t)) \right) \,, \tag{H.4}$$

ここで，r は個々のニュートリノ（あるいは反ニュートリノ）の軌跡を表す添字を表す．この表式は数密度の定義に従う．つまり，n_ν を位相空間の体積で積分したものは，その体積中に含まれるニュートリノの個数に等しい．付録 B の B.4 節に従い，式（H.4）の運動量変数は $p_{ri} = g_{ij}\, p_r^j$ によって定義する．p^μ は 4 元運動量ベクトルを表す．

$$p_r^\mu \equiv dx_r^\mu / du_r \, . \tag{H.5}$$

ここで，u_r は適当に規格化されたアフィンパラメータで，時空の軌跡は式（B.12）を満足する．

$$\frac{d^2 x_r^\lambda}{du_r^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x_r)\frac{dx_r^\mu}{du_r}\frac{dx_r^\nu}{du_r} = 0 \, . \tag{H.6}$$

すると，衝突と衝突の合間の運動量の変化率は以下で与えられる．

$$\dot{p}_{ri} = \frac{1}{2p_r^0} p_r^j p_r^k \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_r} \, . \tag{H.7}$$

一方，座標の変化率は以下のように書ける．

$$\dot{x}_r^i = p_r^i / p_r^0 \, . \tag{H.8}$$

衝突がない場合には，式（H.4），(H.7)，(H.8）から n_ν がボルツマン方程式を満たすことを直接導くことができる．

$$\frac{\partial n_\nu}{\partial t} + \frac{\partial n_\nu}{\partial x^i}\frac{p^i}{p^0} + \frac{\partial n_\nu}{\partial p_i}\frac{p^j p^k}{2p^0}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 0 \, . \tag{H.9}$$

ここで，p^i，p^0 は独立変数 p_i とそれぞれ $p^i = g^{ij}(\boldsymbol{x},t)p_j$，$p^0 = \left(g^{ij}(\boldsymbol{x},t)p_i p_j\right)^{1/2}$ のように関係しているため，p_i だけでなく位置と時刻にも依存することを理解しておこう．

ここで，微小な摂動に特化した議論に移ろう．計量の空間成分を，

$$g_{ij}(\boldsymbol{x},t) = a^2(t)\delta_{ij} + \delta g_{ij}(\boldsymbol{x},t) \tag{H.10}$$

と書き，δg_{ij} は微小な量とする．計量の摂動が微小なので，ニュートリノの分布関数は熱平衡分布から大きくずれることはない．したがって，ニュートリノの分布関数を以下のように書こう．

$$n_\nu(\boldsymbol{x},t) = \bar{n}_\nu\left(a(t)\sqrt{g^{ij}(\boldsymbol{x},t)p_i p_j}\right) + \delta n_\nu(\boldsymbol{x},t) \, , \tag{H.11}$$

ここで,

$$\bar{n}_\nu(p) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\left[\exp\left\{p/(k_{\mathcal{B}}a(t)\bar{T}(t))\right\}+1\right]^{-1} \tag{H.12}$$

で,δn_ν は微小な摂動だとする(式(H.11)の $\bar{n}$ の引数にある因子 $a(t)$ は,式(H.12)の $\bar{T}(t)$ にかかる因子 $a(t)$ によって相殺されることに着目しよう.式(H.11),(H.12)にこの因子を含めておいたのは,いま興味のある時刻では $\bar{T} < 10^{10}$ K で温度は $\bar{T}(t) \propto 1/a(t)$ のように変化するから,式(H.12)のように定義された $\bar{n}_\nu$ はその引数に関して時間によらない関数となることによる).式(H.11)の初項は,局所慣性系における分布関数が熱平衡分布で与えられるとき,等価原理から示唆される(摂動を含む)重力場におけるニュートリノの分布関数である.したがって,第 2 項 δn_ν はニュートリノ分布関数の平衡分布からのずれを表す.

δn_ν の初期条件は以下のようにして求める.温度が $\bar{T}_1 \approx 10^9$ K である時刻を初期時刻 t_1 にとる.この時刻でのニュートリノの散乱率は宇宙の膨張率よりもずっと小さいが,計量の摂動によってニュートリノの分布関数が**局所的**熱平衡分布からずれるほどの時間は経過していない.したがって,分布関数は熱平衡分布の形をとるが,その温度は摂動を含む温度である.以上の議論から,便利な初期条件として以下の形を用いる.

$$\delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t_1) = -p\bar{n}'_\nu(p)\left[\frac{\delta T(\boldsymbol{x},t_1)}{\bar{T}(t_1)} + \frac{\hat{p}_k\cdot\delta u_k(\boldsymbol{x},t_1)}{a(t_1)}\right], \tag{H.13}$$

ただし $\bar{T}(t_1) \approx 10^9$ K である.角括弧中の第 2 項はニュートリノの自由運動速度 $\delta\boldsymbol{u}$ によるドップラー効果を表す.これは,式(2.4.5)と(2.4.6)に見られる宇宙マイクロ波背景放射の光子のドップラー効果と同じものである.局所的熱平衡状態では,この速度摂動はバリオンと光子の速度摂動に等しい(物理的な位置ベクトルは ax^k なので,物理的な速度ベクトルは $au^k = a^{-1}u_k$ で与えられることを覚えておこう).

計量と密度の摂動に関して 1 次の精度では,式(H.9)は,

$$\begin{aligned}0 = &\frac{\partial\delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial t} + \frac{\partial\delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial x^i}\frac{p_i}{a(t)p}\\ &+\frac{\bar{n}'_\nu(p)}{2p}\frac{\partial}{\partial t}\Big(a^2(t)\delta g^{ij}(\boldsymbol{x},t)\Big)p_ip_j\\ &+\frac{a(t)\bar{n}'_\nu(p)}{2p^2}\frac{\partial\delta g^{ij}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x^k}p_ip_jp_k\end{aligned}$$

$$+\bar{n}'_\nu(p)\frac{p_i p_j p_k}{2a^3(t)\,p^2}\frac{\partial \delta g_{ij}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x^k}$$

となる．ここで，$p \equiv \sqrt{p_i p_i}$ である（最後から 3 番目と 2 番目の項は，式（H.11）の $\bar{n}_\nu$ の引数が $a^2(t)g^{ij}(\boldsymbol{x},t_1)p_i p_j$ を通して t と $\boldsymbol{x}$ に依存することから生じる）．摂動 1 次の精度では $g^{ij} = a^{-2}\delta_{ij} - a^{-4}\delta g_{ij}$ なので，右辺の最後から 2 番目の項と最後の項は相殺するから，以下のより単純な結果を得る．

$$\frac{\partial \delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}_i}{a(t)}\frac{\partial \delta n_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial x^i} = \frac{p\bar{n}'(p)}{2}\hat{p}_i\hat{p}_j\frac{\partial}{\partial t}\Big(a^{-2}(t)\delta g_{ij}(\boldsymbol{x},t)\Big)\,, \tag{H.14}$$

ここで再び $p \equiv \sqrt{p_k p_k}$ で，いつものように $\hat{p}_i \equiv p_i/p$ を用いた．

H.2　光子

光子の散乱を考慮しなくてはいけないため，光子のボルツマン方程式はニュートリノのボルツマン方程式よりずっと複雑なものになる．散乱は光子の偏光を変えるため，ニュートリノの場合とは異なり各々の光子のヘリシティ状態に関して別々のボルツマン方程式を立てることはできない．代わりに，**数密度行列**，

$$n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) \equiv \sum_r \left(\prod_{k=1}^{3}\delta\Big(x^k - x_r^k(t)\Big)\right)\left(\prod_{k=1}^{3}\delta\Big(p_k - p_{rk}(t)\Big)\right)N_r^{ij}(t) \tag{H.15}$$

を定義する．r は個々の光子の軌跡を表す添字で，$N_r^{ij}(t)$ は r 番目の光子の偏光密度行列を表す．付録 G で学んだように，もし 1 つの光子の状態が様々な偏光ベクトル e_m^i のうちの 1 つを確率 P_m で選ぶならば，その光子は以下の偏光密度行列を持つ．

$$N^{ij} \equiv \sum_m P_m e_m^i e_m^{j*}\,. \tag{H.16}$$

偏光密度行列 N^{ij} を持つ光子の偏光がある方向 e^i を向いているか，あるいはそれに直交する方向を向いているかを観測すれば，確率 $g_{ik}g_{jl}e^{*i}e^jN^{kl}$ が求まる．一般的な 3 次元計量 g_{ij} のもとで 3 元運動量 p_i を持つ光子に対しては，光子の偏光ベクトルは以下の条件を満たすように定義されることに注意しよう．

$$p_i e^i = 0\,, \qquad g_{ij}e^ie^{j*} = 1. \tag{H.17}$$

したがって，r 番目の光子の偏光密度行列は以下の条件を満たし，

$$p_{ri}(t)N_r^{ij}(t) = p_{ri}(t)N_r^{ji}(t) = 0\,, \qquad g_{ij}\Big(\boldsymbol{x}_r(t),t\Big)N_r^{ij}(t) = 1\,, \tag{H.18}$$

数密度行列も同様の条件を満たす.

$$p_i n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) = p_i n_\gamma^{ji}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) = 0 \,, \qquad g_{ij}(\boldsymbol{x},t) n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) = n_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) \,, \tag{H.19}$$

ここで, $n_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ は式 (H.4) と同様に定義される光子の位相空間数密度である. 定義より, $N_r^{ij}(t)$ と $n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ はともにエルミート行列である.

付録 G で学んだように, 衝突と衝突の合間の偏光ベクトルの時間依存性は, $e_r^\mu(t)$ の時間成分をゼロのまま維持するため, 平行移動の式にゲージ変換の自由度を組み合わせたもので次のように与えられる.

$$\frac{de_r^j(t)}{dt} = \left[-\Gamma_{i\lambda}^j \Big(\boldsymbol{x}_r(t), t \Big) + \Gamma_{i\lambda}^0 \Big(\boldsymbol{x}_r(t), t \Big) \frac{dx_r^j(t)}{dt} \right] e_r^i(t) \frac{dx_r^\lambda(t)}{dt} \,. \tag{H.20}$$

その結果, r 番目の光子の密度行列の時間依存性は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{dN_r^{ij}(t)}{dt} &= \left[-\Gamma_{k\lambda}^i \Big(\boldsymbol{x}_r(t), t \Big) + \Gamma_{k\lambda}^0 \Big(\boldsymbol{x}_r(t), t \Big) \frac{dx_r^i(t)}{dt} \right] N_r^{kj}(t) \frac{dx_r^\lambda(t)}{dt} \\ &\quad + \left[-\Gamma_{k\lambda}^j \Big(\boldsymbol{x}_r(t), t \Big) + \Gamma_{k\lambda}^0 \Big(\boldsymbol{x}_r(t), t \Big) \frac{dx_r^j(t)}{dt} \right] N_r^{ik}(t) \frac{dx_r^\lambda(t)}{dt} \,. \end{aligned} \tag{H.21}$$

変数 $p_{ri}(t)$, $x_r^i(t)$ の時間依存性はニュートリノの時の式 (H.7), (H.8) と同じ式で与えられる. すると, 式 (H.15), (H.21), (H.7), (H.8) から $n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ がボルツマン方程式を満たすことを直接導ける.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial n_\gamma^{ij}}{\partial t} + \frac{\partial n_\gamma^{ij}}{\partial x^k}\frac{p^k}{p^0} + \frac{\partial n_\gamma^{ij}}{\partial p_k}\frac{p^l p^m}{2p^0}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} \\ &\quad + \left(\Gamma_{k\lambda}^i - \frac{p^i}{p^0}\Gamma_{k\lambda}^0 \right) \frac{p^\lambda}{p^0} n_\gamma^{kj} \\ &\quad + \left(\Gamma_{k\lambda}^j - \frac{p^j}{p^0}\Gamma_{k\lambda}^0 \right) \frac{p^\lambda}{p^0} n_\gamma^{ik} = C^{ij} \,, \end{aligned} \tag{H.22}$$

ここで, C^{ij} は光子の散乱の効果を表す.(式 (H.22) において, p^i, p^0 はそれぞれ $p^i \equiv g^{ij} p_j$, $p^0 = [g^{ij} p_i p_j]^{1/2}$ で与えられるので $\boldsymbol{x}$, t, p_j の関数であることを思い出しておこう.)

式 (H.22) の衝突項 C^{ij} を計算するため, まず手始めに平坦な時空 $g_{ij} = \delta_{ij}$ の場合を考えよう. 無偏光, あるいは直線偏光した光子のトムソン散乱は直線偏光した光子しか生成しないので, ここでは直線偏光しか考えない. すると偏光ベ

クトルは実数となり，偏光密度行列と数密度行列は実対称行列となる．まず最初に電子が静止している場合を考え，その後（スカラー型摂動を扱う際）にプラズマの速度がゼロでない場合を扱う．

散乱によって光子の運動量 $\boldsymbol{p}$ が他の方向を向けば $n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ は減少するが，それは C^{ij} の以下の項によって記述できる．

$$C_-^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) = -\omega_c(t) n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\ , \tag{H.23}$$

ここで $\omega_c(t)$ は全衝突率を表す．(ここではこれまで通り n_γ^{ij} と C^{ij} を上付き添字で書いているが，もちろん平坦な時空では反変空間テンソルと共変空間テンソルの区別はない.）また，ある初期運動量 $\boldsymbol{p}_1$ を持つ光子が散乱によって運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つようになれば $n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ は増加する．このとき，($|\boldsymbol{p}| \ll m_e$) を仮定すれば）エネルギー保存より $|\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}|$ である．クライン–仁科の公式[*1]によれば，運動量 p_{1i}，実偏光ベクトル e_1^i を持つ光子が静止する電子によって散乱されたとき，終状態の光子の実偏光ベクトルが e^i である確率は $(e\cdot e_1)^2$ のみに比例し，光子の初期運動量 p_{1i} や終運動量 p_i にはよらない（ただし，もちろん e_1^i，e^i はそれぞれ p_{1i}，p_i と直交しなくてはいけない）．もし始状態の光子が確率 P_n で様々な偏光ベクトル e_{1n}^i を持つならば，対応する終状態の光子が偏光ベクトル e^i を持つ確率は $e^ie^jN_1^{ij}$ に比例する（ただし $N_1^{ij} = \sum_n P_n e_{1n}^i e_{1n}^j$）．すでに述べたように，この確率は $e^ie^jN^{ij}$（N^{ij} は終状態の光子の偏光密度行列）と等しくなければならない．したがって，条件 $p_iN^{ij}=0$，$N^{ii}=1$ を考慮すれば，散乱された光子の偏光密度行列は以下で与えられることがわかる．

$$N^{ij}(\hat{p}) = S^{-1}(\hat{p})\Big[N_1^{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_kN_1^{kj} - \hat{p}_j\hat{p}_kN_1^{ik} + \hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_lN_1^{kl}\Big]\ , \tag{H.24}$$

ここで，

$$S(\hat{p}) \equiv 1 - \hat{p}_i\hat{p}_jN_1^{ij} \tag{H.25}$$

である．すると，任意の方向 $\hat{p}_1$ を持つ光子が方向 $\hat{p}$ に散乱されることから生じる $n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ の増加率は以下で与えられる．

$$C_+^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) = n_e\int d^2\hat{p}_1\frac{d^2\sigma}{d^2\hat{p}}$$
$$\times S^{-1}(\hat{p})\Big[n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{p}|\hat{p}_1,t) - \hat{p}_i\hat{p}_k\, n_\gamma^{kj}(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{p}|\hat{p}_1,t)$$

---

*1 たとえば QTF 第 1 巻 8.7 節（邦訳『場の量子論 2 巻』，8.7 節）を見よ．

$$- \hat{p}_j \hat{p}_k \, n_\gamma^{ik}(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{p}|\hat{p}_1, t) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l \, n_\gamma^{kl}(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{p}|\hat{p}_1, t) \Big] \, . \tag{H.26}$$

ここで n_e は電子の数密度，$d^2\sigma/d^2\hat{p}$ は微分散乱断面積を表す．$(e \cdot e_1)^2$ を終状態の偏光に渡って和を取れば，微分散乱断面積は $S(\hat{p})$ に比例する．$\int d^2\hat{p}\,(d^2\sigma/d^2\hat{p})$ をトムソン散乱断面積 $\sigma_{\mathcal{T}}$ と等しく置き，$\int d^2\hat{p}\, S(\hat{p}) = 8\pi/3$ を考慮すれば以下の結果を得る．

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\hat{p}} = \frac{3\sigma_{\mathcal{T}}}{8\pi} S(\hat{p}) \, . \tag{H.27}$$

式（H.23），（H.26），（H.27）を合わせれば，$n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$ の正味の変化率が，

$$\begin{aligned} C^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) &= C_-^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) + C_+^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) \\ &= -\omega_c(t) n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) + \frac{3\omega_c(t)}{8\pi} \int d^2\hat{p}_1 \\ &\quad \times \Big[n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{p}|\hat{p}_1, t) - \hat{p}_i \hat{p}_k \, n_\gamma^{kj}(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{p}|\hat{p}_1, t) - \hat{p}_j \hat{p}_k \, n_\gamma^{ik}(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{p}|\hat{p}_1, t) \\ &\qquad + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l \, n_\gamma^{kl}(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{p}|\hat{p}_1, t) \Big] \end{aligned} \tag{H.28}$$

と求まる．ここで，$\omega_c(t) = n_e(t)\sigma_{\mathcal{T}}$ を用いた．

式（H.28）で与えられる衝突項が局所的熱平衡状態でゼロになることを確認しておこう．平衡状態の光子は無偏光なので $n_\gamma^{ij} \propto \delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j$ であるが，平衡状態の光子の運動量分布は一様かつ等方的であるから，比例係数 f は $|\boldsymbol{p}|$ と t のみに依存する．

$$n_{\mathrm{eq}}^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) = f(|\boldsymbol{p}|, t) \Big[\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j \Big] \, .$$

すると

$$\int d^2\hat{p}_1 n_{\mathrm{eq}}^{ij}(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{p}|\hat{p}_1, t) = \frac{8\pi}{3} f(|\boldsymbol{p}|, t) \delta_{ij}$$

となる．これを式（H.28）に代入すれば，平衡状態では C^{ij} に寄与する 2 つの項が互いに相殺し合い，確かに C^{ij} がゼロになることが示せる．

任意の 3 次元計量 g_{ij} に対する結果を求めるには，式（H.28）が 3 次元一般座標変換に対して不変となり，かつ平坦な 3 次元計量 $g_{ij} = \delta_{ij}$ の場合に式（H.28）に帰着するように書き換えれば良い．結果は，

$$C^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) = -\omega_c(t) n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$$

$$+\frac{3\omega_c(t)}{8\pi}\int\frac{d^3p_1\sqrt{\mathrm{Det}g(\boldsymbol{x},t)}}{p^{02}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}\delta\Big(p^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)-p^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}_1,t)\Big)$$
$$\times\Bigg[n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}_1,t)-\frac{g^{ik}(\boldsymbol{x},t)p_kp_l}{p^{02}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}n_\gamma^{lj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}_1,t)$$
$$-\frac{g^{jk}(\boldsymbol{x},t)p_kp_\ell}{p^{02}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}n_\gamma^{il}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}_1,t)$$
$$+\frac{g^{ik}(\boldsymbol{x},t)g^{jl}(\boldsymbol{x},t)p_kp_lp_mp_n}{p^{04}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}n_\gamma^{mn}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}_1,t)\Bigg]\,, \tag{H.29}$$

ここで,

$$p^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\equiv\sqrt{g^{ij}(\boldsymbol{x},t)p_ip_j} \tag{H.30}$$

である.

再び，微小な摂動に特化した議論に移ろう．計量を式（H.10）のように書き，光子の数密度行列を式（H.11）と同様な形に書く．

$$n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)=\frac{1}{2}\bar{n}_\gamma\Big(a(t)p^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\Big)\left[g^{ij}(\boldsymbol{x},t)-\frac{g^{ik}(\boldsymbol{x},t)g^{jl}(\boldsymbol{x},t)p_kp_l}{p^{02}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}\right]$$
$$+\delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\,, \tag{H.31}$$

ここで $\bar{n}_\gamma(p)$ は平衡状態における位相空間数密度で，引数に関して時間に依存しない関数,

$$\bar{n}_\gamma(p)\equiv\frac{1}{(2\pi)^3}\Big[\exp\Big(p/k_{\mathcal{B}}a(t)T(t)\Big)-1\Big]^{-1}\,, \tag{H.32}$$

そして δn^{ij} は微小な摂動である．うまいことに，摂動に関して 1 次の精度では，ボルツマン方程式（H.22）は非常に単純化される．これは，式（H.31）の角括弧中の量が以下の無衝突ボルツマン方程式を満たすためである.

$$0=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{p^k}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^k}+\frac{p^lp^m}{2p^0}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial p^k}\right)\left[g^{ij}-\frac{p^ip^j}{p^{02}}\right]$$
$$+\frac{p^\lambda}{p^0}\left(\Gamma^i_{k\lambda}-\frac{p^i}{p^0}\Gamma^0_{k\lambda}\right)\left[g^{kj}-\frac{p^kp^j}{p^{02}}\right]$$
$$+\frac{p^\lambda}{p^0}\left(\Gamma^j_{k\lambda}-\frac{p^j}{p^0}\Gamma^0_{k\lambda}\right)\left[g^{ik}-\frac{p^ip^k}{p^{02}}\right]\,. \tag{H.33}$$

（これは直接証明することもできるが，より簡単には $p_i=p_{ri}(t)$, $x^i=x^i_r(t)$ とすれば角括弧の中は量 $e^i_r(t)e^j_r(t)$ を 2 つの直交する偏光に渡って和を取ったものに

等しいので，式（H.20）の帰結として式（H.33）を満たすことを示せば良い．すると，式（H.33）はすべての光子の軌跡に対して成り立つから，必然的に任意の x^i と p_i に対して成り立つ.）式（H.22）で因子 $\bar{n}_\gamma(ap^0)$ に作用する微分演算子は，摂動 1 次の精度で，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{p^k}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^k}+\frac{p^l p^m}{2p^0}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial p_k}\right)\bar{n}_\gamma(ap^0)=-\frac{1}{2}\sqrt{p_i p_i}$$
$$\times\bar{n}'_\gamma(\sqrt{p_i p_i})\,\hat{p}_k\hat{p}_l\frac{\partial}{\partial t}\left(a^{-2}\delta g_{kl}\right) \tag{H.34}$$

を与える．左辺括弧内の空間座標微分と運動量微分の効果は相殺している．さらに，重力場があっても衝突はそれ自身では平衡状態の分布関数を変えないため式（H.31）の初項は衝突項に寄与しないことに気づけば，摂動 1 次のボルツマン方程式（H.22）は以下のように簡単化される．

$$\frac{\partial\,\delta n^{ij}_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial t}+\frac{\hat{p}_k}{a(t)}\frac{\partial\,\delta n^{ij}_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial x^k}+\frac{2\dot{a}(t)}{a(t)}\,\delta n^{ij}_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$$
$$-\frac{1}{4a^2(t)}p\bar{n}'_\gamma(p)\hat{p}_k\hat{p}_l\frac{\partial}{\partial t}\left(a^{-2}\delta g_{kl}(\boldsymbol{x},t)\right)\left(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j\right)$$
$$=-\omega_c(t)\,\delta n^{ij}_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)+\frac{3\omega_c(t)}{8\pi}\int d^2\hat{p}_1$$
$$\times\left[\delta n^{ij}_\gamma(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t)-\hat{p}_i\hat{p}_k\,\delta n^{kj}_\gamma(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t)-\hat{p}_j\hat{p}_k\,\delta n^{ik}_\gamma(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t)\right.$$
$$\left.+\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_l\,\delta n^{kl}_\gamma(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t)\right], \tag{H.35}$$

ここで再び $p\equiv\sqrt{p_i p_i}$，$\hat{p}\equiv\boldsymbol{p}/p$ を表す．式（H.35）は条件 $p_i\delta n^{ij}=0$ と無矛盾であることを確認しておこう．さらに，光子の位相空間数密度 $g_{ij}n^{ij}_\gamma$ の線形摂動は $a^2\delta n^{ii}$ なので，式（H.35）のトレースを取ることで（衝突項があることと $\bar{n}'_\nu$ の代わりに $\bar{n}'_\gamma$ があることを除けば）$a^2\delta n^{ii}_\gamma$ の従うボルツマン方程式はニュートリノの位相空間密度の摂動が従うボルツマン方程式（H.14）と同じであることも確認しておこう．

テンソル型摂動を扱うならば式（H.35）をそのまま使っても良いが，スカラー型（あるいはベクトル型）摂動を扱うならばこれまで無視してきた 1 つの効果を考慮しなくてはいけない．一般にはプラズマは小さな速度 $\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$（これは 6.1 節以降では $\delta\boldsymbol{u}_B(\boldsymbol{x},t)$ と呼んでいる量と等しい）を持つ．$\delta\boldsymbol{u}$ はそれ自身が摂動 1 次の量なので，これが衝突項 C^{ij} に及ぼす効果を摂動 1 次の精度で計算する際には，重力場や光子数密度の摂動を無視して良い．散乱後の光子の終状態の運動量

が $\boldsymbol{p}$ となる入射光子のエネルギー $|\boldsymbol{p}_1|$ は，プラズマ速度のために少しだけ変化する．この効果を計算するため，まず平坦な時空の場合を考えよう．プラズマの 4 元速度が単に $v^\mu = (0,0,0,1)$ となるプラズマの静止系では光子のエネルギーは保存するから，$(p_1 - p) \cdot v = 0$ を得る．このスカラー量をプラズマの 4 元速度が $v^\mu = [\delta\boldsymbol{v}, \sqrt{1-(\delta\boldsymbol{v})^2}]$ となる「実験室」系で計算すると，

$$0 = v_\mu (p_1 - p)^\mu = \delta\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}) - \sqrt{1-(\delta\boldsymbol{v})^2}(p_1^0 - p^0)$$

を得る．速度に関して 1 次の精度では，

$$|\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}|\Big[1 + (\hat{p}_1 - \hat{p}) \cdot \delta\boldsymbol{v}\Big]$$

になる．すでに述べたように，平坦な時空の速度成分 v^k は 3 次元計量 $g_{ij} = a^2\delta_{ij}$ を持つロバートソン–ウォーカー時空の速度成分と $v^k = a\,u^k = a^{-1}u_k$ のように関係しているから，以下の式を得る．

$$|\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}|\left[1 + \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p})_k \delta u_k}{a}\right]. \tag{H.36}$$

結果として，式（H.28）の衝突項を与える 2 項は，たとえ 3 次元計量 g_{ij} が $a^2\delta_{ij}$ と等しく，光子の数密度行列がこの 3 次元計量のもとでの平衡状態，

$$n^{ij}_{\gamma,\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) = \frac{1}{2a^2(t)}\bar{n}_\gamma(|\boldsymbol{p}|)\left[\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j\right]$$

であっても相殺しない．しかし，この場合もし仮に $|\boldsymbol{p}_1|$ と $|\boldsymbol{p}|$ が等しければ C^{ij} を与える 2 項は相殺**する**ので，項 $-\omega_c(t)n^{ij}_{\gamma,\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ とこの項の $|\boldsymbol{p}|$ を $|\boldsymbol{p}_1|$ に置き換えたものの差を $\hat{p}_1$ に渡って平均し，それを $C^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ に新しい項として加えれば良い．すると，線形化されたボルツマン方程式（H.35）は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\,\delta n^{ij}_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}_k}{a(t)}\frac{\partial\,\delta n^{ij}_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{\partial x^k} + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)}\,\delta n^{ij}_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\\
&\qquad - \frac{1}{4a^2(t)}p\bar{n}'_\gamma(p)\hat{p}_k\hat{p}_l\frac{\partial}{\partial t}\Big(a^{-2}(t)\delta g_{kl}(\boldsymbol{x},t)\Big)\Big(\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j\Big)\\
&\quad = -\omega_c(t)\,\delta n^{ij}_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) + \frac{3\omega_c(t)}{8\pi}\int d^2\hat{p}_1\\
&\qquad \times\Big[\delta n^{ij}_\gamma(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t) - \hat{p}_i\hat{p}_k\,\delta n^{kj}_\gamma(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t) - \hat{p}_j\hat{p}_k\,\delta n^{ik}_\gamma(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t)\\
&\qquad\quad + \hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_l\,\delta n^{kl}_\gamma(\boldsymbol{x},p\hat{p}_1,t)\Big]\\
&\qquad - \frac{\omega_c(t)}{2a^3(t)}\Big(p_k\delta u_k(\boldsymbol{x},t)\Big)\,\bar{n}'_\gamma(p)\Big[\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j\Big].
\end{aligned} \tag{H.37}$$

（式（H.36）の $\hat{p}_{1k}\delta u_k$ に比例する項は $\hat{p}_1$ に渡る積分に寄与しない.）

＊＊＊

式（H.37）の重要な応用例の 1 つとして，平坦な時空における，一様で時間に依存しないプラズマ（$a=1$ で ω_c が定数）中の音波の減衰率を求めてみよう．ただし，衝突率は音波の振動数よりもずっと大きいものとする（この結果は 6.4 節で用いる）．ボルツマン方程式（H.37）の解として，以下の形をとるものを求める．

$$\delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}e^{-i\omega t}\delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{p}) , \qquad \delta u_j(\boldsymbol{x},t) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}e^{-i\omega t}\delta u_j . \tag{H.38}$$

$a=1$ かつ ω_c は定数であるから，式（H.37）は以下のようになる．

$$\begin{aligned}&\Big[\omega_c - i\omega + i\hat{p}\cdot\boldsymbol{k}\Big]\,\delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{p})\\ &\quad = \frac{3\omega_c}{8\pi}\int d^2\hat{p}_1\\ &\qquad \times\Big[\delta n_\gamma^{ij}(p\hat{p}_1) - \hat{p}_i\hat{p}_k\,\delta n_\gamma^{kj}(p\hat{p}_1) - \hat{p}_j\hat{p}_k\,\delta n_\gamma^{ik}(p\hat{p}_1) + \hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_k\hat{p}_l\,\delta n_\gamma^{kl}(p\hat{p}_1)\Big]\\ &\qquad - \frac{\omega_c}{2}\Big(\boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{u}\Big)\,\bar{n}'_\gamma(p)\Big[\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j\Big] .\end{aligned} \tag{H.39}$$

ここで，プラズマ速度 δu_j の式が必要となる．これを得るため，平坦な空間における摂動 1 次のエネルギー–運動量テンソルの光子とバリオンプラズマの寄与がそれぞれ，

$$\delta T^i_{\gamma j} = \int d^3p\; a^2 n_\gamma^{kk}(\boldsymbol{p})\,|\boldsymbol{p}|\hat{p}_i\hat{p}_j , \qquad \delta T^0_{\gamma j} = \int d^3p\; a^2 n_\gamma^{kk}(\boldsymbol{p})\,|\boldsymbol{p}|\hat{p}_j \tag{H.40}$$

と

$$\delta T^i_{Bj} = 0 , \qquad \delta T^0_{Bj} = \bar{\rho}_B\delta u_j \tag{H.41}$$

で与えられることに着目しよう．すると，運動量保存則の式は以下のように書ける．

$$\omega\,\bar{\rho}_B\delta u_j = \int d^3p\; a^2\delta n_\gamma^{kk}(\boldsymbol{p})\,p_j\,\Big(\boldsymbol{k}\cdot\hat{p} - \omega\Big) . \tag{H.42}$$

右辺を計算するため，式（H.39）に p_j をかけて $\boldsymbol{p}$ に渡って積分する．すると，

$$i\int d^3p\;(\boldsymbol{k}\cdot\hat{p} - \omega)\,p_j\,\delta n_\gamma^{kk}(\boldsymbol{p}) = -\omega_c\int d^3p\;p_j\delta n_\gamma^{kk}(\boldsymbol{p}) + \frac{4\omega_c}{3}\delta u_j\bar{\rho}_\gamma$$

を得る．ここで $\bar{\rho}_\gamma = \int d^3p\,p\,\bar{n}_\gamma(p) = -(1/4)\int d^3p\,p^2\,\bar{n}'_\gamma(p)$ である．これを式（H.42）に代入すれば $\delta\boldsymbol{u}$ の式を得る．

$$\left(\omega\,\bar{\rho}_B + \frac{4i\omega_c}{3}\bar{\rho}_\gamma\right)\delta u_j = i\omega_c \int d^3p\; p_j \delta n_\gamma^{kk}(\boldsymbol{p})\,. \tag{H.43}$$

スカラー型摂動では $\boldsymbol{k}$ のみが方向性を持つパラメータなので，式（H.39）と式（H.43）に現れる積分は以下のように書き表すことができる．

$$\int d^3p|\boldsymbol{p}|\;\delta n_\gamma^{ij}(\boldsymbol{p}) = \bar{\rho}_\gamma\left[X\delta_{ij} + Y\hat{k}_i\hat{k}_j\right], \tag{H.44}$$

$$\int d^3p\;\delta n_\gamma^{ii}(\boldsymbol{p})\,p_j = \bar{\rho}_\gamma\,Z\,\hat{k}_j\,, \tag{H.45}$$

ここで，X，Y，Z は $k \equiv |\boldsymbol{k}|$ と ω の関数を表す．すると式（H.43）より $\delta\boldsymbol{u}$ は Z を用いて次のように書ける．

$$\delta\boldsymbol{u} = \frac{3Z}{4[1 - i\omega t_c R]}\,\hat{k}\,, \tag{H.46}$$

ここで $R \equiv 3\bar{\rho}_B/4\bar{\rho}_\gamma$ で，$t_c \equiv 1/\omega_c$ は衝突と衝突の合間の平均自由時間を表す．式（H.44）と式（H.46）を式（H.39）に代入すれば，次の光の強度の摂動を与える式を得る．

$$4\pi\int \delta n_r^{ij}(p\hat{p})p^3dp = \frac{3\bar{\rho}_\gamma}{2[1 - i\omega t_c + i\hat{p}\cdot\boldsymbol{k}t_c]}\left[\left(X + \frac{Z(\hat{p}\cdot\hat{k})}{1 - i\omega t_c R}\right)\left(\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j\right)\right.$$
$$\left. + Y\left(\hat{k}_i - \hat{p}_i(\hat{p}\cdot\hat{k})\right)\left(\hat{k}_j - \hat{p}_j(\hat{p}\cdot\hat{k})\right)\right]. \tag{H.47}$$

この結果を定義式（H.44），（H.45）に再代入すれば，X，Y，Z を関係づける 1 次の斉次方程式が 3 本得られる．これらの式が無矛盾であるためには係数の行列式がゼロでなければならず，この条件から ω と $k = |\boldsymbol{k}|$ を結ぶ分散関係式が得られる．

このようにして得られた分散関係式は非常に複雑であるが，平均自由時間 t_c が小さい場合には大幅に簡単化できる．試しに Y/X は t_c に関して 1 次で，Z/X は 0 次であると仮定して解を求め，以下でその解が仮定と無矛盾であることを確認することにしよう．t_c に関して 2 次までとれば，式（H.44）の δ_{ij} と $\hat{k}_i\hat{k}_j$ に比例する項，および式（H.45）の $\hat{k}_i$ の係数から以下の 1 次の斉次方程式が得られる．

$$0 = \left(i\omega t_c - \omega^2 t_c^2 - \frac{2}{5}k^2 t_c^2\right)X + \frac{1}{10}\left(1 + i\omega t_c\right)Y$$
$$+ \frac{2}{5}\left(-ikt_c + \omega k t_c^2(2 + R)\right)Z \tag{H.48}$$

$$0 = \frac{1}{5}k^2 t_c^2 X + \left(-\frac{3}{10} + \frac{7i}{10}\omega t_c\right) Y + \left(\frac{i}{5}kt_c - \frac{(2+R)}{5}\omega k t_c^2\right) Z \tag{H.49}$$

$$\begin{aligned} 0 = &\Big(- ikt_c + 2\omega k t_c^2\Big) X - \frac{1}{5}ikt_c Y \\ &+ \Big(i\omega t_c(1+R) - \omega^2 t_c^2(1+R+R^2) - \frac{3}{5}k^2 t_c^2\Big) Z \,. \end{aligned} \tag{H.50}$$

（予想通り，これらの関係式は Y が X と Z に比べて t_c 程度の大きさであるという仮定と無矛盾である.）t_c に関して 1 次の精度では，これらの関係式の係数の行列式がゼロになることから以下の条件が得られる.

$$0 = 15(1+R)\omega^2 - 5k^2 + i\omega^3 t_c\Big[-5 - 5R + 15R^2\Big] + 7i\omega k^2 t_c \,.$$

t_c に関して 1 次の精度での解は，

$$\omega = \pm\frac{k}{\sqrt{3(1+R)}} - i\Gamma \tag{H.51}$$

で，Γ は以下で与えられる減衰率を表す.

$$\Gamma = \frac{k^2 t_c}{6(1+R)}\left\{\frac{16}{15} + \frac{R^2}{1+R}\right\} \,. \tag{H.52}$$

これは 6.4 節で与えた減衰率の公式（6.4.25）と同じもので，ニコラス・カイザーによって初めて導かれた[*2]．6.4 節で学ぶように，これは光子によって運動量とエネルギーが輸送される非相対論的プラズマの剪断粘性率と熱伝導率の係数を与える公式（6.4.24）と等価となる.

[*2] N. Kaiser, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **202**, 1169 (1983).

用語集

（これらの記号は複数の節で用いられている．記号の後に付けた数字はその記号が最初に用いられた節を示す）

a	1.1	ロバートソン–ウォーカー計量のスケール因子
$a_{\mathcal{B}}$	2.1	放射エネルギー定数
$a_{\ell m}$	2.6	温度ゆらぎの部分波の振幅（$a_{T,\ell m}$ も同じ）
A	5.1	計量のスカラー型摂動の１つ
B	3.3	バリオン数
	5.1	計量のスカラー型摂動の１つ
	6.1	バリオンを表す添字
C_i	5.1	計量のベクトル型摂動の１つ
C_ℓ	2.6	温度ゆらぎの多重極展開の係数（$C_{TT,\ell}$ も同じ）
d	1.2	固有距離
d_A	1.4	角径距離
d_H	2.6	地平線の距離
d_L	1.4	光度距離
D	6.1	冷たい暗黒物質を表す添字
$D^{(\ell)}$	7.4	スピン ℓ を持つ回転群の表現
D_{ij}	5.1	計量のテンソル型摂動
$\mathcal{D}_q$	5.2	重力波の振幅
$\mathcal{D}_q^o$	6.6	地平線の外側において一定となる重力波の振幅
e_{ij}	5.2	重力波の偏光テンソル
E	5.1	計量のスカラー型摂動の１つ
EQ	6.2	物質と放射がつりあう時刻を表す添字
F	5.1	計量のスカラー型摂動の１つ
	6.6	テンソル型の非等方ストレスに現れる関数の１つ
	7.1	スカラー型温度ゆらぎの形状因子の１つ

g	3.1	状態の数
$g_{\mu\nu}$	1.1	時空の計量
$\tilde{g}_{ij}$	1.1	ロバートソン–ウォーカー計量の空間部分
G	1.5	ニュートンの重力定数
	7.1	スカラー型温度ゆらぎの形状因子の 1 つ
G_i	5.1	計量のベクトル型摂動の 1 つ
h	1.3	100 km s^{-1} Mpc^{-1} を単位とするハッブル定数
	2.4	プランク定数 $= 2\pi\hbar$
$h_{\mu\nu}$	5.1	計量の摂動
H	2.2	宇宙膨張率 $\dot{a}(t)/a(t)$
H_0	1.2	ハッブル定数 $\dot{a}(t_0)/a(t_0)$
$H_\nu^{()}$	10.1	ハンケル関数
I	1.12	作用
ISW	2.6	積分ザクス–ヴォルフェ効果の寄与
j_ℓ	2.6	球ベッセル関数
J	6.1	ニュートリノの強度を表す無次元量
J^μ	1.1	4 元カレントベクトル
J_{ij}	6.1	光子の強度行列を表す無次元量
k	8.1	現在時刻における物理的波数 $= q/a_0$
$k_{\mathcal{B}}$	2.2	ボルツマン定数
K	1.1	ロバートソン–ウォーカー計量における曲率定数
	6.6	テンソル型の非等方ストレスに現れる関数の 1 つ
ℓ	1.3	見かけの光度
	2.6	多重極展開の角波数
L	1.3	絶対光度
	2.1	最終散乱の時刻を表す添字
	3.3	レプトン数
m	1.3	見かけの等級
	1.5	粒子の質量
M	1.3	絶対等級

	1.9	全質量
Mpc	1.3	100 万パーセク
n	1.10	数密度
n^{ij}	6.1	光子の数密度行列
n_S	7.2	$\mathcal{R}_q^o$ の勾配を表すパラメータ
N	7.2	$\mathcal{R}_q^o$ における $q^{-3/2}$ の係数
$\mathcal{N}$	3.1	粒子の種類の実効的な数
	4.1	インフレーションによる宇宙膨張量の自然対数
p	1.1	圧力
pc	1.3	パーセク
P_ℓ	2.4	ルジャンドル多項式
P	8.1	密度ゆらぎのパワースペクトル
$\mathcal{P}_\phi$	2.6	重力ポテンシャルのパワースペクトル
$\boldsymbol{q}$	2.6	共動的波数ベクトル
q_0	1.4	減速パラメータ
r	1.1	ロバートソン–ウォーカー計量の動径座標
	7.3	テンソル–スカラー比
R	2.6	バリオンと光子のエネルギー密度比 $\times\ 3/4$
$R_{\mu\nu}$	1.5	リッチテンソル
$\mathcal{R}$	5.4	曲率ゆらぎ
$\mathcal{R}^o$	6.2	地平線の外側において一定となる曲率ゆらぎの振幅
s	1.1	固有距離
	3.1	エントロピー密度
S	7.1	スカラー型摂動を表す添字
$S_{\mu\nu}$	1.5	アインシュタインの場の方程式の源泉関数
$S(\hat{n})$	7.4	座標の z 軸方向から任意の方向 $\hat{n}$ への回転
$\mathcal{S}$	6.5	スカラー型摂動の遷移関数の 1 つ
SW	2.6	ザクス–ヴォルフェ効果の寄与
t	1.1	時間
t_0	1.5	現在の宇宙年齢

t_1	6.1	ボルツマン方程式の解に現れる初期時刻
T	2.1	温度
	7.1	テンソル型摂動を表す添字
$T_{\mu\nu}$	1.1	エネルギー–運動量テンソル
$\mathcal{T}$	6.5	密度ゆらぎの遷移関数
u	1.1	アフィンパラメータ
	5.1	速度ポテンシャル
u_μ	5.1	4元速度ベクトル
$\mathcal{U}$	6.6	テンソル型摂動の遷移関数の1つ
v_s	2.6	音速
V	1.12	スカラー場のポテンシャル
w	1.1	圧力と密度の比
$\boldsymbol{x}$	1.1	共動的空間座標
X	2.3	電離度
$\boldsymbol{X}$	1.9	ニュートン的な空間座標
y	6.3	物質と放射のエネルギー密度比 $= a/a_{\rm EQ}$
Y_ℓ^m	2.6	通常の球面調和関数
$\mathcal{Y}_\ell^m$	7.4	スピン $+2$ の調和関数
z	1.2	赤方偏移
	10.1	ムハノフ–佐々木方程式における量 $a\dot{\varphi}/H$

α	5.2	スカラー型摂動の確率変数
	9.1	重力レンズ天体とソース天体（光源）の真の位置とがなす角度
β	5.2	テンソル型摂動の確率変数
	6.4	バリオン密度と全物質密度の比
	9.1	重力レンズ天体とソース天体（光源）の見かけの位置とがなす角度
β_E	9.1	アインシュタインリングの角半径
γ	6.1	光子を表す添字
	6.4	オイラー数

Γ	6.4	音波の減衰率
$\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa}$	1.1	アフィン接続
$\tilde{\Gamma}^{i}_{jk}$	1.1	ロバートソン–ウォーカー計量の空間部分から計算されたアフィン接続
δ_{ij}	1.1	クロネッカーのデルタ記号
δ_{Xq}	6.2	$\delta\rho_{Xq}/(\bar{\rho}_X + \bar{p}_X) \quad (X = B, D, \gamma, \nu)$
Δ	5.3	ゲージ変換による変化
	6.5	スカラー型摂動の遷移関数の1つ
$\Delta_T^{(S)}$	6.1	スカラー型の光子の温度ゆらぎの振幅
$\Delta_P^{(S)}$	6.1	スカラー型の光子の偏光ゆらぎの振幅
$\Delta_T^{(T)}$	6.6	テンソル型の光子の温度ゆらぎの振幅
$\Delta_P^{(T)}$	6.6	テンソル型の光子の偏光ゆらぎの振幅
ε	10.1	$-\dot{H}/H^2$
$\varepsilon_0, \varepsilon^S$	5.3	ゲージ変換のパラメータ
ζ	5.4	地平線の外側で保存する摂動
η	3.2	バリオンと光子の数密度比
$\eta_{\mu\nu}$	1.5	ミンコフスキー時空の計量
θ	1.1	極角（9.5 節を除く）
κ	6.2	無次元化された波数
μ	3.1	化学ポテンシャル
ν	1.2	振動数
	6.1	ニュートリノと反ニュートリノを表す添字
Ξ	6.6	テンソル型摂動の遷移関数の1つ
π_{ij}	5.1	全非等方ストレステンソル
π^S	5.1	スカラー型の非等方ストレス
π_i^V	5.1	ベクトル型の非等方ストレス
π_{ij}^T	5.1	テンソル型の非等方ストレス
Π	6.1	スカラー型摂動の源泉関数の1つ
ρ	1.1	エネルギー密度
σ	1.10	断面積
	2.2	バリオン1個あたりのエントロピー

	8.1	密度ゆらぎの標準偏差
τ	1.1	固有時間
	1.10	光学的厚さ
	5.3	異なる同期ゲージ間の変換パラメータ
	10.1	共形時間
ϕ	1.1	方位角（9.5 節を除く）
	2.6	重力ポテンシャル
φ	1.12	スカラー場
Φ	5.3	ニュートンゲージにおける計量のスカラー型摂動の 1 つ
	6.1	スカラー型摂動の源泉関数の 1 つ
ψ	5.3	同期ゲージにおける計量のスカラー型摂動の 1 つ
Ψ	5.3	ニュートンゲージにおける計量のスカラー型摂動の 1 つ
	6.6	テンソル型摂動の源泉関数
Ω_K	1.5	$-K/a_0^2H_0^2$
Ω_M	1.5	物質のエネルギー密度と臨界密度の比
Ω_R	1.5	放射のエネルギー密度と臨界密度の比
Ω_Λ	1.5	真空のエネルギー密度と臨界密度の比

例題集

(1) 地平線の十分外側にあるスカラー型摂動が従う場の方程式と保存則の方程式が与える 2 つの独立解を，状態方程式 $p = w\rho$（w は定数）を持つ完全流体の場合にニュートンゲージで求めよ．得られた結果を用い，それぞれの解に対して $\mathcal{R} \equiv -\varPsi + H\,\delta u$ を計算せよ．

(2) 冷たい暗黒物質のみを含む宇宙におけるスカラー型摂動の方程式を考える．ニュートンゲージを用いてこの連立方程式を解き，$\varPhi_q$ と δu_q を与える 2 つの解を求めよ．(これらの解はどのように規格化しても良いが，あまり複雑にしないように.) 波数の大きさに何ら仮定を置くことなく，それぞれの解に対して $\mathcal{R}_q$，$\delta\rho_q$，ζ_q を計算せよ．

(3) 以下のベクトル場を考えよう．

$$V^\mu(\boldsymbol{x}, t) = \bar{V}^\mu(t) + \delta V^\mu(\boldsymbol{x}, t)\ ,$$

ただし，摂動を含まない空間成分 $\bar{V}^i$ はゼロで，摂動を含まない時間成分 $\bar{V}^0$ はゼロでない時間のみの関数であるとする．一般的なゲージ変換に対し，δV^0 と δV^i はどのように変化するか？

(4) 5.2 節で行った解析をベクトル型摂動に対して行え．

(5) 仮に，ニュートリノと他のすべての粒子との相互作用の微分散乱断面積が方向にもエネルギーにもよらない定数であるとしよう（実際にはそんなことはない）．ニュートリノの全衝突率が $\omega_c(t)$ で与えられるとき，ニュートリノの位相空間分布関数 $n_\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$ が満たすボルツマン方程式を導け．ただし，時空の計量は $g_{00} = -1$，$g_{i0} = 0$，そして $g_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ は任意であるとする．次に，3 次元計量が $g_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = a^2(t)\delta_{ij} + \delta g_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ で与えられるとき，式 (6.1.39) で定義される位相空間密度の摂動 $\delta n_\nu(\boldsymbol{x}, t)$ が満たすボルツマン方程式を δg_{ij} と δn_ν に関して 1 次の精度で導け．

(6) H_0 の値が 2 倍になり，$\varOmega_B$ と $\varOmega_M$ の値が 4 分の 1 になったとしよう．$\ell^2 C_\ell$ を ℓ の関数としたとき，$\ell \gg 1$ においてどのような変化が生じるか？　定性的に述べよ．

(7) 最終散乱面の摂動で，共動波数 ℓ/r_L（r_L は最終散乱面の共動動径座標）を持つものが $C^S_{TT,\ell}$ に最も寄与すると仮定する．また，ドップラー効果を無視し，遷移関数として $\mathcal{S}=5$，$\mathcal{T}=1$ を用いる．これらの仮定のもとで，$\ell(\ell+1)C^S_{TT,\ell}$ の 1 番目と 2 番目の山の高さの比を近似的に与える式を導け．

(8) 銀河団の（冷たい暗黒物質を加えた）全質量に相当する質量 $10^{15}\,M_\odot$ を含む共動球を考えたとき，この球の直径と等しい共動波長に対応する ℓ の値は何か？球は最終散乱面にあるとする．

(9) 物質の密度ゆらぎの 2 乗平均値を，

$$\sigma_R^2 \equiv \left\langle \left(\frac{1}{(\sqrt{\pi}R)^3} \int d^3x\, \delta_M(\boldsymbol{x},t)\, e^{-\boldsymbol{x}^2/R^2} \right)^2 \right\rangle$$

と定義する．積分は全空間に渡って行う．大きめの銀河の（冷たい暗黒物質を加えた）全質量に相当する質量 $10^{12}\,M_\odot$ を持つ共動球を考えたとき，この球の半径と等しい R における σ_R^2 の値が 0.1 に達する時刻はいつか？　原始パワースペクトルとして $|N|=2\times10^{-5}$ を持つハリソン–ゼルドヴィッチスペクトルを仮定して計算せよ．

(10)　方向 $\hat{n}$ にある宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎと，方向 $\hat{n}'$，赤方偏移 z にある宇宙の質量密度のゆらぎの 2 点相関関数の多重極展開係数を与える式を導け．適当な近似を用いて良いが，どのような近似を用いたかをきちんと明らかにせよ．

(11) x 軸に沿う方向 $\hat{n}$ に伝播する重力波の偏光テンソル $e_{ij}(\hat{n},\pm2)$ に一般的な微小回転変換を施すとどうなるか？

(12) 並進変換と回転変換に対しては不変であるが，空間反転に対しては不変でないテンソル型摂動の確率分布関数を考えよう．それは平均値 $\langle\beta(\boldsymbol{q},\lambda)\beta^*(\boldsymbol{q}',\lambda')\rangle$ にどのような影響を与えるか？　ここで，$\beta(\boldsymbol{q},\lambda)$ は波数 $\boldsymbol{q}$ とヘリシティ λ を持つテンソル型摂動の確率変数を表す．この場合に多重極展開係数 $C^T_{EB,\ell}$ を与える式を導け．

(13) ある銀河の脇を通り過ぎる光線が，銀河の中心方向に角度 A/b^n だけ曲げられたとしよう．A と n は定数で，b は光線と銀河の中心が最接近したときの距離を表す．レンズ方程式を導け．レンズ方程式とは，地球とレンズ銀河を結ぶ視線方向と，地球とより遠くにある光源を結ぶ視線方向とがなす観測可能な角度 β と，もし光線が銀河によって曲げられなければ観測されるであろう角度 α とを

結ぶ関係式である．光源の像の見かけの光度を β の関数として与える式を導け．

（14）多重極展開係数 $C_{\gamma E,\ell}$ を，

$$\langle a_{\gamma,\ell m}\, a^*_{E,\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{mm'}\, C_{\gamma E,\ell}$$

と定義する．$a_{\gamma,\ell m}$ と $a_{E,\ell m}$ はそれぞれ 9.5 節と 7.4 節で定義した歪み場とストークスパラメータの部分波展開係数を表す．これらの多重極展開係数を用い，歪み場とストークスパラメータの相関関数 $\langle \gamma_1(\hat{n})\, Q(\hat{n}') \rangle$，$\langle \gamma_2(\hat{n})\, Q(\hat{n}') \rangle$，$\langle \gamma_1(\hat{n})\, U(\hat{n}') \rangle$，$\langle \gamma_2(\hat{n})\, U(\hat{n}') \rangle$ を与える式を導け．

（15）インフレーションが単一のインフラトン場 φ によって引き起こされ，そのポテンシャルが $V(\varphi) = g \exp(-\lambda \varphi^2)$ で与えられるとする．スローロール近似を用いるために λ，φ が満たすべき条件は何か？　これらの条件が満たされるとして，スカラー型摂動とテンソル型摂動のスペクトル指数パラメータ n_S，n_T を求めよ．φ が 100 倍変化すると，宇宙はどのくらい膨張するか？　膨張量の自然対数を求めよ．

（16）多重場インフレーションにおいて，摂動が地平線の外側に出る時期のポテンシャルのわずかな変化を考慮すると，地平線の外側にあるスカラー場の摂動は波数にどのように依存するか？

訳者あとがき

スティーブン・ワインバーグ教授に初めてお会いしたのは，2003 年 2 月末のことでした．テキサス大学オースティン校（以下 UT）の天文学科で助教授を公募しており，その最終選考のため UT を訪れました．我々WMAP チームが同年 2 月 11 日に発表したばかりの WMAP 衛星の初年度の成果について講演していると，最前列の席に座って，鋭い質問をたくさん投げかけてくる人がいました．失礼ながら,「宇宙論をよくわかっているおじいさんがいるなあ」と思っていたら，講演後，その方がやって来て，こう言われました．

「スティーブン・ワインバーグです．面白い講演でした」

ワインバーグ教授は，言わずと知れた素粒子物理学の大家ですが，宇宙論にも造詣が深いことで知られています．彼の 1972 年の著作『重力と宇宙論（*Gravitation and Cosmology*)』は歴史に残る名著で，今読みかえしてもなお新しい発見があります．宇宙論の一般書では，現在でも彼の 1977 年の著作『宇宙創成はじめの 3 分間（*The First Three Minutes*)』よりも優れた本を探すのは難しいでしょう．

本書は，2008 年に出版された *Cosmology* の邦訳です．この教科書は，ワインバーグ教授が UT で大学院生向けに行った授業「AST396C/PHY396T: Elements of Cosmology」に基づいています．彼は授業の内容を本として出版する（あるいは本を出版するために授業をする）のがお気に入りのようで，最近では量子力学の授業ノートをまとめた *Lectures on Quantum Mechanics* を出版されています．本が書き上がれば，もうその授業をしないのが彼のスタイル（本人が言うには「本を読めばわかる」から）で，2007 年の春学期を最後に宇宙論の授業はしていません．

“ΛCDM モデル” は，我々が住む宇宙を記述する宇宙論の標準モデルです．このモデルによれば，現在の宇宙には光子，ニュートリノ，水素，ヘリウムといった既知の要素，そして暗黒物質，暗黒エネルギーといった正体不明の要素が存在します．さらに，宇宙初期にはインフレーションと呼ばれる急激な加速膨張の時期があり，インフレーションが終了すると宇宙が加熱して「ビッグバン」の時期を迎えます．その後，宇宙が膨張するとともに温度が下がり，重力不安定性に

よって銀河や銀河団といった宇宙の大規模構造ができてきます．これらの構造の「種」となったのは，インフレーション中に量子力学的効果から生じる量子ゆらぎで，ガウス統計に従い，断熱的でほぼスケール不変な空間分布を持つのです．

ここで，いくつもの疑問が浮かびます．

「暗黒物資とは何か？」

「暗黒エネルギーとは何か？」

「インフレーションは本当にあったのか，もしあったとすればどのように起こったのか？」

これらの疑問に答えるのは今後の宇宙論研究の最重要課題ですが，本書はこのミステリアスな ΛCDM モデルの完全な解説を与えます．本書を読破されたならば，ΛCDM モデルとその理論的帰結をほぼ完全に理解したと思って差し支えありません．それはつまり，本書を読むことにより，我々が持つ最先端の宇宙の姿を理解できるということです．

私は，2004 年 1 月に UT に赴任してから，ワインバーグ教授と本書の内容について頻繁に話し合いました．かなり初期の段階から原稿に目を通させてもらい，ほぼ完成に近づいた頃,「この素晴らしい教科書を，日本の学生や研究者に日本語で読んでもらいたい」と思うようになりました．教科書がいかに明快な言葉で書いてあっても，英語であるために理解に時間がかかり，最悪の場合には誤って理解してしまうことがあります.「この文章はどういう意味なのかな？」と文章の意味や解釈を考えながら読んでいたのでは，宇宙論を本当に理解するまでに莫大な時間がかかるでしょう．本書を邦訳するにあたり，異なる解釈ができる曖昧な表現は排除し，できるだけ素直な表現を使うよう心がけました．文章の意味を深く考えずとも，すんなりと言葉が入ってくるような，そんな訳を目指しました．

日本評論社の佐藤大器さんにお願いして翻訳をさせてもらうことになったのは 2008 年の夏でした．しかし，日々の研究業務と並行して翻訳作業を進めるのは容易ではなく，すべてを翻訳するのに 3 年半を要しました．その間，宇宙論業界，とりわけ宇宙マイクロ波背景放射に素晴らしい進展があったからです．まず，本書でも紹介されている WMAP 衛星が 9 年間の観測をもってその運用を停止し，2012 年 12 月 21 日に最終結果を発表しました.（私は WMAP チームの一員なので，WMAP から得られたデータの解析や，結果をまとめた論文の執筆が，本書の翻訳が遅れた最大の原因でした.）

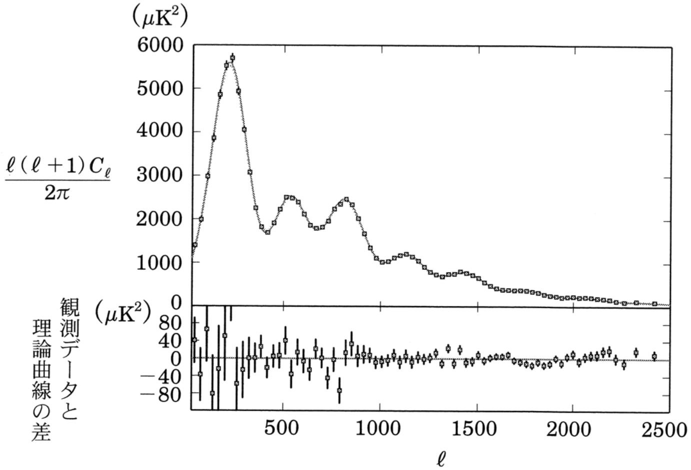


図 1　プランク衛星の初年度のデータから得られた温度ゆらぎの多重極展開係数 $\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi$ を ℓ の関数として示す．Planck Collaboration XVI, arXiv:1303.5076 より抜粋．上の図の誤差棒付き四角形はプランクデータを，曲線はプランクの温度ゆらぎのデータと WMAP 衛星 9 年目の EE 相関データ（$\ell \leqq 23$）によく合う理論曲線を示す．下の図はデータと理論曲線の差を示す．図 7.2 に示す WMAP 3 年目の温度ゆらぎのデータと比べると，データ精度の劇的な向上がよくわかる．

それから数日後，地上の望遠鏡を用いて宇宙マイクロ波背景放射を観測しているアタカマ宇宙論望遠鏡（Atacama Cosmology Telescope）と南極望遠鏡（South Pole Telescope）のチームも観測結果を発表しました．そして 2013 年 3 月 21 日，WMAP 衛星の後継機であるプランク衛星が初年度の観測結果を発表しました（結果の一部を図 1〜3 に示す）．

これらのデータから，宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎの多重極展開係数 C_ℓ が $\ell = 2500$ 程度まで高精度で測定されたのです．これは本書の図 7.1 や 7.2 で示されている ℓ をはるかに超えるものです（図 1 参照）．また，図 7.5 の温度と E モード偏光の相関（図 2 参照）や，図 7.6 の E モード偏光の相関も高精度で測定されています（図 3 参照，370 ページ）．これら新しいデータもすべて本書で説明されている ΛCDM モデルで記述でき，そこから得られる宇宙論パラメータも本書で用いられているものとほぼ同じです．つまり，本書は引き続き十分に新しい情報を載せていると言えます．

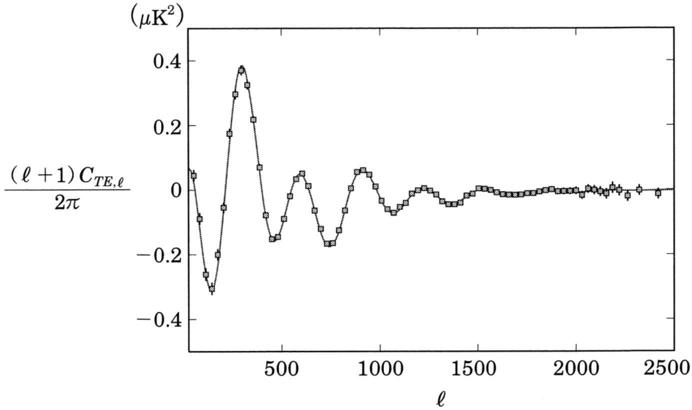


図 2 プランク衛星の初年度のデータから得られた TE 相関の多重極展開係数 $(\ell+1)C_{TE,\ell}/2\pi$ を ℓ の関数として示す．Planck Collaboration XVI, arXiv:1303.5076 より抜粋．誤差棒付き四角形はプランクデータを，曲線はプランクの偏光のデータは用いず，プランクの温度ゆらぎのデータと WMAP 衛星 9 年目の EE 相関データ（$\ell \leqq 23$）から得られた宇宙論パラメータを用いて計算した理論曲線を示す．図 7.5 に示す理論曲線は $\ell(\ell+1)C_{TE,\ell}/2\pi$ で，ℓ 倍だけ異なることに注意．

プランク衛星のデータから得られた重要な成果をひとつ挙げると，スカラー型摂動のパワースペクトルの冪を表すパラメータ n_S は 0.96 程度で，1 よりも小さいことが確実になりました．これはインフレーション理論を支持する素晴らしい成果です．10.3 節を読めば，その重要性が理解できるでしょう．宇宙の大規模構造の観測における進展は，図 8.2 の挿入図に示されるバリオン音響振動のデータの精度が飛躍的に向上し，明らかな振動が見えること（図 4 参照，371 ページ），そしてそれを用いた角径距離の測定が高精度で行われるようになったことが挙げられます．9 章で扱われる，弱い重力レンズ効果を用いた宇宙の大規模構造の精密測定は，まさにこれから始まろうとしているのです．

本書でも強調されているように，今後の宇宙論研究の最重要課題は，B モード偏光を用いたインフレーション起源の原始重力波の探査，バリオン音響振動を用いた暗黒エネルギーの時間変化の研究，弱い重力レンズ効果を用いた宇宙の大規模構造の研究，などがあります．それぞれについて世界中で観測プロジェクトが立ち上がっており，日本もいくつかのプロジェクトを主導的立場で進めています．

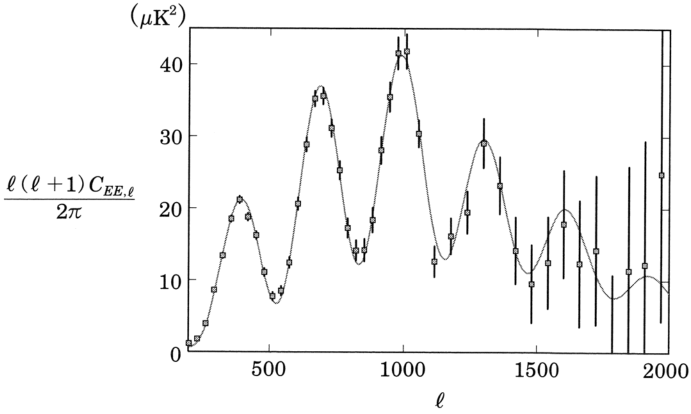


図 3　プランク衛星の初年度のデータから得られた EE 相関の多重極展開係数 $\ell(\ell+1)C_{EE,\ell}/2\pi$ を ℓ の関数として示す．Planck Collaboration XVI, arXiv:1303.5076 より抜粋．誤差棒付き四角形はプランクデータを，曲線はプランクの偏光のデータは用いず，プランクの温度ゆらぎのデータと WMAP 衛星 9 年目の EE 相関データ（$\ell \leqq 23$）から得られた宇宙論パラメータを用いて計算した理論曲線を示す．図 7.6 と比べると，データ精度の劇的な向上がよくわかる．（ただし，図 7.6 に示すのは $(\ell+1)C_{EE,\ell}/2\pi$ で，$1/\ell$ 倍だけ異なることに注意．）

そのような情勢の中，ΛCDM モデルの完全な記述を与える本書が果たす役割もまた大きいと言えるでしょう．

現代宇宙論の重要なトピックは本書でほぼすべて網羅されていますが，本書で扱われていない重要なトピックをあえて 3 つ挙げれば，宇宙マイクロ波背景放射が受ける重力レンズ効果，銀河の特異速度によって生じる銀河の相関関数の「赤方偏移の歪み」の効果，そしてニュートリノの質量によって生じる相関関数の減衰の効果があります．ワインバーグ教授にこれらのトピックがカバーされていませんね，と言うと，「もっとたくさんカバーできてないことがあるに決まってるよ」と笑っておられました．

私事ですが，2012 年 8 月，オースティンを去り，ドイツのミュンヘン郊外にあるマックス・プランク宇宙物理学研究所に移りました．よく「オースティンを懐かしく思うか？」と聞かれます．テキサスバーベキューよりも何よりも，ワインバーグ教授に会えないことを一番寂しく思います．

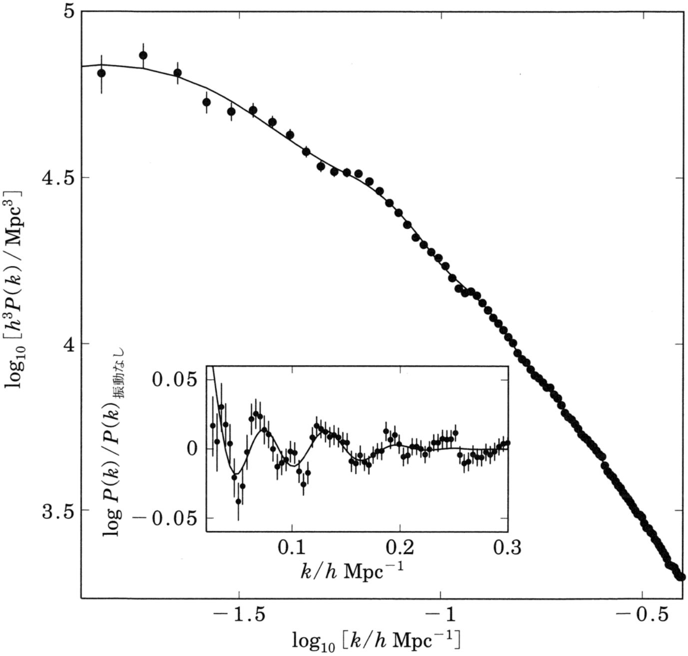


図 4　第 3 世代のスローン・デジタル・スカイサーベイ (SDSS III) の一部であるバリオン振動分光サーベイ (Baryon Oscillation Spectroscopic Survey) の観測データから測定されたパワースペクトル．L. Anderson *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **427**, 3435 (2012) より抜粋．誤差棒付きの黒丸は観測データを，曲線はデータによく合う（非線形性も含めた）理論曲線を示す．挿入図はバリオン音響振動の効果を示す．データ点は，測定されたパワースペクトルと，振動を除去してなめらかにした理論曲線との比を，曲線はデータによく合うパワースペクトルの理論曲線と振動を除去してなめらかにした理論曲線との比を示す．図 8.2 と比べると，データ精度の向上がよくわかる．

日本評論社の佐藤大器さんには，翻訳，校正，出版までの 5 年間に渡ってお世話になりました．深く感謝します．

ドイツ，バイエルン州ミュンヘンにて

小松 英一郎

2013 年 5 月 19 日

索引

た

な

は

ま

や

ら

著者
スティーブン・ワインバーグ(Steven Weinberg)
1933年,ニューヨーク生まれ.コーネル大学卒業,コロンビア大学でPh.D.を取得.ハーバード大学教授を経て,現在テキサス大学物理学科教授で,天文学科教授も併任.専門は素粒子物理学と宇宙論.1979年に,S.グラショウ,A.サラムとともに電弱理論への貢献でノーベル物理学賞を受賞.おもな著書に,『ワインバーグ場の量子論(全6巻)』(邦訳,吉岡書店),『宇宙創世はじめの3分間』(邦訳,ちくま学芸文庫),『ワインバーグの宇宙論(上)』(邦訳,日本評論社)がある.

訳者
小松英一郎(こまつ・えいいちろう)
1974年,兵庫県宝塚市生まれ.2001年,東北大学大学院理学研究科博士課程修了.テキサス大学教授を経て,現在,マックスプランク宇宙物理学研究所所長,東京大学高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構上級科学研究員.理学博士.専門は宇宙論.おもな著訳書に,『宇宙を見る新しい目』(分担執筆,日本評論社),シリーズ現代の天文学第3巻『宇宙論II』(分担執筆,日本評論社),『ワインバーグの宇宙論(上)』(訳,日本評論社)がある.

ワインバーグの宇宙論(うちゅうろん)[下(げ)]
ゆらぎの形成(けいせい)と進化(しんか)

発行日　2013年7月15日　第1版第1刷発行

著　者　S.ワインバーグ
訳　者　小松英一郎
発行者　串崎　浩
発行所　株式会社 日本評論社
170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4
電話　03-3987-8621(販売)　03-3987-8599(編集)
印　刷　三美印刷株式会社
製　本　松岳社
装　幀　妹尾浩也

© Eiichiro Komatsu 2013　Printed in Japan
ISBN978-4-535-78617-2

JCOPY 〈(社)出版者著作権管理機構 委託出版物〉
本書の無断複写は著作権法上での例外を除き禁じられています.複写される場合は,そのつど事前に,(社)出版者著作権管理機構(電話03-3513-6969,FAX 03-3513-6979,e-mail: info@jcopy.or.jp)の許諾を得てください.また,本書を代行業者等の第三者に依頼してスキャニング等の行為によりデジタル化することは,個人の家庭内の利用であっても,一切認められておりません.

ワインバーグの宇宙論(上)

——ビッグバン宇宙の進化

S.ワインバーグ／著　小松英一郎／訳

ノーベル物理学賞受賞者で、現在も現役にして、大きな影響力をもつ著者による宇宙論の教科書。内容の深さ、エレガントさでは、他の追随を許さない。上巻では、ゆらぎを考慮しない、一様な宇宙を対象とする。

好評既刊 ◆ISBN978-4-535-78616-5／A5判／定価3,570円(税込)

シリーズ 現代の天文学 全17巻

第1巻 **人類の住む宇宙** 岡村定矩／他編◆定価2,520円

第2巻 **宇宙論Ｉ**——宇宙のはじまり［第2版］ 佐藤勝彦＋二間瀬敏史／編◆定価2,520円

第3巻 **宇宙論ＩＩ**——宇宙の進化 二間瀬敏史／他編◆定価2,415円

第4巻 **銀河Ｉ**——銀河と宇宙の階層構造 谷口義明／他編◆定価2,625円

第5巻 **銀河ＩＩ**——銀河系 祖父江義明／他編◆定価2,625円

第6巻 **星間物質と星形成** 福井康雄／他編◆定価2,625円

第7巻 **恒星** 野本憲一／他編◆定価2,940円

第8巻 **ブラックホールと高エネルギー現象** 小山勝二／他編◆定価2,205円

第9巻 **太陽系と惑星** 渡部潤一／他編◆定価2,520円

第10巻 **太陽** 桜井 隆／他編◆定価2,835円

第11巻 **天体物理学の基礎Ｉ** 観山正見／他編◆定価2,730円

第12巻 **天体物理学の基礎ＩＩ** 観山正見／他編◆定価2,520円

第13巻 **天体の位置と運動** 福島登志夫／編◆定価2,310円

第14巻 **シミュレーション天文学** 富阪幸治／他編◆定価2,625円

第15巻 **宇宙の観測Ｉ**——光・赤外天文学 家 正則／他編◆定価2,520円

第16巻 **宇宙の観測ＩＩ**——電波天文学 中井直正／他編◆定価2,835円

第17巻 **宇宙の観測ＩＩＩ**——高エネルギー天文学 井上 一／他編◆定価2,310円

別巻 **天文学辞典** 岡村定矩／代表編者◆定価6,825円

日本評論社

※表示価格税込